Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2017, svar och lösningar

Här följer svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag.

Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Där kan du sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 29 april.

Nominera till Mikael Passares stipendium
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola* och *årskurs, tävlingsklass, resultat* på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom behöver vi ett kontonummer där vi kan sätta ett eventuellt stipendium samt postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap.* Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryn beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond och NCM.

Nomineringen skickas senast 29 april till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Lösningsförslag Junior 2017

3 poäng

1. B: 16
   I den tomma rutan i mittenraden ska det stå 19 och i den tomma mittenrutan i understa raden 3. Då måste frågetecknet ersättas med 16.

	2039	
19	2020	
16	3	2017

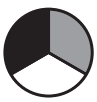
2. E: 

   En vändning utefter höger sida ger en spegling av bokstäverna. En vridning på 180° ger alternativ E.

3. B: 10 cm^2
   Arean av det yttersta grå fältet är $16-9=7$. Arean av den innersta gråa fältet får vi på liknande sätt, $4-1=3$. Total skuggad area är: $7+3=10$.

4. C: 3 €
   Sammanlagt har syskonen $(24+3\cdot 12)$ € $=60$ €. Eftersom de ska ha lika mycket ska var och en ha 60 € / 4 = 15 €. Maria ska ge var och en $(15-12)$ € $=3$ €.

5. C: 13
   Till vänster mellan Bianca och Antonia finns det fyra flickor och till höger mellan Bianca och Antonia finns det sju flickor. Alltså finns det 13 flickor i ringen.

6. E: 
   Cirkeln har omkretsen 2π. När den har rullat sträckan 11π har den rullat 5,5 varv.

7. C: 70 %
   20 spelade matcher och 14 vunna ger $\frac{14}{20} = 70\,\%$.

8. A: $\frac{1}{2}$
   Eftersom $\frac{1}{8}$ av gästerna är barn så är $\frac{7}{8}$ av gästerna vuxna. Då är andelen män bland gästerna $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$. Andelen vuxna kvinnor är $1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

   Alternativ lösning: 7/8 av gästerna är vuxna och andelen kvinnor är 4/7. Andelen kvinnor bland publiken är $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$.

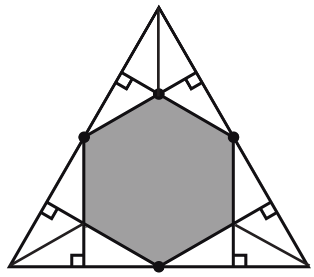
9. C: 35

Beteckna de parallella sidorna med a och b och låt h vara parallelltrapetsets höjd. Parallelltrapetsets area är $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Eftersom $a = 50$ och $b = 20$ så är $A = \frac{50+20}{2} \cdot h = 35h$. Sätt $AE = x$. Arean av triangeln AED är $\frac{xh}{2} = \frac{35h}{2}$, $x = 35$.

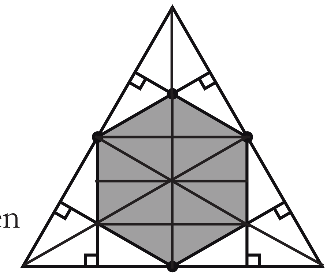
10. E: 40

När A är tresiffrigt och $A + 20$ fyrsiffrigt finns följande möjliga tal; $980 \leq A \leq 999$, dvs 20 tal.
När A är fyrsiffrigt och $A + 20$ femsiffrigt finns följande möjliga tal; $9980 \leq A \leq 9999$, dvs också 20 tal.

11. D: $\frac{1}{2}$



Dra från varje triangelhörn en linje till hexagonens närmaste hörn. De fyra vita trianglar som bildas kring varje hörn är kongruenta (halva liksidiga trianglar). Totalt finns det 12 vita trianglar.



Den bildade hexagonen är regelbunden. Dra linjerna enligt bilden nedan genom hörn och mittpunkten på motstående sida samt parallella linjer med basen. Då får vi 12 vita och 12 gråa trianglar som alla är kongruenta. Alltså täcker hexagonen hälften av den ursprungliga arean.

12. C: 17

Låt de tre konsekutiva talen vara $n - 1$, n och $n + 1$. Då gäller
$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 770$
$n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 770$
$3n^2 = 768$
$n^2 = 256$
$n = 16$
Det största talet är $16 + 1 = 17$.

13. B: 28 cm

Låt hjul B ha diameter d_B. För hjul B och hjul C gäller då att
$6 \cdot d_B \cdot 2\pi = 7 \cdot 30 \cdot 2\pi$, $d_B = 35$.
Låt hjul A ha diameter d_A. För hjul A och hjul C gäller då
$5 \cdot d_A \cdot 2\pi = 4 \cdot 35 \cdot 2\pi$, $d_A = 28$.

14. B: 7

Tycho vill jogga tre gånger per vecka men inte två dagar i sträck. Vi gör ett schema över möjliga kombinationer av veckodagar. Det blir totalt 7 olika scheman.

Mån	Tis	Ons	Tor	Fre	Lör	Sön

Alternativ lösning: Han ska ha 3 viloperioder på sammanlagt 4 dagar. Alltså en viloperiod på 2 dagar och två viloperioder på 1 dag. Han kan på 7 sätt välja när 2-dagars viloperioden ska inträffa och väljer han den så är resten entydigt bestämd.

15. A: 160 cm

Vi kan börja med att ställa pojkarna i en rad efter deras längder. Om vi börjar med den kortaste så gäller ordningen Oscar, Peter, Tobias och Viktor. Vi vet att det är samma differens i deras längder, låt den differensen vara d cm. Eftersom $T = 184$ får vi $O = 184 - 2d$, $P = 184 - d$ och $V = 184 + d$.

Alternativ 1: Deras medellängd är 178 cm, då är Tobias lika mycket längre än medellängden som Peter är kortare, dvs differensen mellan deras längder är $2 \cdot 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$.
Oskar är då $184\,\text{cm} - 24\,\text{cm} = 160\,\text{cm}$.

Alternativ 2: Eftersom deras medellängd är 178 cm så gäller

$$\frac{184 - 2d + 184 - d + 184 + 184 + d}{4} = 178 \Leftrightarrow d = 12$$

Oskar är 160 cm.

16. D: 0

Vi betecknar talen i de övriga rutorna enligt figuren:

3	a	1
b	c	d
2	e	f

Då ska följande samband gälla

(1) $3 + a + b + c = a + 1 + c + d \Leftrightarrow 3 + b = 1 + d \Leftrightarrow b - d = -2$

(2) $b + c + 2 + e = c + d + e + f \Leftrightarrow b + 2 = d + f \Leftrightarrow b - d = -2 + f$

Jämförelse av (1) och (2) ger att $f = 0$.

17. A: endast *a* eller *g*
Summan 2017 är udda, alltså måste ett udda antal termer vara udda. Eftersom vartannat tal i serien är udda så måste det vara ett av talen *b*, *d* eller *f*. Alltså måste 286 vara antingen *a*, *c*, *e* eller *g*. Men om *c* eller *e* skulle vara 286 så skulle summan bli mindre än 2017, maximalt 288+287+286+287+288+289+290= 2015.

Alternativ lösning: $2017 = 6 \cdot 288 + 289$. Om ett av talen ska vara 286, så måste även 287 finnas med. Om vi byter ut två stycken 288:or mot 286 och 287, så måste vi även byta ut två stycken 288:or mot 289 och 290. Då är talen som ingår i summan 286, 287, 288, 288, 289, 289 och 290. Eftersom det bara finns ett tal 286 så måste det talet stå först eller sist.

18. D: 31
$882 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Då kan barnens åldrar vara 1, 7, 9 och 14. Summan blir 31.

19. E: $\frac{1}{3}$
P(negativ produkt) = P(första tärningen visar negativt, andra visar positivt) + P(första tärningen visar positivt, andra visar negativt)$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

20. C: 7
Talet är $ababab = a \cdot 100\,000 + b \cdot 10\,000 + a \cdot 1000 + b \cdot 100 + a \cdot 10 + b =$
$a \cdot 101010 + b \cdot 10101 = 10101(10a + b) = 7 \cdot 1443(10a + b)$

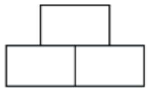
21. E: 13
Den högsta siffran kan vara 7 och då är koden 7777777. Är den högsta siffran 6, så måste det finnas sex stycken 6:or och en 1:a. Det finns två möjligheter att skriva den koden, 6666661 eller 1666666. Är högsta siffran 5, finns det fem 5:or och två 2:or, 5555522 eller 225555. Är högsta siffran 4 så har vi fyra 4:or. De övriga tre siffrorna, kan antingen vara tre 3:or eller två 2:or och en 1:a. Vi får 4444333, 3334444, 4444221, 4444122, 1224444, 2214444, 1444422 eller 2244441. Totalt finns det13 möjliga koder.

Alternativ lösning: Sortera koder efter antalet olika siffror:
- alla lika, ett sätt: 7777777
- två olika, 6 sätt: 1666666, 2255555, 3334444, 4444333, 5555522, 6666661
- tre olika, 6 sätt: 1224444, 1444422, 2214444, 2244441, 4444122, 4444221

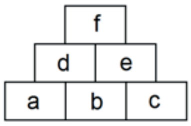
Fler än tre olika kan de inte vara.

22 B: 14

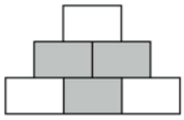
När vi har tre heltal a, b och c sådana att a+b= c, så är minst ett av dem jämnt. Det betyder att det finns minst ett jämnt tal i en sådan här liten talpyramid.



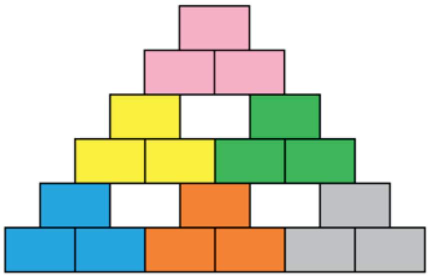
Och i en sådan här, lite större pyramid gäller: d= a+b, e= b+c och f= d+e= a+b+b+c= a+c +2b. När både a och c är udda så är f jämnt.



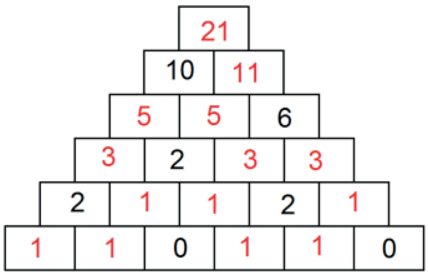
Något av talen a, c och f är jämnt vilket betyder att det skrivs ett jämnt tal i minst en vit ruta i en sådan här pyramid (eller del av en pyramid):



I hela figuren bestående av 21 rutor som vi färglägger så här måste minst en ruta i varje färg inklusive vit innehålla ett jämnt tal. Minst 7 jämna, alltså inte fler än 14 udda.



I följande exempel ser vi att det går att fylla i pyramiden så att 14 av talen blir udda. (Udda tal skrivna här med röd färg.) Som mest kan Paul skriva 14 udda tal i talpyramiden.



23. B: 80 %

Totalvikten av alla vikter är 621 gram, vilket ger att vikterna på den tyngsta sidan måste variera mellan 311 gram och 315 gram. Vi väljer tre vikter och placerar ut på ena sidan. Det kan vi göra på 20 sätt. Vi har två möjligheter för val av sida så totalt antal möjligheter att placera ut vikterna är 20/2 = 10. Om inte 106 står på tyngsta sidan så finns det bara 2 möjligheter, nämligen 105 + 104 + 103 = 312 och 105 + 104 + 102 = 311.

Sannolikheten är $\frac{10-2}{10} = 80\%$.

Tabell över viktkombinationerna på tyngsta sidan:

Vikt 1	Vikt 2	Vikt 3	Vikt 4
106	105	101	312
106	104	103	313
106	104	102	312
106	104	101	311
106	103	102	311
105	104	103	312
105	104	102	311

106	105	104	315
106	105	103	314
106	105	102	313
106	105	101	312
106	104	103	313
106	104	102	312
106	104	101	311
106	103	102	311
105	104	103	312
105	104	102	311

Alternativ lösning: Det kan vara enklare att beräkna sannolikheten för att den hamnar på den lättare sidan. Då måste summan av de som står på samma sida som vikten 106 vara mindre än 205 $(= (101 + 102 + 103 + 104 + 105 + 106) / 2 - 106)$. Det finns bara två sådana kombinationer, $101 + 102$ och $101 + 103$. 2 av 10 möjliga kombinationer av 2 vikter bland 5. 20 % på lättare sidan ger 80 % på den tyngre sidan.

24. D: 6

Låt r vara cirkelns radie. Sätt $PA = x$. Då är $PM = x + r$ och $PB = x + 6$. Triangel PBM är rätvinklig. Pythagoras sats ger

$$r^2 + (x+6)^2 = (x+r)^2$$

$$r^2 + x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2xr + r^2$$

$$2xr = 12x + 36$$

$$xr = 6x + 18$$

$$xr - 6x = 18$$

$$x(r-6) = 18$$

$$x = \frac{18}{r-6}, r > 6$$

Eftersom x är heltal finns följande möjliga kombinationer:

r	7	8	9	12	15	24
x	18	9	6	3	2	1

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1		B				3
2					E	3
3		B				3
4			C			3
5			C			3
6					E	3
7			C			3
8	A					3
9			C			4
10					E	4
11				D		4
12			C			4
13		B				4
14		B				4
15	A					4
16				D		4
17	A					5
18				D		5
19					E	5
20			C			5
21					E	5
22		B				5
23		B				5
24				D		5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

För Kurs 2 och 3.
Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 29 april.

Antal deltagande elever

Kurs	
2	
3	

För in namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

Kurs	Namn	Poäng
2		
3		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Kurs	
	2	3
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		

Redovisningsblankett B

För Kurs 2 & 3

Uppgift nr	Antal elever med rätt svar på uppgiften	
	Kurs 2	Kurs 3
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		