Kängurun – Matematikens hopp

Ecolier 2016, svar och lösningar

Här följer korta svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Efter redovisningssidorna i detta dokument följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problemen. Där finns också ytterligare kommentarer till lösningarna i vissa fall. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på nätet.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen ncm.gu.se/kanguru/
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat *senast 29 april*.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat, i varje årskurs, kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Du kan sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever i samma åldersgrupp och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och många lärare frågar efter sammanställningen med lösningsfrekvenser. Förhoppningsvis ger en översikt av klassens resultat även ett bra underlag för ert vidare arbete.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner att lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen om de fick tid att arbeta med dem.

Nominera till Mikael Passares stipendium
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikel Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev (Cadet, Junior eller Student) att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla elevens namn, skola och årskurs, tävlingsklass, resultat på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom ska det finnas en motivering till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en ovanligt god prestation i tävlingen, oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer eller annat hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är hjälpsam och visar gott kamratskap. Ett underlag att använda för nomineringen finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru.

Nomineringen skickas *senast 29 april* till:

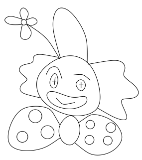
Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit – Ecolier

1: E Ernst — $5+4=9$. De andra har slagit 7, 6, 5 och 8.

2: A 24 — $20+4=24$

3: D



Fel i de andra alternativen:

A: Endast två prickar på rosetten, rosetten är inte speglad.
B: Trianglar på rosetten, huvudet är inte speglat.
C: Blomman är inte speglad
E: Blomman saknas och Pipo är inte alls speglad.

4: B 3 — Sex barn delar på äpplena. $6 \cdot 1/2=3$

5: A triangel — Figuren måste ha ett av rektangelns hörn plus två som bildas där gardinkanten skär figuren.

6: C cirklarna är dubbelt så många som trianglarna
Det finns 4 cirklar och 2 trianglar. De andra alternativen stämmer inte.

7: B 16 kg — $4 \cdot 4$ kg $= 16$ kg. Till varje kg torkad svamp går det åt 4 kg färsk.

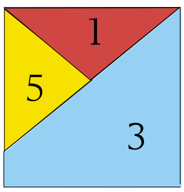
8: C 30 cm — Omkretsen påverkas inte, den sammanlagda längden av sidorna är fortfarande 30 cm.

9: B 2025 — $2+0+2+5=9$. Årtalet börjar med 20 så de två andra siffrorna ska ge summan 7. De kan vara $0+7$, $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$ och $7+0$. 2007 har redan varit, 2016 är det nu så nästa år blir 2025.

10: B 4 — Musen har i första rummet två möjliga vägar, i nästa – oberoende av vilken han väljer – en möjlig väg, i det följande två vägar ut, därefter en och från sista rummet finns endast en väg ut: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1=4$.

11: D 3 — Kvadraten ligger under triangeln i den första, fjärde och femte högen.

12: A 1, 3 och 5



13: C 4 — I rutan överst i mitten måste det stå 3 och därför 2 i övre högra rutan. Summan av de skuggade rutorna är därför $(1+2+3)-2=4$.

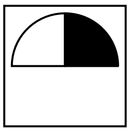
14: C 11 och 4 — Varje kort har summan 16, vilket ger $16-5=11$ och $16-12=4$. $32-17=15$. $11+4$ är det enda alternativ som är 15.

15: C 18 — En kyckling, ett får och en get har tillsammans 10 ben. Det finns alltså 18 grupper med djur, $18 \cdot 10=180$

16: D 5 — Om Fariba lägger mynt med början i ena kanten blir tre rutor i andra kanten tomma. De sex yttersta rutorna, tre i vardera sidan, kan vi alltså inte vara säkra på att hon använder. Däremot måste Fariba alltid använda de mittersta fem rutorna.
Det finns flera sätt att placera mynten, men dessa fem rutor måste användas. Om någon av de fem mittersta rutorna ska vara tom finns det inte 8 rutor i rad att lägga mynt i.

17: C 6 — En hund har 3 fler ben än nosar. Sex hundar har $6 \cdot 3 = 18$ fler ben än nosar.

18: D



Alternati D är den enda bild som är identisk med bilden på kortet.
De andra är spegelbilder.

19: C 1234Luuap4321

Endast C uppfyller alla villkor: siffror på de tre sista platserna; alla bokstäver i Paul finns med, Luap; och *högst* tre versaler, ett L.
De andra alternativen uppfyller inte villkoren:
Alternativ A har fyra versaler, alternativ B, D och E har inte siffror på alla de tre sista positionerna.

20: B 27 — Om vi drar bort 3, som är det antal år som Leo är äldre, ska den sammanlagda åldern gå att dela med 4. Endast med alternativet 27 uppfylls detta: $27 - 3 = 24$.
$24/4 = 6$, så Tim, Tom och Jim fyller 6 år och Leo fyller 9 år.

21: B mellan skål Q och skål R

Cirkeln är tyngre än triangeln, alltså är en cirkel och en triangel tyngre än två trianglar men lättare än två cirklar. I alla skålar finns en kvadrat som vi kan bortse från.

22: C 1917 — Det tal som ändras minskar med 99: $201 - 102 = 99$. Summan måste alltså minska med 99.

23: E 10 — Malte får bitar av längden 18 och 9 i första delningen, därefter 12 och 6 eller 6 och 3 och slutligen 8 och 4, 4 och 2 eller 2 och 1.
De olika längder som staplarna kan få är alltså 12, 8, 6, 4, 3, 2 och 1.

24: D 50 — Eftersom båda träden har samma förhållande mellan äpplen och päron, det är dubbelt så många päron som äpplen, måste det vara 50 päron.
Det kan vi få med exempelvis 7 träd av ena sorten och 1 av den andra:
$7 \cdot 6$ päron + $7 \cdot 3$ äpplen + 8 päron + 4 äpplen = 50 päron + 25 äpplen.

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1					E	3
2	A					3
3				D		3
4		B				3
5	A					3
6			C			3
7		B				3
8			C			3
9		B				4
10		B				4
11				D		4
12	A					4
13			C			4
14			C			4
15			C			4
16				D		4
17			C			5
18				D		5
19			C			5
20		B				5
21		B				5
22			C			5
23					E	5
24				D		5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

Redovisning av resultat sker på webbadress ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast den 29 april.

Namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
3		
4		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se

Antal elever med	åk 3	åk 4
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För uppföljning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

	Antal elever med rätt svar på uppgiften	
Uppgift nr	åk 3	åk 4
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Arbeta vidare med Ecolier

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna arbeta med lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar:

– Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?
– Är lösningarna tydliga?
– Är resonemanget korrekt?
– Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?”

Elever behöver få diskutera både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

I samband med problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under några rubriker *Tal*, *Geometri* och *Problemlösning och logiska resonemang*. Naturligtvis kan flera av problemen passa under flera rubriker.

Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några tidigare liknande problem och problem som som kan användas i samband med arbetet med årets. Det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Några grundläggande aspekter som barn i denna ålder möter är positionssytemet, udda och jämna tal, räknesättens innebörd, tals uppdelning och enklare faktorisering. Dessutom brukar det ofta i Kängurun finnas problem som handlar om grundläggande bråk och siffersummor. Problemen utmanar också barnens strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra därför eleverna att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

1: I den här åldern känner nog alla elever igen tärningsmönstren och kan använda dem utan att räkna prickarna. Enkel addition eller parvisa jämförelser ger svaret. Vilken metod använder eleverna?

Uppgiften kan användas för att eleverna ska få diskutera tal utan att ha en exakt beräkning att utgå från. Låt eleverna försöka motivera rätt svar utan att använda den beräknade summan i argumenten, endast jämförelser.

Ersätt prickarna med tal, och gör motsvarande. Diskutera smarta strategier för jämförelser.

Undersök summor på tärningar:
– Vilka olika summor är möjliga att få? Vilken är den högsta och lägsta?
– Vad är det högst sannolikhet att få, om man slår en tärning?
– Vilken summa är det högst sannolikhet att få, om man slår två tärningar?

Att läsa:

Per Berggren och Maria Lindroth: Uppslaget *En sannolik hästkapplöpning*. Nämnaren 1998:4.
Per Nilsson: *Summaspelet – ett spel för lärande i sannolikhet*. Nämnaren 2009:3.

Tidigare problem: Ecolier 2009:5; Ecolier 2011:14. En mer utmanande uppgift: Benjamin2010:14

2: En enkel beräkning ger svaret. Vad händer om vi lyfter upp plustecknet: $17+3+20-16$. Byt plats på $17+3$ och $20-16$. Byt tecken i de första uttrycken: $17-3$, $20+16$.

Låt eleverna beskriva beräkningarna med hjälp av konkret material och med en situation. Varför kan vi byta plats på $17+3$ och $20-16$ men inte byta plats på tecknen?

Uppgiften leder in på räknelagar och prioriteringsregler:
Exemplifiera den *kommutativa lagen* för addition: $a+b=b+a$ och för multiplikation $a \cdot b=b \cdot a$, med exempel och låt eleverna inse och uttrycka dem generellt med egna ord. Visa sedan hur vi uttrycker det symboliskt. Gör på liknande sätt med den *associativa lagen*: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$

Undersök t ex $12+4 \cdot 4$. Spelar det någon roll i vilken ordning vi utför beräkningen? Låt eleverna även här beskriva med konkret material och med en situation. Vilken skillnad är det mellan $(12+4) \cdot 4$ och $12+(4 \cdot 4)$? Berätta varför vi använder parenteser om prioriteringsregeln. Låt eleverna konstruera olika situationer som kamraterna får beskriva med symboler.

Tidigare problem: E 2003:5; E2007:8; E2013:1; E2014:6; E2015:1; B2002:4; B2005:15; B2013:1;.

4: Uppgiften passar bra för arbete med matematisk text och för undervisning om hur vi översätter skriven text, eller muntliga berättelser, till matematiskt symbolspråk.

– Hur många barn är det som delar på äpplena? Hur vet vi det?
– Hur många barn hade äpplena i de andra alternativen räckt till?
– Hur skriver vi ”2 och ett halvt” med bara siffror?
– Hur skriver vi att 6 (barn) delar på 3 äpplen? $\frac{3}{6}$
– Hur skriver vi ”3 äpplen är hur många halvor?” $\frac{3}{\frac{1}{2}}$

Gå igenom alla alternativ på samma sätt och jämför med det eleverna tidigare kommit fram till.

Här är ett konkret exempel på delnings- och innehållsdivision, dessutom med divisionen med bråk. I det här sammanhanget har det en konkret innebörd, vilket gör det möjligt att hantera redan i dessa åldrar.

Gör flera liknande exempel och låt eleverna både berätta och uttrycka sig med symboler.

Tidigare problem: E2004:17; E2009:3; E2012:4.

7: *Proportionalitet* kan vara utmanande för eleverna. Beskriv *förhållande* mellan torkad och färsk svamp med ord, bild och symboler. Låt också eleverna beskriva förhållandet. Gå igenom hur mycket torkad svamp Petrus får av den färska svampen i de andra svarsalternativen. Vänd på frågan och utgå från att det är mängden torkad svamp – hur mycket färsk svamp behöver han?

Konstruera egna liknande problem.

Undersök också andra förhållanden: 1:2, 1:3, 1:5, 1:10. Jämför med erfarenheter från vardagen och med skalan på kartor.

Tidigare problem: E2001:3; B2007:4; B2012:13.

9: Diskutera begreppet *siffersumma*. En del elever har säkert kunnat lösa uppgiften utan att tidigare ha stött på termen siffersumma. Vilken siffersumma har de andra alternativen, årtalet då eleverna föddes, andra årtal.

Ordet är egentligen inte så bra, då summan beräknas av tal om vi ska vara noggranna, men siffersumma är en vedertagen term. Gå igenom skillnaden mellan siffra och tal. Låt eleverna ange se största och minsta ensiffriga, tvåsiffriga, tresiffriga etc talet. Se efter mönstret.

I en tidigare tävling var en uppgift: *Vilken är skillnaden mellan det minsta femsiffriga talet och det största fyrsiffriga talet?* Gör flera sådana exempel och låt eleverna resonera sig fram till en generell lösning. Låt dem se kopplingen mellan positionssystemet och en trippmätare (eller annat räkneverk i verkligheten).

Diskutera strategier i uppgiften. Vilka årtal kan komma ifråga. Gör en systematiskt ordnad lista över årtal med siffersumman 9.

Med hjälp av siffersumman kan vi avgöra om ett tal är delbart med 3. Undersök många tal för att göra det troligt att om siffersumman är delbar med 3 är också talet delbart med 3. Andra delbarhetsregler som elever i den här åldern kan förstå och förklara är delbarhet med 2, 5 och 10.

Tidigare problem: E2001:17; E2007:6; E2015:6; B2003:12.

14: Ytterligare ett problem där texten kan behöva analyseras. Vilken information är uttryckt i texten och vad kan vi sluta oss till av det? Vilka slutsatser kan vi dra om de dolda talen?

Uttryck olika sätt att resonemangen både muntligt och symboliskt, t ex:

$32-(5+12)=15\ldots\ldots$

$\frac{32}{2}=16\ldots\ldots$

$x+5=16, y+12=16$

$5+x=12+y$

$x+y=32-17$

Låt eleverna konstruera likadana problem med andra tal och eventuellt med andra räknesätt.

Tidigare problem: E2008:17.

17: Jämför detta problem med nr 15. Vilka likheter finns? Skillnader?

Vilka olika tal är möjliga i frågan? Varför?

Jämför med nr 7 och diskutera likheter. Även här handlar det alltså om ett proportionellt samband.

Tidigare problem: E2003:16; B2009:10.

20: Gör en tabell över deras åldrar, från det att trillingarna föds:
Kan eleverna se något mönster?

0 + 0 + 0 + (0 + 3) = 3
1 + 1 + 1 + (1 + 3) = 7
2 + 2 + 2 + (2 + 3) = 11
....

Ställ frågor i anslutning till tabellen:
– Vad betyder (2 + 3)?
– Varför ökar den sammanlagda ålder med 4?
– Jämför med talen i svarsalternativen – vilka kan dyka upp i tabellen?
– Om vi tar bort 3, dvs de år som Leo är äldre, vilka tal får vi då?

Hur kan vi uttrycka brödernas sammanlagda ålder generellt? Låt eleverna beskriva sina resonemang och hjälps åt att formulera dessa med symboler.

Låt eleverna konstruera liknande problem. Variera antalet syskon och åldersskillnaden.

Tidigare problem: E2004:2; E2010:15; B2001:7; B2013:4; B2016:15.

22: Vilken information i uppgiften är överflödig? Varför?

Ser eleverna att skillnaden mellan 201 och 102 är 99, och kan de utnyttja detta på ett effektivt sätt? Låt eleverna upptäcka hur enkelt uppgiften kan lösas, när man ser hur den är konstruerad. Gör fler exempel på sådana enkla subtraktioner och låt eleverna utnyttja dessa för snabba beräkningar.

Tidigare problem: E2004:16; 2012:13.

23: Att ena stapeln ska vara dubbelt så lång som den andra innebär att vi måste dela med 3. Visa och diskutera detta samband. Be eleverna att med ord förklara.

Undersök ev problemet konkret och uppmana eleverna att pröva alla möjligheter.

Gör en tabell som håller ordning på uppdelningarna. Vilka olika längder på stavar kan Sara få?

Hur skulle stapeln ha sett ut för att det skulle vara möjligt att få 10 klossar?

Tidigare problem: E2009:17.

Geometri

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan.

3: Förutom att kunna vända bilden "i huvudet" kräver uppgiften att man är uppmärksam på detaljer. Gå igenom bilderna och uteslut de felaktiga alternativen.

Diskutera hur en spegelbild skiljer sig från ett fotografi.

Arbeta med spegelsymmetrier, spegling i en linje. Spegla längs en lodrät linje och längs en vågrät. Låt eleverna också spegla i ett koordinatsystem, så att de får tre spegelbilder. Låt dem också beskriva speglingen med ord.

Tidigare problem: E2001:1 och 9; E2014:4; B2010:18.

5: Uppgiften går att lösa genom att man ritar den del som döljs bakom gardinen. Man kan också resonera om antalet hörn. Vi ser tre av rektangelns hörn, så ett måste vara dolt. Där gardinens linje korsar rektangeln bildas två nya hörn. Samtal om formerna ger rika möjligheter att utveckla språket och att bygga upp förståelse för de geometriska objektens egenskaper.

– Vilken form har gardinen?
– Vad vet vi om rektangelns dolda hörn? Hur vet vi det?
– Vad vet vi om den triangel som bildas?
– Hur kan vi veta att det inte är en liksidig triangel?

Gör fler exempel som stimulerar lösningar utifrån geometriska resonemang.

Tidigare problem: E2008:10; E2009:6; E2013:3 och 11; B2011:5.

6: Uppgiften passar för grundligt arbete med texten och ordens exakta betydelse. Här finns grundläggande geometriska begrepp men också andra centrala begrepp: lika många, fler, färre, dubbelt.

Byt plats på figurerna i alternativen och jämför.

Formulera alternativen ”omvända” och justera så att innebörden i meningen blir densamma.

Låt eleverna konstruera liknande uppgifter till varandra.

Tidigare problem: E2004:2; E2009:2; E2011:5; E2014:2.

8: För att utmana elevernas föreställning (många tror nog att omkretsen har blivit mindre) kan man formulera om frågan och säga att omkretsen på de tre bortklippta rektanglarna är 30 cm. Då bör det bli uppenbart att det inte handlar om att subtrahera omkretsen. Resonera gemensamt om varför omkretsen är oförändrad.

Varför behöver vi inte markera i bilden att vinklarna i den inre figuren är räta?

Hur kan vi klippa bort delar från rektangeln och få en större omkrets?

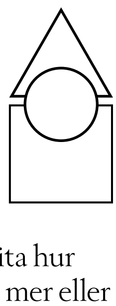
Hur förhåller sig arean i den ursprungliga rektangeln till arean i den inre figuren?

Eleverna behöver få upprepade möjligheter att undersöka area och omkrets och resonera om hur de förändras av olika operationer. Att omkretsen i två figurer är densamma betyder inte att arean också är densamma.

Tidigare problem: E201:11, E2002:6; E2004:3; E2006:9; E2008:16; E2009:13; B2013:14; B2015:16; B2016:19.

11: Även här handlar det om att känna igen geometriska former. Man behöver också kunna tolka bilden i tre dimensioner. Diskutera med eleverna hur de ser vilka figurer som ligger över och under varandra. I vilken ordning har de fem barnen lagt sina figurer? Låt eleverna konstruera liknande bilder efter muntliga och skriftliga instruktioner.

Hur kan man tolka ordet *under* i det här sammanhanget? Om bilden hade sett ut så här hade det inte varit helt klart. Då måste vi bestämma om vi ska betrakta ”verkligheten” eller bilden av verkligheten.



Att kunna föreställa sig hur något ser ut från ett annat perspektiv är nödvändigt för att förstå kartor och ritningar, tex. Ett förslag: Ta ett fotografi eller en bild från en tidning som visar ett antal personer eller föremål. Låt eleverna fundera över och sedan rita hur motivet skulle se ut om det var fångat bakifrån eller från sidan. Denna uppgift kan göras mer eller mindre komplicerad och kan därför anpassas efter barnen.

Att läsa:

Karin Wallby: *Matematiken i bilden eller bilden i matematiken*. Nämnaren1996:2.

Tidigare problem: E2004:7; E2009:2; B2008:4.

12: Vad kallar vi de former som är illustrerade i problemet? Många barn uppfattar kanske att figur 3 saknar namn. Det är en fyrhörning och en parallelltrapets.

Undersök fyrhörningarna i bilden och diskutera vilka egenskaper de har:
– Vad är gemensamt för alla? (Fyra sidor och minst ett par parallella sidor.)
– Vad är gemensamt för 2 och 4? (Två par parallella lika långa sidor och räta vinklar.)

Gå igenom definitioner på parallelltrapets, rektangel och kvadrat. Se vilka av figurerna som uppfyller kraven. Komplettera med en parallellogram (som inte är en rektangel) och jämför med de andra figurerna. Vilka egenskaper har de gemensamt (fyra hörn och minst ett par parallella sidor) och vilka egenskaper saknar parallellogrammen? Dessa fyra former kan nu ordnas: alla motsvarar definition på en parallelltrapets, tre av dem är också en parallellogram, två en rektangel och en är kvadrat.

Konstruera en fyrhörning som inte passar in på någon av definitionerna – den kallar vi fyrhörning. Undersök en snedställd romb. Vilka egenskaper har den? Var hör den hemma i ordningen? – Varför är kvadraten en romb?

Att ofta gå tillbaka till definitionerna på de geometriska formerna hjälper eleverna att se på egenskaperna och inte bara på helheten.

Undersök vilka olika former man kan få genom att dela en kvadrat med ett snitt.

Att kunna dela upp och sätta samman figurer, först konkret men sedan också i huvudet, är nödvändigt för att utveckla förståelse för areabegreppet. Den grundläggande idén att arean inte ändras om figuren delas upp och bitarna byggs samman till en ny figur ligger till grund för att kunna gå vidare från att beräkna area av en rektangel.

Intressant är att också jämföra omkretsen. Blir den också oförändrad om figuren delas och flyttas?

Pussel illustrerar tydligt att uppdelning av en form i mindre bitar inte förändrar arean, men den sammanlagda omkretsen. Med lösa pusselbitar kan vi bygga sammanhängande figurer med väsentligt större omkrets än det lagda pusslet.

Tidigare problem: E2005:7; E20012:6; E2014:7.

18: Att vrida och vända i huvudet är en utmaning för vissa. Undersök konkret och låt eleverna beskriva med ord, som stöd för att uppmärksamma var olika delar av bilden hamnar.

Låt eleverna med ord beskriva hur bilden i figur 1 ser ut om vi tänker oss att kortet ligger på ett glasbord och vi ser underifrån.

Undersök hur alternativen förhåller sig till varandra. A, B, C och E är alla vridningar av en och samma bild. Jämför alternativ A och D, de är speglingar liksom C och D. Jämför alternativen med bilden på kortet i uppgiften. Vilket alternativ visar samma bild?

Tidigare problem: E2003:12; E2005:3; E2009:15; E2015:18; B2007:8; B2010:2; Cadet2003:10.

Problemlösning och logiska resonemang

Många uppfattar textproblem som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och uppmuntra eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med hjälp av stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. I problemlösning ingår att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Problemlösningsprocessen består av flera steg, ofta med både misslyckade och lyckade insatser. Att lära sig hantera motgångar och misslyckade försök är viktigt för att utveckla problemlösningsförmågan.

10: Rita in de olika vägarna i labyrinten så att lösningen blir tydlig och konkret för eleverna.

Lösningen av problemet kan illustreras av ett *träddiagram*, där antalet möjliga val i varje rum blir en gren på trädet. Jämför den konkreta lösningen med träddiagrammet.

Undersök motsvarande problem med ytterligare ett rum med två dörrar.

Gör fler enkla exempel, där möjligheterna går att illustrera konkret och överblicka, och försök resonera er fram till hur man kan beräkna antalet möjligheter.

Tidigare problem: E2006:4; E2007:3; E2010:2; E2011:10; E2012:15; B2011:8.

13: Diskutera olika strategier att lösa uppgiften. Måste vi fylla i alla rutor för att kunna svara?

Genomför olika resonemang gemensamt.

Låt eleverna konstruera egna 3 x 3-sudokun. Hur många olika möjligheter finns det? Vad är lika i dem?

Gör ett 4 x 4-sudoku. Resonera gemensamt och hjälp eleverna att motivera sina förslag. För att kunna utveckla förmågan att föra resonemang är det bra att få följa ett väl underbyggt resonemang. Delta gärna själv och visa eleverna hur man kan resonera.

Tidigare problem: E2004:5; E2005:6; E2007:7; E2011:16; E2012:5.; E2014:17; E2015:19; B2008:3; B2009:12; B2009:17, B2001:19.

15: Detta är ett klassiskt problem som förekommit i olika skepnader flera gånger tidigare. Diskutera olika lösningsmetoder och lös flera problem så att eleverna får använda sig av olika metoder. Låt eleverna konstruera liknande problem och diskutera i samband med det vad som är centralt, vilka möjligheter som finns. Varför kan man inte välja antalet ben slumpvis?

Tidigare problem: E2009:14; E2012:8; B2010:5.

16: Gå igenom texten noga. Diskutera betydelsen av ordet ”säkra”.

Vilka olika möjligheter har Fariba? Rita upp alla eller lägg på papper så att alla möjligheter kan jämföras. Då blir lösningen förhoppningsvis tydlig.

Pröva att lägga ut mynten om någon av de fem rutorna i mitten är tom.

– Hur många rutor skulle det vara på planen för att vi inte alls skulle kunna vara säkra?

Tidigare problem: E2012:9.

19: Man kan kanske hävda att detta i första hand är en läsförståelseuppgift, inte ett matematikproblem. Det stämmer att textförståelsen är avgörande. I denna text måste man observera och tolka uttrycket ”högst tre” korrekt. Man måste också tolka innebörden av att ”Paul har använt alla bokstäver i sitt namn”. Det betyder att bokstäverna P, A, U och L ingår. Däremot säger det inget om antalet bokstäver och inte heller något om huruvida det finns andra bokstäver också. Det är heller inte utsagt om det är versaler eller gemener.cDet är viktigt att eleverna får arbeta med den här typen av läsning, att tolka innebörden i formuleringar, för att kunna klara av matematiska texter. I matematikproblem har uttryck en exakt betydelse, och små detaljer i formuleringar kan vara avgörande.

Gå igenom texten noga. Diskutera vad varje mening ger för information, och vilka möjligheter de ger i relation till alternativen.

Gå sen igenom texten utan att relatera till alternativen. Vilka tänkbara lösenord finns det då?

Låt eleverna konstruera liknande problem. Lista gärna ett antal grundläggande formuleringar som de kan använda sig av, t ex ” det finns högst”, ” det finns åtminstone”, ”exakt en”.

Tidigare problem: E2009:8; B2009:3.

21: Gå igenom förutsättningarna noga. Jämför skålarna två och två och dra de slutsatser som går att dra. Några förslag på frågor:

– Vilken är tyngst, triangeln eller cirkeln? Hur vet vi det?
– Vilken är tyngst, triangeln eller kvadraten? Hur vet vi det?
– Varför kan vi bortse från en kvadrat i alla skålar?

Tidigare problem: E2003:20; E2004:8; E2012:10; E2013:13; B2013:11; B2015:9.

24: – Vilket samband finns mellan äpplen och päron i varje träd? Varför kommer det alltid att vara dubbelt så många päron som äpplen i trädgården?

– Vilka olika möjligheter att få 25 äpplen finns det?

– Hur många äpplen skulle det finna för att de andra alternativen skulle vara riktiga? Är alla alternativ möjliga?

– Vilka olika antal päron kan det finnas? Äpplen.

Låt eleverna konstruera egna frågor som utgår från denna trädgård.

Tidigare problem: E2010:14.

Att läsa

Bergius, B. & Emanuelsson, L. (2008). *Hur många prickar har en gepard?* NCM, Göteborgs universitet.

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K m fl (red) (2014). *Matematikundervisning i praktiken. NämnarenTema 10*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2012 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Om ni inte har och inte planerar att läsa problemlösningsmodulen inom Matematiklyftet, finns den alltså ändå tillgänglig. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.