Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Arbeta vidare med Cadet 2017

Årets Känguruproblem kan direkt kopplas till innehållet i kursplanerna för åk 9 samt för Ma1. Få av problemen är direkta rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Flertalet av dem kan kopplas till det centrala *innehållet* problemlösning men även till *förmågan* problemlösning som ska utvecklas. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Vill ni inte arbeta igenom tävlingens samtliga problem kan exempelvis några problem väljas ut som har något gemensamt från de olika tävlingsklasserna. De kan också kompletteras med liknande problem från tidigare års tävlingar. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med samtliga problem bör förmågorna resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem.* Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Att läsa

Eriksson, K. & Rydh, S. (2003). *Nöjesmatematik*. Stockholm: Liber.

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2010). *Matematiska äventyr*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2016). *Frågor och fascinationer*. NCM, Göteborgs universitet.

Vaderlind, P. (2005). *Klassisk och modern nöjesmatematik*. Stockholm: Svenska förlaget.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar, äldre än ett år, finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på *Nämnaren på nätet*, ncm.gu.se/namnaren. Du finner dem via *artikelregistret*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken Månadens problem.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal larportalen.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.

Taluppfattning

Cadet 1 (C1)
Den här uppgiften kan ligga till grund för arbete med tal. Man kan fokusera på summan av ett antal olika positiva heltal, t ex triangeltalen. Dessa summor kan dyka upp i olika problemformuleringar, se t ex problem E2001 nr 10.

Andra problem med fokus på tal: C2011 nr 6, C2012 nr 14, B2013 nr 16 och nr 17, J2013 nr 9, C2014 nr 11, C2002 nr 5, GyC2009 nr 8.

C8
Diskutera olika lösningsmetoder på problemet. Jämför även årets Junior nr 12. Ändra beloppen och ändra antal syskon för att se hur lösningen ändras.

Liknande problem: J2015 nr 4, C2001 nr 14.

C9
Rita en tallinje. Eftersom det bara frågas efter delen av pinnens längd kan vi låta den ha 1 längdenhet (1 l e). Låt skalbaggens startposition vara 0 och nyckelpigans startposition 1. Dela in tallinjen mellan 0 och 1 i lämpliga bråkdelar. Markera skalbaggens respektive nyckelpigans position när de har förflyttat sig 2/3 resp 3/4 l e. Diskutera hur man bestämmer avståndet mellan skalbaggen och nyckelpigan. Ändra till andra dellängder och låt eleverna lösa problemet.

Liknande problem: GyC2006 nr 15, GyC2009 nr 13, C2013 nr 1, J2007 nr 5.

C10
Låt eleverna även lösa Junior nr 8. Diskutera de olika andelarna vuxna, barn, flickor och pojkar. Be eleverna ge förslag på publikens storlek och låt dem beräkna antal vuxna, flickor och pojkar. Lägg även till t ex att en tredjedel av den vuxna publiken är män. Hur stor del av hela publiken är då av kvinnligt kön?

Liknande problem: C2012 nr 18, GyC2007 nr 15, J2006 nr 7, GyC2005 nr 9.

C12
Diskutera begreppet *delbarhet* och delbarhetsregler.

Liknande problem på delbarhet: C2015 nr 5, C2014 nr 21, C2011 nr 5.

Geometri och rumsuppfattning

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t ex att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar *ser* lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

C3
Diskutera trianglars egenskaper. Be eleverna namnge och beskriva olika trianglar. Skriv ut bilden till problemet och låt eleverna arbeta konkret med att byta plats på vita och mörka bitar. Diskutera vad likformighet innebär. Skugga delar av likbenta/liksidiga trianglar och be eleverna bestämma hur stor del som är skuggad.

Äldre problem som behandlar trianglars egenskaper: C2016 nr 18, J2010 nr 19, J2016 nr 12, C2015 nr 8, C2013 nr 2, C2012 nr 13.

C4

Be eleverna förklara begrepp som *rektangel, parallell, omkrets* och *area*. Flytta runt den inre rektangeln. Vad händer med skillnaden i omkrets? Diskutera skillnaden i area. Vilket är förhållandet mellan den mindre rektangelns area och den större rektangelns area?

Liknande problem: C2016 nr 9, C2015 nr 2 och nr 14, C2010 nr 10, C2005 nr 7, C2003 nr 18, E2002 nr 6, J2014 nr 2, GyC2007 nr 11.

C5

Att vika papper och klippa bort delar för att få fina mönster när pappret vecklas ut är välbekant. Vi kan dels vika pappret, göra ett eller fler klipp och fundera på hur mönstret kommer se ut. Den typen av problem har förekommit tidigare, t ex B2001 nr 2, C2003 nr 1, B2016 nr 16 och C2012 nr 7. Vill man arbeta mer med denna typ av problem kan S2015 nr 6 vara en utmaning. Låt eleverna fundera över antal hål och diskutera med varandra. Som avslutning kan de utföra vikningen och klippningen.

I det här problemet ska vi istället fundera över hur pappret är vikt. Låt eleverna även pröva uppgifterna från årets tävling Ecolier nr 12 och Benjamin nr 7. I B2004 nr 10 vet vi hur pappret är vikt men frågan är hur många hål det blir. Här skulle man kunna be eleverna rita ut hålen på det utvikta pappret. Man kan också göra om S2015 nr 6 och ge eleverna ett utvikt papper med 9 hål och be dem fundera över vikningen.

C7

Diskutera olika lösningsmetoder. Hur stor area har de vita områdena? Hur stor del av figuren utgör de vita områdena? Bestäm förhållandet mellan de vita areorna och de skuggade areorna. Fyll på med ytterligare två hjärtan med areorna 25 respektive 36 cm^2. Hur stor area har nu de skuggade områdena tillsammans? Ett liknande problem med annan form är årets Junior nr 3. Ett problem som påminner om detta är årets Benjamin nr 15.

Liknande problem: J2004 nr 7, J2015 nr 22, C2013 nr 2, C2011 nr 4, C2011 nr 24, GyC2009 nr 18 och nr 24, J2006 nr 4, S2006 nr 6.

C11

Det här problemet är ett bra problem som skulle kunna användas tillsammans med uppgift 3. Hur mycket längre är den svarta linjen än den streckade? Gör gärna liknande problem med liksidiga trianglar och kvadrater, som exempel kan nämnas GyC2007 nr 17.

C15

Ännu ett problem på temat skuggat område. Låt eleverna undersöka hur arean av det grå området ändras om triangelns bas är 2 cm, 3 cm osv. Skriv ett generellt uttryck för arean av det grå området om basen är b cm, $0 < b < 8$. Diskutera begreppet *kongruenta* trianglar.

Liknande problem: C2016 nr 18, J2015 nr 14, C2012 nr 17, B2011 nr 21, B2010 nr 16.

C18

Diskutera i klassen om vinkelsumman i en triangel. Låt eleverna konstruera trianglar, spetsvinkliga, rätvinkliga och trubbvinkliga och beräkna summan av största och minsta vinkel. Vilket värde har då den tredje vinkeln? Låt eleverna även undersöka sambanden mellan sidornas längder och motstående vinklars storlek. Låt eleverna formulera sambandet med ord.

C20
Diskutera vilka geometriska former som duken är uppbyggd av. Hur stor del av duken är svart? Öva i klassen på omvandlingar delar/procent. Gör beräkningar med givna mått och även med en generell lösning. Ge förslag på hur duken skulle se ut om 16 % av duken är svart.

C24
Låt eleverna arbeta med problemet och formulera tydliga lösningar. Vilka slutsatser kan man dra utifrån den givna informationen? Pröva även nr 9 på årets Junior och nr 6 på årets Student.

Liknande uppgifter: C2015 nr 22, C2002 nr 23, C2003 nr 23.

Algebra

Det finns alltid flera metoder att lösa uppgifterna på. Många av dem är formulerade så att man med hjälp av svarsalternativen kan komma fram till svaret. Genom att arbeta vidare med problemen finns då chansen att diskutera generella lösningar där man låter eleverna arbeta med algebra. I flera av geometriproblemen bör man i efterarbetet komma in på algebra.

C14
Försök få eleverna att formulera en algebraisk lösning genom att införa lämpliga variabler och ställa upp ekvationer. Förklara varför ekvationerna bildar ett ekvationssystem och diskutera lösningsmetoder.

Liknande problem: C2012 nr 10, S2012 nr 2, B2004 nr 17.

C17
Diskutera lösningsmetoder. Låt de givna talen vara *a* och *b*. Skriv upp ett uttryck i *a* och *b* för summan av samtliga tal i kvadraten.

Liknande problem: B2014 nr 18, C2014 nr 15, C2015 nr 18, J2015 nr 19.

Problemlösning

C2
Lös även årets Junior nr 5. Gör om problemet med tre personer och be eleverna bestämma antal personer i ringen.

Liknande problem: B2016 nr 18, E2004 nr 15, E2007 nr 17.

C16
Låt eleverna lösa detta problem och även Junior nr 14. Jämför lösningsmetoder. Diskutera kombinatoriska resonemang.

C18
Det här problemet finns i ytterligare en variant i år, nämligen Benjamin 21. Hur påverkar antal känguru antal hopp? Lös dem parallellt och diskutera lösnings- och redovisningsmetoder. Vill man börja med en enklare variant för att bygga upp förståelsen går det bra att plocka fram Milou 2010 nr 6.

Se även *Strävan* 1A1B Grodhopp

C21

Diskutera begreppet *talföljd* med eleverna. Be dem ge exempel på talföljder. Beskriv positiva heltal som exempel på *aritmetisk* talföljd. Diskutera andra aritmetiska talföljder och vad som kännetecknar dem. Skriv formler för det *n*:te talet i följden. Följden 1, 2, 4, 8, … där varje nytt tal är två gånger det föregående är exempel på en *geometrisk* talföljd. Be eleverna ge exempel på andra geometriska talföljder. Formulera med ord och med symboler det *n*:te talet.

Låt eleverna skriva upp talen i den i uppgiften givna följden. Beskriv mönstret med ord.

Liknande problem: C2013 nr 22, J2010 nr 23 samt årets Student nr 21.

C22

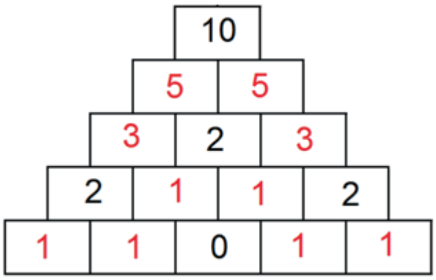
Diskutera olika lösningsmetoder som problemet kan medföra. Vi har för varje löpare tre storheter att laborera med: sträcka, hastighet och tid. Vilken av dessa är lika när de möts? Rita figur för att konkretisera problemet.

Liknande problem: C2013 nr 14, C2001 nr 17, S2009 nr 19.

C23

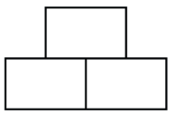
Detta problem finns i ytterligare två varianter, B24 och J22. Diskutera prioriteringsreglerna. När vi har tre heltal a, b och c sådana att $a + b = c$, så kan inte alla tre vara udda. Högst två är udda. Det betyder att i ett segment med tre rutor finns udda tal i som mest två av rutorna.

För att få många udda tal i hela talpyramiden skriver vi flera udda tal i den nedersta raden med ett eller två jämna tal, helst mellan de udda, så att det står olika sorters tal i rutor bredvid varandra och på det sättet deras summor i den andra raden blir udda. Vi kanske får upprepa försöket för att lyckas att få in 10 udda tal i talpyramiden. T.ex. så här:

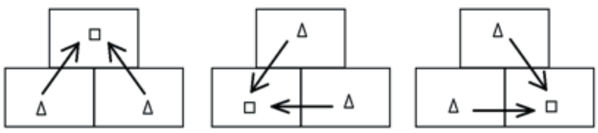


Då vet vi att 10 är ett möjligt antal udda tal i en sådan pyramid. Det svåra är att ta reda på om det går att få in fler än 10 udda tal i pyramiden.

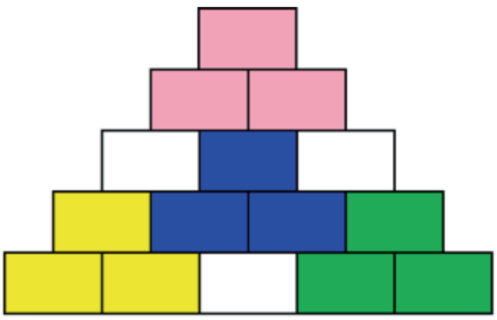
Summan av två udda tal är jämn. Av tre naturliga tal a, b och c sådana att a+b= c, måste alltså minst ett vara jämnt. Är varken a eller b jämnt så är c jämnt . Det gör att det finns minst ett jämnt tal i sådan här liten talpyramid.



Om vi vet att två av talen är udda, så kan vi dra slutsatsen att det tredje är jämnt. Slutledningen kan gå i tre riktningar: (▯ står för jämnt och Δ för udda). Om 2 är udda, så är det tredje jämnt.

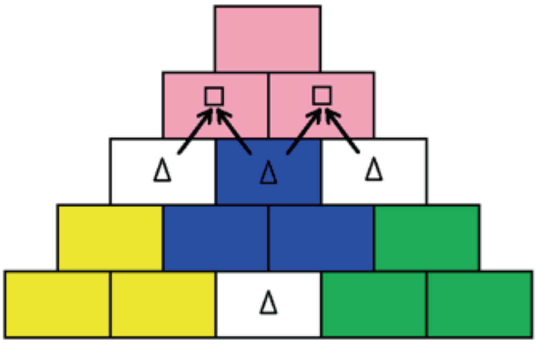


Nu försöker vi få in fler än 10 udda tal i de 15 rutor i pyramiden. Då får alltså högst 4 av talen vara jämna. Vi färglägger pyramiden så här:

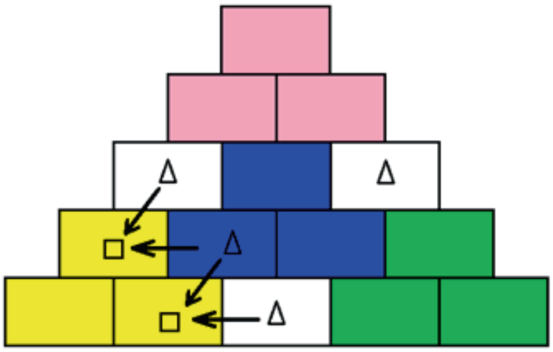


Minst en ruta i varje färg (utom vit) måste innehålla ett jämnt tal, det vill säga minst fyra jämna tal sammanlagt. Då får inga fler tal i pyramiden vara jämna, alla tal i vita rutor ska vara udda och exakt ett tal ska vara jämnt och exakt två udda i varje av de övriga färger.

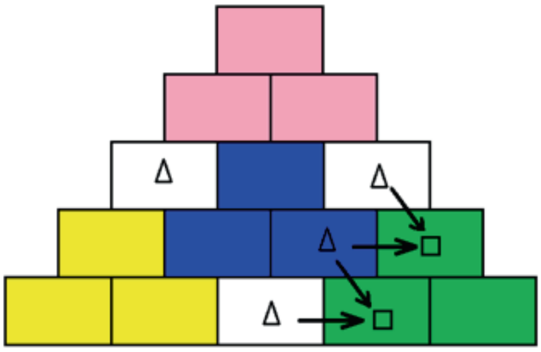
Vi undersöker i vilka av de blåa rutorna udda tal kan placeras. Vi markerar med Δ de rutor som vi vet eller väljer att de ska innehålla udda tal och med ▫ de rutor som i så fall ska innehålla jämna tal.



Det får inte stå något udda tal i den översta blåa rutan eftersom då skulle minst två av talen (faktiskt alla tre) i de rosa rutorna bli jämna.



Inte heller i den blåa rutan till vänster eftersom då skulle minst två av talen (faktiskt alla tre) i de gula rutorna bli jämna.



Och inte heller till höger eftersom då skulle minst två av talen i de gröna rutorna bli jämna.

Alltså inga udda tal i blåa rutor trots att exakt ett skulle vara jämnt och två udda. Det är alltså omöjligt att få in fler än 10 udda tal i pyramiden. Det största antalet udda tal som kan skrivas i talpyramiden är 10.