Kängurun – Matematikens hopp

Benjamin 2016, svar och lösningar

Här följer svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också lösningsförslag. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på nätet. Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen ncm.gu.se/kanguru/ Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 29 april.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Namnen på de elever som fått bäst resultat, i varje årskurs, kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Du kan sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever i samma åldersgrupp och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner att lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Arbeta vidare med problemen
Efter redovisningssidorna i detta dokument följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problemen. Där finns också ytterligare kommentarer till lösningarna i vissa fall.

Nominera till Mikael Passares stipendium
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikel Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematik-prestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev (Cadet, Junior eller Student) att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla elevens namn, skola och årskurs, tävlingsklass, resultat på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom ska det finnas en motivering till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en ovanligt god prestation i tävlingen, oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer eller annat hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är hjälpsam och visar gott kamratskap. Ett underlag att använda för nomineringen finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/.

Nomineringen skickas *senast 29 april* till:

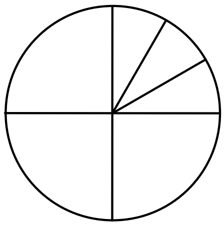
Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Svar och lösningar – Benjamin

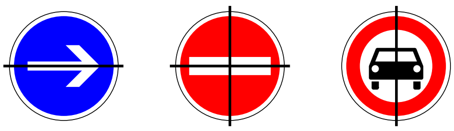
3 poäng

1. (C) 4
Maria kan exempelvis ta bort den högra magneten på de två översta korten och på de fem nedre korten kan hon ta bort magneten längst till vänster och två av magneterna på kortet längst till höger. Tar man bort fler än fyra magneter så faller minst ett kort ner eftersom det finns fyra kort som inte överlappar varandra.

2. (E) En tolftedel.
Fyra gånger tre småbitar blir tolv småbitar, vilket ger att varje småbit är en tolftedel.
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$



3. (C)



Det är tre trafikmärken som har symmetrilinjer: A, C och E. C har två symmetrilinjer medan A och E har en var.

4. (B) 2
Aisha ska byta plats på gaffeln och kniven som ligger mellan den vänstra och mellersta tallriken. Hon ska även byta plats på gaffel och kniv på den högra tallriken.

5. (D) 50
25 par skor räcker till 50 fötter. Alltså behöver hundrafotingen köpa 50 skor.
$100 - 2 \cdot 25 = 50$

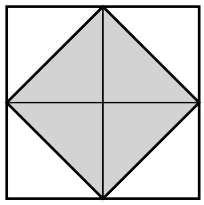
6. (C) 4
Tomas block innehåller 24 klossar. Eftersom Johans understa lager består av sex klossar så måste den var fyra klossar hög.

7. (B)
B har gemensamma kanter med de fyra sidorna A, C, D och E. Alltså är B botten som ligger mitt emot den öppna sida.
Alt: När vi viker lådan kommer följande sidor mötas i de fyra hörnen i botten: ABC, CBD, DBE och ABE. B ingår i samtliga fyra hörn och därför är B lådans botten.

8. (A)
Diagonalen i en kvadrat är längre än sidan, alltså kan man inte konstruera figur A.

4 poäng

9. (E) 50 cm^2
Dra diagonalerna i den mindre kvadraten. Den större kvadraten delas då in i åtta kongruenta trianglar. Fyra av dem hör till den mindre kvadraten. Dess area är då hälften av den störres.



10. (C) 2
Om två personer sover med ansiktena mot varandra så sover den ena på det högra örat och den andra på det vänstra. Samma sak gäller när två personer ligger med ryggarna mot varandra.

11. (C)
Om vi numrerar nötterna, från vänster till höger, 1, 2, 3, 4, 5 och 6, så kommer ekorre A att plocka nöt 1, ekorre B nöt 2, ekorre C nöt 3, ekorre D nöt 5 och ekorre E nöt 6. Kvar är nöt 4. C kommer först till den eftersom den bara har sammanlagt fyra steg till sin första nöt och sedan till nöt 4. De andra behöver ta fler steg.

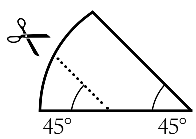
12. (D) 10
Exakt häften av flickorna sitter bredvid en pojke och alla pojkar sitter bredvid en flicka. Det innebär att det är dubbelt så många flickor som pojkar i klassen. Alltså finns det 10 pojkar och 20 flickor.

13. (E)
När Bertil betraktar klockan i spegeln så har vänster och höger sida bytt plats. Alltså pekar klockans timvisare mot drygt 10 och minutvisaren mot kvart över. Tio minuter tidigare pekade minutvisaren mot fem över. Spegelbilden såg då ut som E.
Alt: Klockor i speglar går i motsatt riktning. Nu visar den en kvart i två och tio minuter tidigare visade den fem minuter i två.

14. (A) 8
Mormor köper mat åt fyra katter för tolv dagar och det blir 48 dagsransoner. Men nu har det blivit sex katter, så då får mormor dela antalet ransoner med sex, dvs maten räcker i 48/6 = 8 dagar.

15. (A) 53
Skulle Kalle vara lika gammal som sina bröder skulle summan av brödernas åldrar vara delbar med 4. Eftersom Kalle är 3 år yngre, får vi ett tal delbart med 4 när vi lägger till 3 år till summan av deras åldrar.
Försöker vi göra det med svarsalternativen så får vi:
A 53+3= 56, B 57, C 59, D 62 och E 63.
Bara A ger en summa som är delbar med 4.

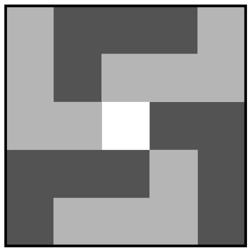
16. (D)
Cirkelsektorn som bildas efter den sista vikningen har medelpunktsvinkeln 45°. Eftersom klippet sker parallellt med en av sektorns sidor kommer även den vinkeln vara 45°. Viker man ut den bortklippta delen så har den medelpunktsvinkeln 90°.



5 poäng

17. (D) 6

Eftersom varje figur består av fyra små kvadrater och den stora kvadraten består av 25 små så kan det som mest klippas ut sex sådana figurer. Är det möjligt? Ja, bilden visar en möjlig variant.



18. (C) 3

Eftersom det är två kranförare som arbetar varje dag och en arbetsvecka har fem dagar ska de tillsammans arbeta tio dagar. Det innebär att om man tar bort Matildas tre dagar och Arnes fyra dagar blir det tre dagar kvar åt Natalia.

19. (C) 40 cm

Det är bara hälften av omkretsen av rektanglarna A, B och D som bidrar till den tjocka linjens längd, alltså 30 cm + (20 cm / 2) = 40 cm. Man kan också säga att den tjocka linjens längd minskar med 1/4 och ökar med 3/4 av de små rektanglarnas omkretsar.

20. (B) 5

De tal som uppfyller villkoren är 11111, 1112, 113, 14 och 122.

21. (B) 10

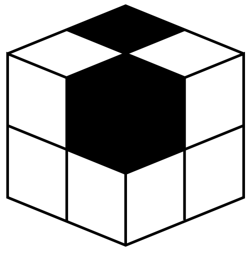
Beroende på hur Luigi placerar borden, enkelt eller dubbelt, så blir det antingen sex stolar för många eller fyra stolar för få. Skillnaden är alltså tio stolar. I en tabell kan man testa sig fram:

Antal bord	2	4	6	8	10	12
Antal stolar vid enkelbord	8	16	24	32	40	48
Antal stolar vid dubbelbord	6	12	18	24	30	36
Skillnad enkel-/dubbelbord	2	4	6	8	10	12

Alt: Låt b vara antal bord och s antal stolar. Om Luigi placerar fyra stolar runt varje enskilt bord saknar han sex stolar, alltså $4b - 6 = s$. Om han gör dubbelbord så kräver varje enskilt bord tre stolar och han får fyra stolar över, dvs $3b + 4 = s$. Det ger ekvationen $4b - 6 = 3b + 4$ med lösning $b = 10$.

22. (D)

Betraktar vi den stora kuben ser vi tre sidoytor på varje liten kub, dvs 24 sidoytor. De fem bilderna visar 6 svarta och 14 vita sidoytor från de mindre kuberna. Antal sidoytor av varje färg måste vara delbart med 3. Det kan antingen vara två svarta kuber och sex vita kuber, vilket skulle motsvara att den sjätte sidan är D eller tre svarta kuber och fem vita kuber vilket motsvarar att den sjätte sidan är E. Sistnämnda är omöjligt för då skulle ytterligare två sidor på den stora kuben ha två svarta kuber liggande intill varandra.



23. (E) 9

Det andra påståendet ger □ + △ = □ . Alltså är △ = 0.
Det första påståendet ger ○ + □ + ○ = □ · 10 + △ alltså 2 · ○ = 9 · □.
2 · ○ är delbart med 9 alltså är ○ delbart med 9 men 0 < ○ < 10 alltså ○ = 9.

24. (E) 537

När vi provar oss fram och försöker hitta två tal med så liten summa som möjligt, sådana som uppfyller villkoren, så hittar vi 102 + 435 eller 132 + 407, båda paren med summan 537.
Är 537 den minsta möjliga summan? Vi vet i alla fall att den minsta möjliga summan inte är större än 537.
Låt de två tresiffriga talen vara *abc* och *def* där $a \neq 0$, $d \neq 0$ och $d = 2c$. Alltså är $c \neq 0$ samt $abc + def \leq 537$ och därmed är $a + d \leq 5$.
Om $c > 2$ så är $d > 4$ och $a + d > 5$, alltså är c inte större än 2, dvs $c = 1$ eller $c = 2$.
Om $c = 1$ så är $d = 2$ och $a = 3$. Då är tiotalen b och e minst 0 och 4 och summan av de tresiffriga talen blir större än 540.
Det återstår $c = 2$ då $d = 4$ och $a = 1$. Summan av tiotalen är som minst $0 + 3 = 3$ och summan av entalen är som minst $2 + 5 = 7$. Alltså är 537 den minsta möjliga summan.

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1			C			3
2					E	3
3			C			3
4		B				3
5				D		3
6			C			3
7		B				3
8	A					3
9					E	4
10			C			4
11			C			4
12				D		4
13					E	4
14	A					4
15	A					4
16				D		4
17				D		5
18			C			5
19			C			5
20		B				5
21		B				5
22				D		5
23					E	5
24					E	5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

Redovisning av resultat sker på webbadress ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 29 april.

Namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
5		
6		
7		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	åk 5	åk 6	åk 7
77 – 96 poäng			
57 – 76 poäng			
41 – 56 poäng			
25 – 40 poäng			
13 – 24 poäng			
0 – 12 poäng			
Totalt antal deltagare			

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	åk 5	åk 6	åk 7
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			

Arbeta vidare med Benjamin 2016

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Påminner problemet om något annat problem vi har löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?”

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att *resonera och argumentera* vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under rubrikerna *Tal, Geometri* samt *Problemlösning och resonemang.* Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Där finns också förslag på hur man kan arbeta vidare med de problemen.

Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

OBS!

Vid nästan alla problem finns det hänvisningar till tidigare liknande problem. Efter angivelsen, t ex B2006 nr 8, följer antingen hela problemet eller en del av det. Om den kursiverade texten följs av tre prickar (…) innebär det att bara en liten del av problemet är med. Tanken är att det ska vara enkelt att bilda sig en uppfattning om ungefär vad det är för problem, kanske ett som känns igen från tidigare år, och om det verkar lämpligt att titta närmare på just nu. Inga svarsalternativ ges, men ibland har text från det föreslagna problemets *Arbeta vidare med* tagits med. Det kan ge en del idéer även för hur årets problem kan följas upp.

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Elever i denna ålder kan resonera om bl a räknesättens innebörd, faktorisering och delbarhet. Problemen utmanar också elevernas strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra dem därför att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

2: Ahmeds pizza

På ncm.gu.se/matematikpapper finns bilder på två olika pizzor som kan skrivas ut och användas i laborativt arbete. Dela pizzorna i olika antal bitar och resonera om hur man skriver bråkuttryck på olika sätt. Elever behöver möta tal i bråkform i många olika sammanhang. Pizza och tårtor är tilltalande att använda som metaforer i undervisningen men eleverna måste se och arbeta med andra exempel också.

Ibland är det en fördel att lämna de runda pizzorna och tårtorna och övergå till rektangulära chokladkakor. För att konkretisera $1/3 \cdot 1/4$ kan ”chokladkakemodellen” användas. Läs mer om multiplikation av bråk i Wiggo Kilborns material *Om tal i bråk och decimalform – en röd tråd* (s. 23), som finns fritt tillgängligt för nedladdning på http://ncm.gu.se/node/2581

Tidigare problem

I följande problem förekommer det bl a broar, dygn, kakor och datavirus. I samtliga fall handlar det om att ”bli vän med bråken”, dvs att titta på bråkuttrycken, förstå samband och finna kloka sätt att hantera uppgifterna på.

B2006 nr 8, *Hälften av en hundradel …*

Olika flexibla kunskaper och strategier att tänka informellt med tal i vårt positionssystem blir allt viktigare genom den ökande användningen i samhälle och utbildning. Vad är hälften av en tiondel? Hälften av en tusendel? Fjärdedelen av en hundradel? Dubbelt mot en hundradel? Dubbelt mot fem tusendelar eller fem hundratusendelar?

B2009 nr 6, *En bro går vinkelrätt över en flod …*

E2011 nr 9, *Mormor har födelsedagskalas med två likadana tårtor …*

I lösningen kan betydelsen av att bitarna är lika stora diskuteras. Spelar det någon roll för problemets lösning att bitarna är lika stora? Ett träddiagram kan ritas.

GyCadet2005 nr 9, *Hur många timmar är en halv tredjedel av ett kvarts dygn?*

Resonera om delar av år, månader, dygn, timmar.

B2014 nr 6, *En kaka väger 900 g …*

Hur mycket väger den största biten? Vad väger de andra bitarna? Här finns möjlighet att variera öppenhetsgraden och anpassa problemet till olika elever. Tar eleverna kanske för givet att alla bitarna är lika stora? I så fall varför? Diskussion kan föras om betydelsen av sätta sig in i problemet och inte lägga till villkor som inte finns.

J2009 nr 4, *Vad är* $\frac{1}{2}$ *av* $\frac{2}{3}$ *av* $\frac{3}{4}$ *av* $\frac{4}{5}$ *av* $\frac{5}{6}$ *av* $\frac{6}{7}$ *av* $\frac{7}{8}$ *av* $\frac{8}{9}$ *av* $\frac{9}{10}$ *av 1000?*

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot1000=\frac{1}{10}\cdot1000=100$$

Detta är en uppgift som kan bli mycket jobbig om man börjar multiplicera täljaren för sig och nämnaren för sig. Istället blir det tydligt vilka arbetsbesparande vinster man kan göra om man förkortar.

C2002 nr 8, *Ett datorvirus äter upp utrymmet på hårddisken …*
I uppgiften äter datorviruset en del efter en annan. I lösningen är det bra att titta på hur mycket som är kvar och då kan en enkel skiss kan vara till hjälp. […] När kraschar hårddisken?

5: Hundrafotingen
Inled med att diskutera vad man får veta i problemet. Ibland står det *fötter* och ibland *par av fötter.* När något är i par är det ofta detsamma som dubbelt. Det finns elever som upp på högstadienivå inte är säkra på vad dubbelt innebär. I Nämnaren 2015:4 (sök under Nämnaren på nätet, ArkivN) finns ett Uppslag som behandlar dubbelt och hälften.

Strävornaaktiviteten *8A Tusenfotingen* har egentligen inget med vare sig ”riktiga” hundra- eller tusenfotingar att göra. Däremot är det en mycket bra aktivitet för elever i denna åldersgrupp. Aktiviteten behandlar bl a multiplikation med tal mindre än 1.

Tidigare problem

E2010 nr 9, *Tusenfotingen Ingemar har 100 fötter …*
Problemet liknar Hundrafotingen till stor del med en blandning av antal fötter och par av skor. Och man kan ju alltid diskutera varför *Tusen*fotingen Ingemar bara har hundra fötter :-) Låt eleverna konstruera uppgifter, med antal fötter och par av skor, när han har tusen fötter.

12: Pojkar och flickor
Inled med att diskutera vad man får veta i problemet. Hur många par kan eleverna bilda? Hur ser paren ut med tanke på fördelningen pojkar–flickor? När exakt hälften av flickorna sitter bredvid en pojke innebär det att det går att dela klassen i tre lika stora grupper.

Ett alternativt lösningssätt är att utgå från de olika svarsalternativen och föra resonemang om möjliga svar: (A) 25: Om det är 25 pojkar i klassen skulle det innebära att det är 50 flickor i klassen och det är alldeles för mycket eftersom det bara är 30 elever i klassen. […] (E) 5: Om det är fem pojkar i klassen skulle det innebära att det är tio flickor, sammanlagt blir det då för få elever i klassen.

Ett liknande problem finns bland årets Cadet-uppgifter, nr 17. Låt eleverna undersöka hur långt det går att resonera på samma sätt som i Benjaminuppgiften. Vad är lika och vad skiljer mellan uppgifterna?

Tidigare problem:

E2012 nr 12, *I Nadjas klass är det dubbelt så många flickor som pojkar. Hur många elever kan det finnas i den klassen?*
Om vi tittar på uppgiften utan att ha svarsalternativen tillgängliga kan det först behövas en diskussion om hur stor en klass kan vara. I problemet är det dubbelt så många flickor som pojkar. Vad innebär det? Om vi vet antalet pojkar är det relativt enkelt att beräkna dubbelt. Men om den delen är okänd vet vi bara att relationen är 2:1. Det innebär att hela gruppen måste delas i tre, två delar flickor och en del pojkar, och det gör att det kan finnas många lösningar om inte svarsalterna-

tiv ges. Låt eleverna undersöka detta konkret och med en bild. Undersök vilka antal som är möjliga att fördela på detta sätt. Vad har de gemensamt? Ta upp begreppet delbarhet.

GyCadet2005 nr 4, *Två flickor och tre pojkar åt tillsammans 16 portioner glass. Varje pojke åt dubbelt så mycket som varje flicka …*

C2001 nr 4, *Erik har sju manliga klasskamrater fler än han har kvinnliga. I hans klass går dubbelt så många pojkar som flickor …*

14: Mormor köper kattmat

Låt eleverna formulera egna liknande problem där de varierar med olika antal katter och dagar.

En alternativ lösning är att tänka i procent: Antalet katter ökar med 50 %, då går det åt 1,5 gånger mer mat per dag. Maten räcker då till 12/1,5 = 8 dagar. Hur skulle det kunna illustreras med en bild?

Tidigare problem

C2002 nr 18, *Ett fartyg tar ombord 30 skeppsbrutna från ett vrak …*

15: Brödernas ålder

En algebraisk lösning: Antag att trillingarna är x år, då är Kalle $x - 3$ år. Tillsammans är de i år $(3x + x - 3) = 4x - 3$. Även om eleverna inte formellt börjat arbeta med algebra kan det vara intressant för dem att se hur en sådan här lösning kan se ut. Resonera exempelvis gemensamt om vad x står för och ta upp det dolda multiplikationstecknet i $4x$. Betona om det behövs att de inte behöver förstå allt, utan att det bara kan vara kul att få en inblick i algebra och vilka fördelar det finns med att lösa uppgifter med den lösningsmetoden.

Låt eleverna fortsätta undersöka hur brödernas sammanlagda ålder ändras från år till år. Hur ändras den sammanlagda åldern om Kalle är tre år äldre, fem år äldre, fyra år yngre osv än sina trillingbröder? Hur ändras deras sammanlagda ålder om de istället är fyrlingar, femlingar etc? Försök få eleverna att se ett mönster och även formulera ett uttryck för den sammanlagda åldern.

Liknande problem finns i årets Ecolier, nr 20 och Cadet, nr 13.

Tidigare problem

B2001 nr 16, *För tre år sedan var trillingarna Paul, Simon och Bill samt deras fyra år äldre syster Sussie sammanlagt 24 år gamla. Hur gammal är Sussie idag?*

20: Richard skriver tal

Richards tal kan finnas genom ett strukturerat letande eller systematiskt resonemang. Diskutera vad som menas med ett tals egenskaper. Gå igenom: *första siffran, minst lika stor, föregående, summan av siffrorna …* Siffra eller tal? Likheter och skillnader? Vad finns det mer för egenskaper? (udda, jämna, delbara, primtal, …) Låt eleverna konstruera egna liknande problem som bygger på ett par valda egenskaper hos tal.

23: Tre symboler

I de fall då elever vill prova sig fram kan det lätt bli kladdigt på pappret när de skriver och suddar. Då är det bättre att de använder material som de kan flytta på. Papperslappar kan fungera, ännu bättre är ofta kapsyler. De flyttar sig inte av bara ett vinddrag/andetag och de är lätta att greppa. Skriv en siffra inuti varje kapsyl. Nu är det enkelt att flytta kapsylerna i letandet och när en lösning är funnen kan den skrivas ner. Diskutera med hjälp av lösningen hur man hade kunnat resonera sig fram istället.

Vad händer om vissa förutsättningar ändras? Låt eleverna konstruera egna problem.

Kryptaritmer är en form av talpussel som passar bra för resonemang. Varje bokstav står för en siffra, samma bokstav är samma siffra. Här är några klassiker att arbeta med:

SEND + MORE = MONEY

ETT + ETT = TVÅ

TEN + TEN + FORTY = SIXTY

HALF + HALF = WHOLE

Tidigare problem

B2008 nr 16, *De fem symbolerna @, €, #, & och § står för varsitt tal mellan 1 och 9. Vilket tal är §? …*

B2012 nr 21, *Numren på de tre hus som jag och två av mina vänner bor i bildas av siffrorna A, B och C. Våra nummer är ABC, BC och C. Summan av numren är 912. Vilken siffra är B?*

B2005 nr 19, *Peter har ett lås med en tresiffrig kod. Han har glömt koden …*

24: Två tresiffriga tal

Prova, så som det beskrivs i nr 23, med siffror i kapsyler, resonera och gör tabeller.

Undersök liknande tal med olika siffror. Försök att komma fram till ett resonemang som kan användas på alla tal i motsvarande fall.

Tidigare problem

GyCadet2006 nr 21, *Den sista siffran i ett tresiffrigt tal är 2. Om denna siffra flyttas från sista till första plats så minskar talet med 36. Vilket är talets siffersumma?*

E2012 nr 13, *Du ska göra två tresiffriga tal och du ska använda siffrorna 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Varje siffra får du bara använda en gång. De två talen ska du sedan addera (lägga ihop). Vilken är den största summan du kan få?*

E2014 nr 1, *Lisa ska sätta in siffran 3 någonstans i talet 2014 så att hon får ett femsiffrigt tal. Det femsiffriga talet ska bli så litet som möjligt …*

B2001 nr 21, *Använd siffrorna 1, 2, 3, 4, 5 och 6 och bilda två tresiffriga tal. Varje siffra får användas endast en gång …*

Geometri

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan.

I geometri spelar också bilden en väsentlig roll, som underlag för kommunikation och som stöd för tanken. Med stigande ålder hos eleverna bör vi också ställa större krav på hur de använder bilder. Hur *vet* vi att vinklar är räta? Hur kan vi vara *säkra* på att en yta är hälften så stor som en annan? Att det ser så ut är inte ett tillräckligt starkt argument, utan vi måste också kunna motivera med hjälp av egenskaper hos de geometriska objekten.

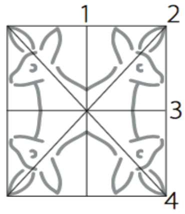
3: Vägmärken

Strävornaaktiviteten 4C6C *Spegelövningar* ger eleverna omedelbar feedback på vad som händer då en spegel vinklas på olika sätt över linjer, prickar och geometriska figurer. Diskutera kopplingen mellan spegeln och symmetriaxlar.

Titta på de vägmärken som inte har en eller flera symmetriaxlar och diskutera rotationssymmetri.

Ett liknande problem finns i årets Cadet, nr 2.

Ecolier 2010 nr 3, *Mary har en bild på fyra kängurur. Vilka av linjerna är symmetrilinjer?*



Cadet 2010 nr 1, *Hur många symmetrilinjer har figuren?*
(Samma figur som till höger, men utan symmetrilinjer inritade.)

6: Block av klossar

Att överföra den konkreta upplevelsen av en verklig kropp till en tvådimensionell bild kräver erfarenhet och övning. Många barn får sådan träning i samband med lek men en del måste få göra sina erfarenheter i skolan. Ett steg mellan det konkreta och den tvådimensionella bilden kan vi numera ta med hjälp av digital teknik, med vars hjälp eleverna kan undersöka och laborera med virtuella kuber. Det finns gott om appar till datorplattor och telefoner som kan användas för sådana uppgifter.

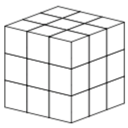
Bygg blocken med byggbara kuber, exempelvis Multilink. Variera storleken på rätblocket – experimentera med klossar i olika färger. Bygg exempelvis varje ”våning” i var sin färg.

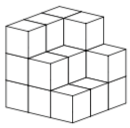
Vilket är det minsta rätblock som kan gömma klossar av en utvald färg – hur många kuber är dolda? Hur många röda är det om det finns sju blå som är gömda? Om det finns åtta blå? ... 20 blå?

Multilinkkuber kan användas till mycket mer än att bygga block av olika slag. I dokumentet ncm.gu.se/media/nywebb/matematikverkstad/material/multilink.pdf finns förslag på olika användningsområden som grundläggande talbegrepp, rumsuppfattning, mönster, bråk och procent, längd–area–volym, ekvationer, funktioner, diagram, kombinatorik och sannolikhet.

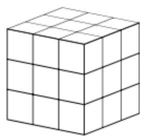
Tidigare problem

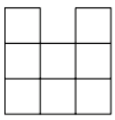
B2013 nr 2, *Natalie ville bygga en likadan kub som Elsa hade byggt, men hennes klossar tog slut. Hur många klossar till skulle Natalie behöva till sin kub?*


Elsas kub

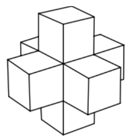

Natalies kub

B2014 nr 8, *Denna kub är gjord av 27 små kuber:*
Hur många små kuber måste man ta bort för att man ska se den här bilden när man ser på bygget från sidan, när man ser på det uppifrån och när man ser det framifrån?





C2014 nr 6, *Gustaf bygger med kuber som har kantlängden 1 cm. Han använder 7 kuber. Hur många fler sådana kuber behöver han om han vill bygga en kub med kantlängden 3 cm?*



C2003 nr 11, *Micke har 42 likadana små kuber med kantlängden 1 cm. Han bygger ett rätblock av samtliga kuber. Rätblockets basyta har omkretsen 18 cm. Vilken är rätblockets höjd?*

E2002 nr 15, *Robert bygger en tunnel av små likadana klossar …*

7: Lådan

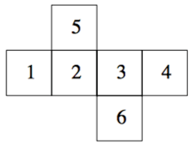
Uppgiften handlar om visualisering, att skapa sig en inre bild av något. Uppgiften blir förstås lättare att lösa om man gör det konkret, dvs klipper ut och viker, men vi behöver också träna förmågan att visualisera. Samtala om vad bilden visar och om vad som händer när man viker.

Strävornaaktiviteten 4C5C *Först se men inte röra* handlar om att vika lådor, först i tanken och sedan allt mer praktiskt.

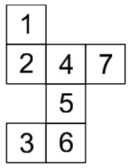
Ett Pentominospel innehåller tolv bitar. På ncm.gu.se/matematikpapper finns dessa för utskrift. Låt eleverna resonera två och två om vilka av bitarna som kan vikas samman till en låda och sätta ett kryss på den kvadrat som då kan bli botten. Klipp sedan ut och titta om det stämde. Om inte, resonera om varför det inte stämde.

Hur ser en utvikt vanlig tärning ut, om tärningen är korrekt prickad?

Tidigare problem

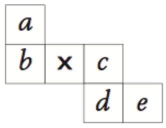


C2015 nr 4, *Bilden visar en utvikt kub. Stasiek adderar siffrorna på motstående sidor av kuben. Vilka tre summor får Stasiek?*



E2015 nr 17, *Greta tänker vika en kub av ett papper, där hon har ritat upp alla sidor som på bilden. Av misstag har hon ritat 7 sidor istället för 6. Vilken av sidorna måste hon ta bort?*

C2003 nr 3, *Rutnätet i figuren klipps ut och viks till en kub. Vilken sida kommer att hamna mitt emot den kryssmarkerade sidan?*



8: Papperskvadrater

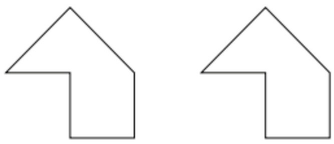
Rumsuppfattning och föreställningar av objekt i planet och rummet är viktiga men utvecklas mycket olika beroende på vilka erfarenheter elever gör. Här är det bra att klippa ut två kvadrater, pröva sig fram och även rita av olika figurer som kan läggas av kvadraterna. Alternativt kan eleverna rita in hjälplinjer på svarsalternativen för att visa hur kvadraterna är placerade. Jämför och resonera särskilt om A och E. Varför funkar E men inte A? Uppmärksamma också ordet ”inte”.

Låt eleverna hitta på fler liknande problem, både med kvadrater och andra geometriska figurer.

Tidigare problem

B2008 nr 5, *Carola lägger olika figurer med sina två trekantiga kort, där sidorna är lika långa …*

B2004 nr 5, *Du har två likadana pusselbitar …*



9: Kvadratens area

Varför vet vi att den grå är en kvadrat? Hur många olika områden finns det i figuren? Namnge formerna och ta upp likformighet och kongruens.

Vad händer om man fortsätter rita in allt mindre kvadrater?

Låt eleverna få förförståelse av Pythagoras sats. Rita av problemets kvadrat på centimeterrutat papper. Rita in kvadrater vid trianglarnas kateter och hypotenusa. Vad upptäcker eleverna?

Tidigare problem

C2011 nr 4, *Bilden visar tre kvadrater. Mittenkvadratens hörn ligger mitt på den stora kvadratens sidor …*

GyCadet2007 nr 6, *En liten kvadrat ligger inuti i en större kvadrat så som figuren visar …*

B2011 nr 21, *Fyra identiska rätvinkliga trianglar är ritade inuti en rektangel …*

E2013 nr 14, *Om vi drar linjer mellan mittpunkterna på sidorna får vi en ny, mindre triangel …*

B2002 nr 14, *I fyra lika stora kvadrater har sidornas mittpunkter märkts ut. I varje kvadrat har en viss yta målats …*

B2002 nr 15, *En rektangels area är lika med 1. Dra en rät linje genom mittpunkterna på två intilliggande sidor på en sådan rektangel …*

B2001 nr 19, *Den största kvadratens area är 16 cm*^{2} *och den minsta kvadraten, i mitten, har arean 4 cm*^{2} *…*

13: Klockan i spegeln

I detta fall handlar det inte om tid utan här är det mer ett geometriskt problem att kunna se hur den spegelvända bilden ser ut.

Resonera om hur visarna förflyttar sig när man ser dem i en spegel. Använd gärna en spegel och se efter. För den (exempelvis läraren) som ”kan klockan” är det nyttigt att se hur svårt det kan vara att läsa av en klocka. Paradoxalt nog kan det vara så att ju bättre man kan klockan, desto svårare är det att avläsa den spegelvänt.

Ett annat sätt för att övertyga sig om vilken lösning som är korrekt kan helt enkelt vara att hålla upp papperet mot ljuset!

Strävornaaktiviteten 4C *Två konstiga klockor* tar upp att den analoga klockan består av två skalor som är beroende av varandra. Genom att fokusera på en visare åt gången kan det bli enklare att förstå vad var och en av dem visar. Aktiviteten kan vara nog så utmanande att resonera om även för elever som är bra på att läsa av analoga klockor.

Tidigare problem

E2001 nr 1, *Teckningarna föreställer talen 2, 3 och 4 med sina spegelbilder.Hur ska nästa teckning se ut?*

B2010 nr 2, *Siffran fyra speglas två gånger så som på bilden. Vi gör samma sak med siffran fem …* Siffran ska först speglas i en linje och därefter ska den nya figuren speglas i en annan linje. Undersök hur våra andra siffror skulle speglas på motsvarande sätt. Vilka blir oförändrade? Vad beror det på? Undersök också bokstäver på samma sätt. Pröva att vrida speglingslinjen. Påverkar det speglingen?

J2008 nr 3, *För att fira nyåret 2008 tog Bertil på sig en t-tröja med texten* 2008 *tryckt på framsidan. Han ställde sig sedan på händer framför en spegel. Nina stod på fötterna bredvid Bertil. Vilken text såg hon i spegeln?*

16: En vikt cirkel

Vik och vik upp, benämn bråkdelarna. Försök även vika och klippa de övriga lösningarna.

Diskutera grader i en cirkel, hur man kan känna igen de vanligaste vinklarna och vad ordet parallellt betyder.

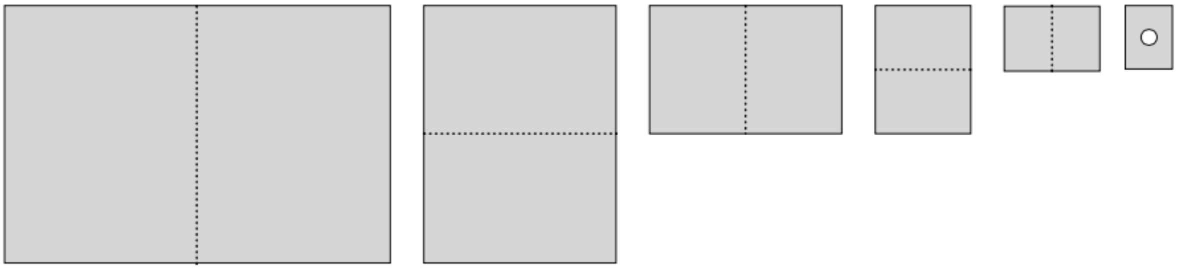
Lösningsförslagen ser lite ut som snöstjärnor, men de har bara fyra uddar. Hur viker man papperet för att få en sexuddig snöstjärna? Resonera och låt eleverna prova sig fram. Ett sätt är att utgå från en liksidig sexhörning och vika fram symmetrilinjerna som går från hörn till hörn.

Läs gärna Karin Bojs artikel *Klart som kristall att varje flinga är unik* i Nämnaren 2011:1.

Tidigare problem

C2012 nr 7, *Viktor viker ihop ett pappersark på mitten och gör sedan två raka klipp med en sax …*

B2004 nr 10, *Maria viker ett papper fem gånger som figuren (se nästa sida) visar. Sedan sticker hon hål genom det hopvikta papperet …*



C2003 nr 1, *Ett papper viks två gånger. Därefter klipper man hack i det. Hur ser pappret ut när det vecklas ut?* …

B2001 nr 2, *Hur ser detta ihopvikta papper ut om man vecklar ut det?* …

17: Skära ut rutor

Är det möjligt att fylla hela kvadraten? Resonera om att 25/4 blir lite mer än 6, dvs bör det vara möjligt att få in sex delar men att det blir någon ruta över. 24/4 = 6, alltså blir det en ruta över.

Klipp ut och pussla. Använder exempelvis 2- eller 3-cmrutat papper som finns att skriva ut från ncm.gu.se/matematikpapper. Diskutera ord som vända, vrida, kongruens och likformighet.

Kan den tomma rutan hamna var som helst? Eller bara på vissa positioner? Vilka i så fall?

Pusselbiten är konstruerad av fyra småkvadrater. Vilka andra former kan en bit med fyra småkvadrater ha? Låt eleverna argumentera för att alla dessa olika bitar har samma area. Undersök om de också har samma omkrets. Vilken form har minst omkrets? Störst?

En bit med tre kvadrater kallas *tremino*. Vilka olika sådana bitar finns? Vilka kvadrater kan täckas med sådana? En bit med fem kvadrater brukar kallas *pentomino*, eller *pentamino*. Vilka olika sådana bitar finns? Kan man täcka kvadraten i uppgiften med sådana, om de har en annan form än alla på rad? (Se även under nr 7.)

Tidigare problem

E2012 nr 6, *Du har pusselbitar som består av fyra kvadrater* …
(Samma pusselbit som i årets tävling, men uppgiften ser lite annorlunda ut.)

B2013 nr 10, *Leo har en massa bitar som ser ut som den här till höger* …
(Annan pusselbit som ska pusslas in i en 4 x 5-rektangel.)

C2013 nr 3, *Ann har ett rutat papper som på bilden.* […] *Hur många små kvadrater blir kvar av pappret?* …

C2003 nr 15, *Karl har till uppgift att täcka rutnätet* […] *Hur många trerutorsbitar måste han minst använda?* …

19: Rektanglarnas omkrets

För resonemang om hur mycket som läggs till respektive tas bort på dels den stora rektangeln, dels på de små rektanglarna.

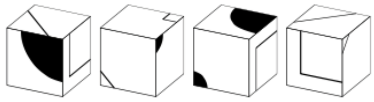
22: Svart-vit kub

Bygg med hjälp av exempelvis multilinkkuber. Diskutera med eleverna hur man utifrån en sida kan avgöra hur de övriga sidorna ser ut.

Vad händer om en vit kub byts mot en svart? Hur kan en sådan åttabitars kub se ut? Rita alla sex sidoytorna.

Låt eleverna konstruera liknande egna problem genom att bygga, formulera problemet, rita, låta kamrater lösa problemet och beskriva sin sin lösning och slutligen gemensamt resonera om problemet och lösningen.

C2014 nr 22, *Vi har fyra identiska kuber…*



B2005 nr 7, *Vilken av dessa kuber kan du få om du viker ihop rutmönstret till höger?…*

Problemlösning och resonemang

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och hjälp eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. I denna process är resonemang en viktig del.

1: Magneterna

Låt eleverna jämföra om det är samma magneter de tar bort. Om de tar olika, hur kommer det sig att alla kort ändå sitter kvar?

Sätt upp olika antal kort med olika antal magneter och öva upp den visuella förmågan att snabbt kunna se konsekvenserna av att plocka bort de olika magneterna.

4: Besticken

Prova med olika antal bestick och tallrikar.

10: Huvudet på kudden

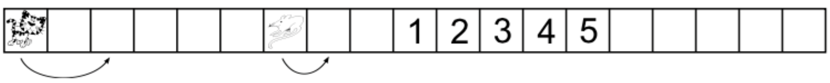
Resonera om vad som händer om en person vänder sig om? Två? Tre? Alla fyra?

11: Ekorrarna

Använd konkret material på en (ograderad) tallinje eller låt eleverna dramatisera på golvet! Resonera om vad som händer i varje steg.

Tidigare problem

E2013 nr 9, *Katten och musen rör sig åt höger. När musen hoppar ett steg hoppar katten två steg, på samma tid. På vilken ruta fångar katten musen?*



Ett spel som påminner om ovanstående problem är *Karamellen* som finns att hämta på ncm.gu.se/media/namnaren/npn/arkiv_xtra/karamellen.pdf

18: Kranförarna

Utgå från de felaktiga svarsalternativen. Om Natalia hade jobbat 1, 2, 4 eller 5 dagar, hur många dagar skulle då de andra två jobba?

21: Luigis restaurang

Konkretisera problemet med laborativt material, t ex kvadratiska (bord) och runda (stolar) markörer. Ge eleverna ett eller båda lösningsalternativen och låt dem resonera om kopplingen mellan de med material konkreta borden och stolarna och de abstrakta lösningarna.

Tidigare problem

B2014 nr 13, *På en restaurang finns det 16 bord. Vid varje bord är det 3, 4 eller 6 platser. Vid de bord som har 3 eller 4 platser kan det sammanlagt sitta 36 personer. Restaurangen har plats för totalt 72 personer. Hur många bord är det som har 3 platser?*

E2003 nr 18, *Jorma har fått pengar för att köpa tennisbollar. Om han köper fem bollar så får han 10 kronor kvar, men för att köpa sju bollar måste han låna 20 kronor. Hur mycket kostar en tennisboll?*

C2014 nr 19, *Kapten Krok och hans pirater gräver fram guldmynt …*

GyCadet2006 nr 13, *Mormor sa till barnbarnen: Om jag bakar 2 pajer till er var …*

GyCadet2005 nr 6, *Några kajor sitter på några stolpar i en trädgård …*

B2001 nr 13, *Om den röda draken hade haft 6 huvuden fler än den gröna …*

J2004 nr 8, *Jonny och Tommy spelar pingis. Om Jonny hade haft 5 poäng mer …*

Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. &Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar äldre än ett år finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Matematiklyftets material finns alltså tillgängligt för alla. På Lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.