Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Cadet 2016, svar och korta lösningar

Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Därefter följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problemen i klassen plus ytterligare kommentarer kring lösningarna.

Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Där kan du sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru/
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 29 april.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikel Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematik-prestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev (Cadet, Junior eller Student) att belönas med 500 kr.

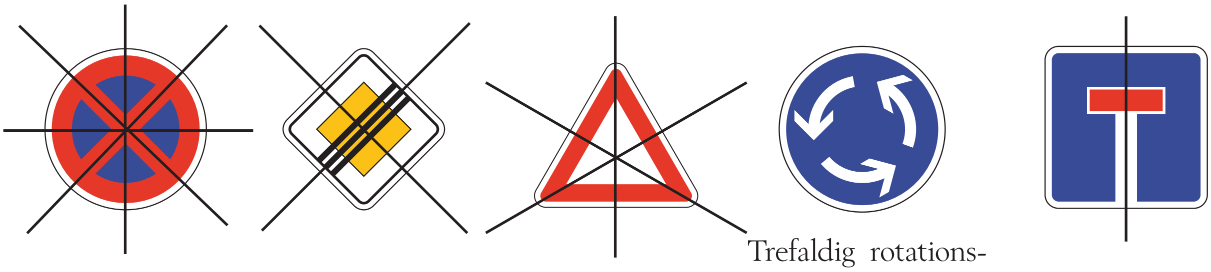
För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla elevens namn, skola och årskurs, tävlingsklass, resultat på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom ska det finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat* i relation till tidigare prestationer eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. *Förutom* detta premieras att eleven är hjälpsam och visar gott kamratskap. Ett underlag att använda för nomineringen finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/.

Nomineringen skickas senast 29 april till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

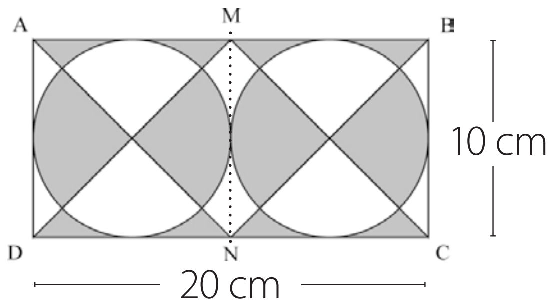
1. C. 17
   3,17 … 20,16
   Första heltalet efter 3,17 är 4 och det sista heltalet innan 20,16 är 20.
   Från och med 4 till och med 20 är det 17 tal.
   $20 - 4 + 1 = 17$

2. A. 4



Trefaldig rotations-
symmetri

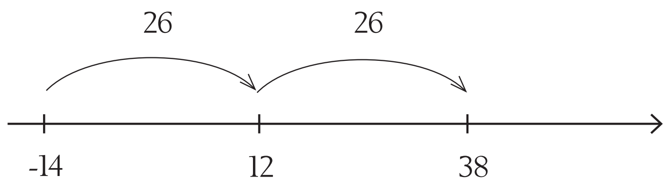
3. C. 100 cm²



Hälften av arean är skuggad. Om man tänker sig en lodrät linje från M till N kan det vara enklare att se det. $10 \cdot 20 = 200$ och hälften av 200 är 100.

4. D. 38
   Sätt Jennys speciella tal till x.
   $x - 26 = -14$
   $x = 12$
   $12 + 26 = 38$

En alternativ lösning är att använda en tom tallinje:



Jenny fick -14 när hon hade subtraherat 26. Det innebär att hon måste addera 26 för att komma tillbaka till ursprungsläget och därifrån sedan addera 26. Med andra ord:
$-14 + 26 + 26 = 12 + 26 = 38$.

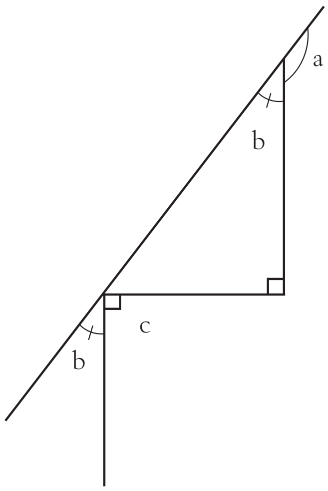
5. A. 999
   Det totala antalet stenar kan skrivas på olika sätt: $555 \cdot 9 = 5 \cdot 111 \cdot 9 = 5 \cdot 999$
   Poängen med denna lösning är att inte göra en uträkning utan att bara skriva antalet stenar på olika sätt.

6. C. 9
   12% är en femtedel av 60 %, då är antal lärare som åker bil en femtedel av 45.

   Alternativ lösning:
   Det finns x lärare
   $0{,}6 \cdot x = 45$
   $x = 75$
   Åker bil gör $0{,}12 \cdot 75 = 9$ lärare.

7. C. 270°
   $\angle 1 + \angle 2 = 180° + 180° - 90° = 270°$.

   Alternativ lösning:



   Vi ritar in en rät linje som är vinkelrät mot den rätvinkliga triangelns bas.
   Vi vet att en rak vinkel är 180°, vilket medför att sidovinklarna a och b är 180°.
   Uppgiftens vinkel 1 är lika med $b + c$. Uppgiftens vinkel 2 är lika med a.
   $a + b + c = 180° + 90° = 270°$.

8. D. 6
   Det finns tre möjligheter från B, för varje val finns det två olika varianter, multiplikationsprincipen ger $3 \cdot 2 = 6$.

9. E. 32 cm
   Varje sida i kvadraten består av en kortsida och en långsida från en rektangel, dvs kvadratsidans längd är rektangelns halva omkrets. Kvadratens omkrets är $4 \cdot 8 = 32$ cm.

10. E. 40
    Om 90 % av pärlorna är blå så är 10 % av pärlorna röda. Eftersom det bara finns en röd pärla, så måste antalet blå pärlor vara 9. Petra måste plocka bort 40 pärlor.

11. C. $\frac{29}{57}$

I ett bråk som är så nära en halv som möjligt ska nämnaren ha ett värde som ligger så nära som möjligt täljarens dubbla värde.
Tre av svarsalternativen kan väljas bort:

$\frac{25}{79}$ är nära $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$, $\frac{52}{79}$ är nära $\frac{50}{80} = \frac{5}{8}$ och $\frac{57}{92}$ är nära $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$.

De två övriga alternativen är båda ganska nära $\frac{1}{2}$.

$\frac{27}{59}$: jämför t ex med $\frac{27}{54}$ som är en halv.

$\frac{29}{57}$: jämför t ex med $\frac{29}{58}$ som är en halv. Skillnaden är minst här.

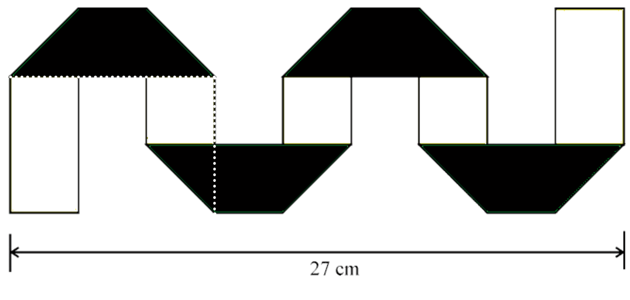
12. B. Glen och Carl
Glen har vunnit tre matcher, Carl två matcher, övriga en eller ingen. Alltså möts Glen och Carl i finalen.

Alternativ lösning:
En visuell lösning är en uppställning av alla par där varje förlorare efter hand stryks:
B slår ~~A~~, C slår ~~D~~, G slår ~~H~~, G slår ~~C~~, C slår ~~B~~, E slår ~~F~~, G slår ~~E~~.
De "vänsternamn" som nu är kvar: B, C, G, E. G som inte blivit slagen av någon går till final och där slår han C som slagit alla han mött utom just G.

13. D. 89
Anta att trillingarna är x år. Då är tvillingarna $(x - 3)$ år. Tillsammans är de $3x + 2(x - 3) = 5x - 6$. Det svar man får då 6 adderas till alternativen måste vara delbart med 5. Det är bara 89 som uppfyller det, eftersom $89 + 6 = 95$.

14. D. 57 cm
Bandet kan delas in 19 kvadrater vardera med sidan 3 cm, alltså är hela bandets längd $19 \cdot 3$ cm = 57 cm.

Alternativ lösning:
$6 + (15 \cdot 3) + 6 = 6 + 45 + 6 = 57$



Bandet börjar respektive slutar med 6 cm av bandet. Den vågräta prickade sträckan är 9 cm (3 + 3 + 3) och den lodräta prickade sträckan är 6 cm (3 + 3). De båda prickade sträckorna är tillsammans 15 cm och det finns tre sådana sträckor.

15. D. 105
Lösningen bygger på att alla korrekta sexsidiga tärningar är konstruerade så att två motstående sidor har summan 7. Det gör att en tärning har sammanlagt $3 \cdot 7 = 21$ prickar. De sex yttre tärningarna har $6 \cdot 21$ prickar minus 21 prickar på sidorna som är fastlimmade mot tärningen i mitten. $126 - 21 = 105$.

Alternativ lösning:
Summan av tärningsögonen på en vanlig tärning är 21. Samtliga ögon på den mittersta tärningen försvinner samt motsvarande ögon från de övriga sex tärningar. Alltså finns det totalt $7 \cdot 21 - 2 \cdot 21 = 5 \cdot 21 = 105$.

16. B. 11
Anta att Per är ikapp Jum efter n hopp. Då har Per hoppat $(1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$

$\frac{n(n+1)}{2}$ meter och Jum $6n$ meter. Det ger ekvationen $\frac{n(n+1)}{2} = 6n$, $n = 11$.

Alternativ lösning:

Antal hopp:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jum:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
Per:	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

17. B. 12
Anta att det finns p pojkar, då är antal flickor $20 - p$. Då gäller $\frac{p}{3} = \frac{(20-p)}{2}$, $p = 12$.

Alternativ lösning:
1/3 av pojkarna och 1/2 av flickorna måste vara samma antal eftersom de ska sitta tillsammans.
Ett par ger tre pojkar och två flickor i klassen, för lite.
Två par ger sex pojkar och fyra flickor i klassen, för lite.
Tre par ger nio pojkar och sex flickor i klassen, för lite.
Fyra par ger tolv pojkar och åtta flickor i klassen vilket är 20 elever.

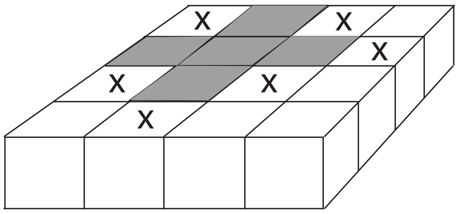
18. D. 9
Dra diagonalen från hörnet mellan b och c. Då finns det fyra skuggade trianglar, var och en med höjden 6. Deras sammanlagda area är $\frac{a \cdot 6}{2} + \frac{b \cdot 6}{2} + \frac{c \cdot 6}{2} + \frac{d \cdot 6}{2} = 27$,

$a + b + c + d = 9$.

19. C. 44
$16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8$ och $225 = 9 \cdot 25 = 5 \cdot 45$. Eftersom 16 ska var produkten av de två minsta talen, så måste de talen vara 2 och 8. 225 ska vara produkten av de två största, alltså 9 och 25. Summan blir $2 + 8 + 9 + 25 = 44$.

20. D. 7
Låt varje gumma få v våfflor. Då har Rödluvan $2v$ våfflor när hon kommer till den tredje gumman. Den andra gumman ska ha v våfflor, så Rödluvan måste ha $2(v + 2v) = 6v$ våfflor när hon kommer dit. Den första gumman ska ha v våfflor. Då måste Rödluvan ha $2(v + 6v) = 14v$ våfflor när hon kommer dit. 7 är en delare till 14.

21. E. 17
En kub har sex sidor och den grå kuben har fem sidor som har en annan kub som granne. Då kommer efter första dagen sex kuber att vara grå. Betrakta det övre lagret med fem synliga grå kuber.



I det lagret kommer det att genereras sex nya grå kuber (se kryss). I andra lagret blir det fyra nya grå kuber och i tredje lagret en ny grå kub. Det ger sammanlagt $6 + 6 + 4 + 1 = 17$ grå kuber.

22. A. A
Anta att radien i cirkeln med mittpunkt i A är a. Då är radien i mittpunkt $B = 16 - a$, i mittpunkt C $= 14 - (16 - a) = a - 2$, i mittpunkt $D = 17 - (a - 2) = 19 - a$ och i mittpunkt $E = 13 - (19 - a) = a - 6$ men radien i mittpunkt E är även $14 - a$.
Alltså är $a - 6 = 14 - a$, $a = 10$. Då blir radierna i respektive mittpunkt A: 10, B: 6, C: 8, D: 9 och E: 4. Mittpunkt A har den största cirkeln.

23. D. 12:30
När Teo tittar på sin klocka visar den 12:05, han tolkar det som 12:00 men den korrekta tiden är 12:05 + 10 min = 12:15. När Leo tittar på sin klocka visar den 12:20, han tolkar det som 12:30 men även här är den korrekta tiden 12:20 – 5 min = 12:15.

24. C. 17
Låt a, b, c, d och e (alla > 0) vara antalet passagerare i vagnarna 1, 2, 3, 4 och 5, samt A, B, C, D och E antalet grannar en passagerare i motsvarande vagn har (varje vagn med minst en passagerare har ett bestämt grannantal: 5 eller 10).
Då har vi:

$$A = a + b - 1$$
$$B = a + b + c - 1$$
$$D = c + d + e - 1$$
$$E = d + e - 1$$

Då $c > 0$ är alltså $B > A$ och $D > E$, vilket ger $A = 5$, $B = 10$, $D = 10$, $E = 5$ och $A + B + D + E = 30$
Ledvis summering av de 4 ekvationerna ger:

$$A + B + D + E = 2 \cdot (a + b + c + d + e) - 4$$
$$30 = 2 \cdot (a + b + c + d + e) - 4$$
$$a + b + c + d + e = 17, \text{ t ex } 2 + 4 + 5 + 2 + 4$$

Det finns fler lösningar …

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1			C			3
2	A					3
3			C			3
4				D		3
5	A					3
6			C			3
7			C			3
8				D		3
9					E	4
10					E	4
11			C			4
12		B				4
13				D		4
14				D		4
15				D		4
16		B				4
17		B				5
18				D		5
19			C			5
20				D		5
21					E	5
22	A					5
23				D		5
24			C			5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 29 april.

Antal deltagande elever

Åk 8	
Åk 9	
Kurs 1	

För in namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

	Namn	Poäng
Åk 8		
Åk 9		
Kurs 1		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Åk 8	Åk 9	Kurs 1
77 – 96 poäng			
57 – 76 poäng			
41 – 56 poäng			
25 – 40 poäng			
13 – 24 poäng			
0 – 12 poäng			

Redovisningsblankett B

Uppgift nr	Antal elever med rätt svar på uppgiften		
	Åk 8	Åk 9	Kurs 1
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			

Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Arbeta vidare med Cadet 2016

Årets Känguruproblem kan direkt kopplas till innehållet i kursplanerna för åk 9 samt för Ma1. Få av problemen är direkta rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Flertalet av dem kan kopplas till det centrala innehållet problemlösning men även till förmågan problemlösning som ska utvecklas. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Vill ni inte arbeta igenom tävlingens samtliga problem kan exempelvis några problem väljas ut som har något gemensamt från de olika tävlingsklasserna. De kan också kompletteras med liknande problem från tidigare års tävlingar. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med samtliga problem bör förmågorna resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Att läsa

Eriksson, K. & Rydh, S. (2003). *Nöjesmatematik*. Stockholm: Liber.

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2010). *Matematiska äventyr*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2016). *Frågor och fascinationer*. NCM, Göteborgs universitet.

Vaderlind, P. (2005). *Klassisk och modern nöjesmatematik*. Stockholm: Svenska förlaget.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar, äldre än ett år, finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på *Nämnaren på nätet*, namnaren.ncm.gu.se/namnaren. Du finner dem via *artikelregistret*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken Månadens problem.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.

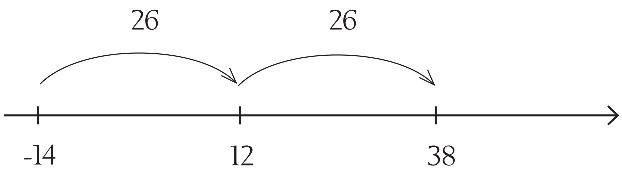
Taluppfattning

Cadet 1 (C1)
I den här typen av problem brukar det göras misstag. Ett sätt att inse antal tal är att använda en tallinje och be eleverna markera 20,16 och 3,17. Be dem med ett numeriskt uttryck beskriva hur man kan bestämma antal mellanliggande tal.

Frågeställningar om antal respektive mellanrum har förekommit i olika varianter, t ex Ecolier 2004 nr 11, Ecolier 2005 nr 11, Ecolier 2007 nr 4, Benjamin 2004 nr 8, GymnasieCadet 2007 nr 5.

Liknande uppgift: Benjamin 2003 nr 3.

C4
Även i den här uppgiften kan en tallinje vara användbar för att illustrera proceduren.



Jenny fick -14 när hon hade subtraherat 26, alltså måste hon addera 26 för att komma tillbaka till utgångstalet och därifrån addera 26. Det ger $-14 + 26 + 26 = 38$. Låt eleverna konstruera liknande problem med olika räknesätt, lösa varandras problem och illustrera sina lösningar på tallinjen.

Liknande uppgift: GymnasieCadet 2004 nr 9.

C5
Låt eleverna skriva ner de räkneoperationer som behövs för att bestämma antal grupper. Diskutera effektivaste sättet att beräkna resultatet. På vilka andra sätt kan hon gruppera stenarna om det inte ska bli några över?

Liknande uppgifter: Ecolier 2005 nr 5, Cadet 2013 nr 6, Benjamin 2014 nr 21, Cadet 2014 nr 8.

C6
Diskutera och jämför olika lösningsmetoder.
1. Om 60 % motsvarar 45 lärare, så svarar 20 % mot 15 lärare. Totalt måste det alltså finnas $5 \cdot 15 = 75$ lärare. 12 % av 75 lärare. Enklare att i huvudet tänka 75 % av 12, dvs 9.
2. Om 60 % motsvarar 45, så svarar 12 % mot 9.
3. Med ekvation. Anta att antal lärare är x. Då är $0{,}6x = 45$ och $x = 75$; 12 % av 75 = 9.

Uppgifter av olika svårighetsgrad där procentbegrepp ingår: Cadet 2003 nr 17, GymnasieCadet 2004 nr 8, GymnasieCadet 2005 nr 10, GymnasieCadet 2006 nr 5, 8, GymnasieCadet 2007 nr 20, GymnasieCadet 2009 nr 24, Cadet 2015 nr 17, Cadet 2006 nr 15.

C10
Resonera om 100 %. Hur många procent blå respektive röda pärlor finns det från början?
Problemet kan varieras på många sätt, t ex ”Petra har blå och röda pärlor i en ask. 90 % av pärlorna är blå. Hur många blå pärlor måste hon plocka bort för att det ska finnas lika många av varje färg?”

Liknande uppgifter: Junior 2009 nr 2, Cadet 2006 nr15, GymnasieCadet 2007 nr 15, GymnasieCadet 2008 nr 18.

C11
Diskutera bråk – vad representerar nämnare respektive täljare? Finns det generella metoder för att jämföra storleken på två bråk?

Liknande uppgift C2002 nr 1, Benjamin 2015 nr 6.

Geometri och rumsuppfattning

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t ex att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

C2
Diskutera med eleverna vad som menas med symmetri. Ta upp spegelsymmetri, rotationssymmetri. Rita symmetrilinjer i olika geometriska former, regelbundna och oregelbundna.

Se även Benjamin 2016 uppgift 3 som är ett liknande problem. Tidigare liknande uppgifter: GymnasieCadet 2007 nr 10, Ecolier 2010 nr 3, Cadet 2010 nr 1, Benjamin 2004 nr 11, Cadet 2011 nr 8.

C3
Även i detta problem kan vi utnyttja symmetri. Hur många symmetriaxlar finns det i figuren? Hur kan man använda symmetri för att lösa problemet? Lös konkret genom att byta plats på skuggade och icke skuggade områden. Om man delar hela området i två lika stora delar och roterar t ex den högra halvan ett kvarts varv inträffar precis detta.

Den här typen av problemet har förekommit många gånger, t ex Cadet 2002 nr 4, Cadet 2005 nr 13, Cadet 2009 nr 16, Cadet 2013 nr 2, GymnasieCadet 2004 nr 14, GymnasieCadet 2007 nr 11.

C7
Vid lösning av geometriska problem är det viktigt att kunna motivera vilka samband som används. Den här uppgiften handlar om vinklar och då kan följande begrepp vara lämpliga att diskutera och repetera: vinkelsumma i triangel, rätvinklig triangel, rak vinkel, supplementvinklar, yttervinkel.

I samband med detta problem kan man ta upp vinkelproblem från tidigare års tävlingar med stigande svårighetsgrad: GymnasieCadet 2008 nr 10, Junior 2010 nr 11, Cadet 2013 nr13, Cadet 2012 nr 11, GymnasieCadet 2005 nr 21.

Vill man gå ännu ett steg längre kan man ta upp liksidiga och likbenta trianglar, samt bisektriser. Då är följande problem lämpliga: GymnasieCadet 2010 nr 14, GymnasieCadet 2007 nr 14, GymnasieCadet 2004 nr 16, Cadet 2014 nr 17.

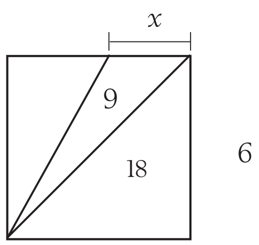
C9
Resonera om olika sätt att lösa problemet. Varje sida i kvadraten har samma längd som halva rektangelns omkrets, vilken är 8 cm. Ett mer konkret resonemang kan vara att låta rektangelns sidor ha givna längder för att visa att kvadratens omkrets blir densamma. Undersök hur den lilla kvadratens omkrets påverkas av rektangelns mått. Hur påverkas arean hos den stora kvadraten, rektangeln och den lilla kvadraten av rektangelns mått?

Liknande uppgifter: Cadet 2003 nr 18, Cadet 2005 nr 7, Cadet 2011 nr 22.

C14
Här kan det vara lämpligt att arbeta konkret för att få en förståelse vad som händer vid varje vikning. Ge eleverna remsor med bredd 3 cm och låt dem utföra vikningen. Be dem markera måtten på de olika vikta delarna som uppkommer.

En annan variant på vikning av en pappersremsa är årets Student nr 21.

C18
Diskutera olika lösningsmetoder med eleverna. Har det någon betydelse var på kvadratens sida, sträckorna a, b, c och d är markerade? Alternativ lösning: Eftersom kvadratens area är 36, är sidan 6 och halva omkretsen 12. Den skuggade arean är 3/4, alltså $a + b + c + d$ är 3/4 av 12 = 9.

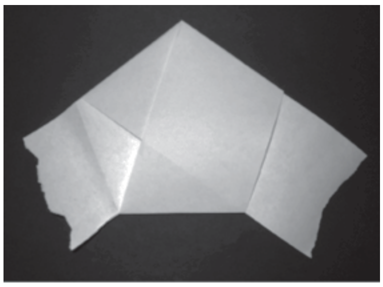


Liknande uppgift: Cadet 2007 nr 19, Benjamin 2010 nr 16, GymnasieCadet 2007 nr 24, Benjamin 2002 nr 14.

C21
Här gäller det att tänka i tre dimensioner. Ta fram kuber och låt eleverna utgå från en kub. Vilka sidor ska första dagen få en angränsad kub av samma färg? Sätt dit dem. Gör om proceduren för nästa dag. Vad händer med antal kuber om vi fortsätter ytterligare en dag (bortse från begränsningen på den ursprungliga kuben)?

En enklare men liknande uppgift är Benjamin 2008 nr 4.

C22
Arbeta med begreppet pentagon (femhörning). Vinkelsumma i en femhörning. Hur ser en regelbunden femhörning ut? Hur stor är varje vinkel i den? Ta upp vad som menas med tangera varandra.
Med en pappersremsa, t ex en kvittoremsa, kan man skapa en pentagon. Vik en enkelknut av remsan och platta försiktigt till den. Klipp av överflödigt papper och vips - en pentagon!



Algebra

Det finns alltid flera metoder att lösa uppgifterna med. Många av dem är formulerade så att man med hjälp av svarsalternativen kan komma fram till svaret. Genom att arbeta vidare med problemen finns då chansen att diskutera generella lösningar där man låter eleverna arbeta med algebra. I flera av geometriproblemen kan man i efterarbetet använda algebra.

C13

Brödernas sammanlagda ålder kan även uttryckas med utgångspunkt i tvillingarnas ålder.
Anta att tvillingarna är x år. Då är trillingarna $(x + 3)$ år. Tillsammans är de $2x + 3(x + 3) = 5x + 9$. Deras sammanlagda ålder måste alltså vara 9 mer är ett tal jämnt delbart med 5. Det är bara 89 som uppfyller det villkoret.
Problemet kan varieras på många olika sätt; vad händer om ålderskillnaden är 2 år eller 4 år, eller om trillingarna istället är fyrlingar osv.

Se även Benjamin 15, Ecolier 20.

C16

Även den här uppgiften kan varieras på många olika sätt; Jum hoppar 7 m varje gång, Per börjar hoppa 3 m framför Jum osv.

Liknande uppgift: Junior 2005 nr 10.

C17

Ett annat sätt att pröva sig fram:
Om det är 9 pojkar är det 11 flickor. Uteslutet svar eftersom det inte går att dela 11 flickor i hälften. Detsamma om det är 15 pojkar och 5 flickor.
Om det är 12 pojkar är det 8 flickor. En tredjedel av pojkarna är 4 och hälften av flickorna är 4. Alltså kan fyra par vara pojke + flicka.
16 pojkar och 4 flickor. Funkar inte eftersom det inte går att dela antalet pojkar med tre.
18 pojkar och 2 flickor. 18 delat med 3 är 6, 2 delat med 2 är 1. En flicka kan sitta med en pojke, men sen är det många pojkar över.

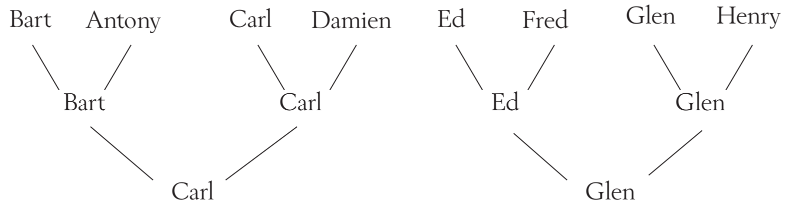
Se även Benjamin 12.

Liknande uppgifter: Ecolier 2012 nr 12, Cadet 2005 nr 4, Junior 2005 nr 4, Cadet 2001 nr 4.

Problemlösning

C12

Låt eleverna illustrera problemet genom att rita upp ett spelschema.



Ett liknande problem finns i årets Junior, nr 11.

C15

Ge eleverna sju vanliga tärningar och låt dem konstruera bygget. Be dem sedan formulera en lösning.

Liknande uppgifter: Benjamin 2001 nr 20, Cadet 2007 nr 4, Benjamin 2010 nr 14, Junior 2007 nr 1, Mer utmanande uppgifter: Student 2008 nr 18, Student 2005 nr 21.

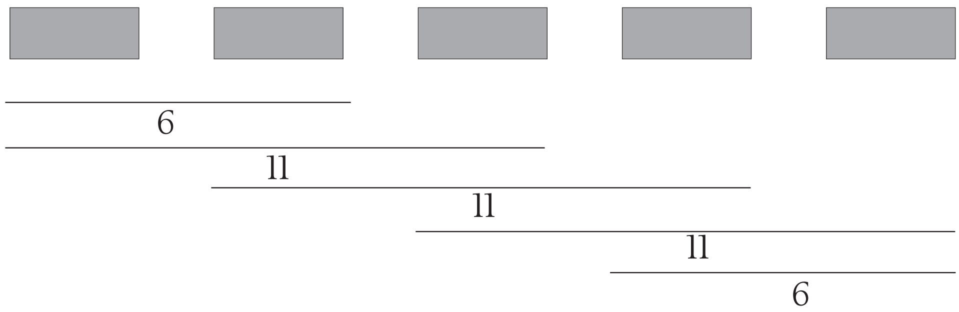
C19
Ta upp primtalsfaktorisering. Diskutera med eleverna vilken information i problemet som måsta vara med för att det ska finnas en entydig lösning. Låt eleverna ta bort någon information, vilka tal kommer då att finnas på tavlan. Vad händer om man varierar produkterna, t ex låter minsta produkten vara 15 istället för 16 etc?

Liknande uppgift: GymnasieCadet 2009 nr 8.

C20
Ta upp begreppet delare.

C23
Liknande uppgifter: Junior2006 nr 6, Ecolier 2004 nr 9.

C24
Bilden visar ett sätt att illustrera situationen med de 5 vagnarna. I de första två, respektive de sista två vagnarna finns 6 passagerare. De tre första, tre mittersta och tre sista vagnarna innehåller alla 11 passagerare. Hur många olika sätt att placera passagerare i vagnarna kan eleverna hitta?



Liknande uppgifter: Benjamin 2015 nr 14.