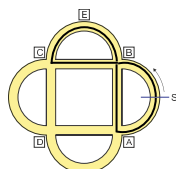




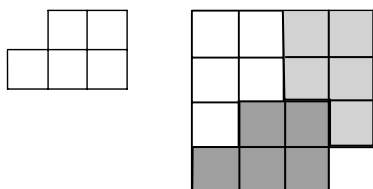


14 D



15 C 6 Det finns 3 par av vänner. Varje par skickar två SMS, till varandra.

16 A



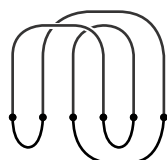
17 C 3 2 och 3 hamnar annars på samma sida av kuben. 2 är inte så bra att klippa bort eftersom mallen skulle falla sönder då.

18 D 8 Läger vi skivorna på varandra, utan att vrida täcker vi 8 rutor. Hur vi än vrider kan vi inte få fler..

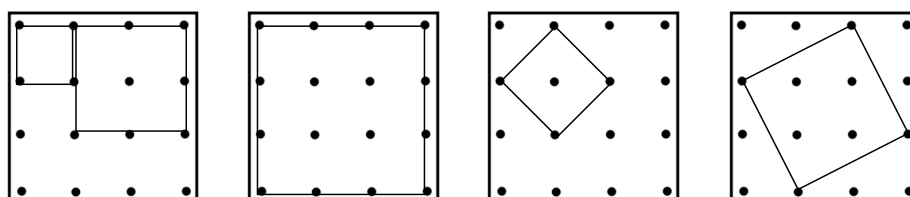
19 D 5 eller 7  $2+7=3+6$  leder till 5 i mitten, eller  $2+6=3+5$  leder till 7 i mitten.

20 E 15 Oscar har bollarna med 8, 7 och 0.  
Maria ska ha 90 med tre bollar. Det kan hon få med 5, 6 och 3 eller med 5, 2 och 9. Hector ska ha produkten 72 med 4 bollar. Det kan han få på två sätt: 4, 1, 9 och 2 eller 4, 1, 6 och 3.

21 C 



22 D 5



23 D 27 Han kan välja ett huvud på 3 sätt, en mellandel på 3 sätt och en bakdel på 3 sätt det ger  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  olika djurbilder.

24 C Charlie Han bakade 13 kakor på lördagen. Charlie hade 26 kakor på söndag kväll. 26 är varken delbart med 3, 4, 5 eller 6, så han måste ha varit den som hade dubbelt så många kakor på söndag kväll som på lördag kväll. De andra hade som mest 28 kakor på söndag kväll och inte mera än en tredjedel av detta på lördag kväll, alltså mindre än Charlies 13.



# Arbeta vidare med Ecolier

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar:

- Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?
- Är lösningarna tydliga?
- Är resonemanget korrekt?
- Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: "Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?"

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera kring både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under några rubriker *Tal*, *Geometri* och *Problemlösning och logiska resonemang*. Naturligtvis kan flera av problemen passa under flera rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, [ncm.gu.se/kanguru](http://ncm.gu.se/kanguru), där alla tidigare omgångar är samlade. Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på [ncm.gu.se/node/4742](http://ncm.gu.se/node/4742).



## Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Några grundläggande aspekter som barn i denna ålder kan resonera om är positionssystemet, udda och jämna tal, räknesättens innebörd, tals uppdelning och enklare faktorisering. Dessutom brukar det ofta i Kängurun finnas problem som handlar om grundläggande bråk. Problemen utmanar också barnen strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra därför eleverna att ställa fördjupande frågor. Hjälpt dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

- 1: Variera de ingående talen. Sätt ut talet i det sista molnet och arbeta baklänges. Börja med en enklare variant. Diskutera räknesättens relation. Pröva att göra om uppgiften så att de övriga alternativen blir riktiga.

E 2007:8

- 3: Detta är grundläggande aritmetik, men också en förberedelse för ekvationslösning. Resonera gemensamt fram lösningen. Hur vet vi att det står 6 bakom kvadraten? Vilka lösningar kan vi få om vi inte vet det övre sambandet? Diskutera betydelsen av att vi måste hålla reda på två uttryck samtidigt. Här passar det mycket bra att låta eleverna göra egna exempel, då konstruktionen kräver minst lika mycket som lösningen.

Låt också symbolen stå för uttryck,  $16 - 4$ ,  $2 \cdot 3$  etc. Då blir uppgiften öppnare.

B 2008:2; B 2009:12; B 2010:1

- 4: Varför kommer vi till alla punkter, inte bara till de udda talen? Vad hade hänt om vi också hade haft med 0 i ringen? Att göra steghopp i talraden är en aktivitet som bör återkomma, med varierad steglängd, ökad svårighet och i de talområden och med de tal som eleverna arbetar med. Uppgiften här skiljer sig från sådana vanliga talradsaktiviteter, eftersom det inte finns någon nolla.

Gör en ring och markera 10 punkter med 0–9. Låt dessa stå för entalssiffran i talen. Undersök hur mönstret ser ut för multiplikationstabellerna, för tvåans tabell, treans tabell etc. Vad ser man? Vilken nytta kan man ha av att veta vilka entalssiffror som dyker upp i respektive tabell?

- 5: Diskutera olika sätt att betala 7 euro i verkligheten och uttryck med symboler. Undersök systematiskt vilka olika belopp Martina kan betala utan att växla.

Passa på att berätta om de nya mynt och sedlar som kommer att införas under 2015-16, se [www.riksbank.se/sv/Sedlar--mynt/](http://www.riksbank.se/sv/Sedlar--mynt/).

- 6: Arbeta med att faktorisera tal. Jämför tal som har många faktorer, som t ex 24 med tal som bara kan skrivas som en gång sig självt, dvs primtal. Gör areor som illustrerar faktoriseringen. Att kunna se multiplikation både som en upprepad addition och som en area är viktigt för det fortsatta matematikarbetet.

- 19: Diskutera lösningsstrategier. Vilka samband kan vi utnyttja? Undersök alla alternativ. Varför finns det bara udda tal med bland alternativen?

B2010:10; E2011:16

- 20: I problem 20 får vi användning av faktorisering igen. Produkten av alla tal utom 0 är  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$  (Vi behöver inte beräkna den.) Eftersom Oscar får resultatet 0 vet vi att han har bollen med 0. Produkten av de tal som Hector fick är 72 och de som Maria fick är 90. På vilka sätt kan vi få 72 och 90? Finns det andra lösningar? Skulle lösningen bli en annan om fördelningen av bollar var en annan eller inte bestämd? Försök att konstruera ett liknande problem.

- 24: Problem 24 handlar om delbarhet och om sambandet mellan division och multiplikation, om relationen dubbelt – hälften, tre gånger och en tredjedel etc.

Beräkna hur många kakor de andra barnen hade på lördagskvällen.

E2011:14



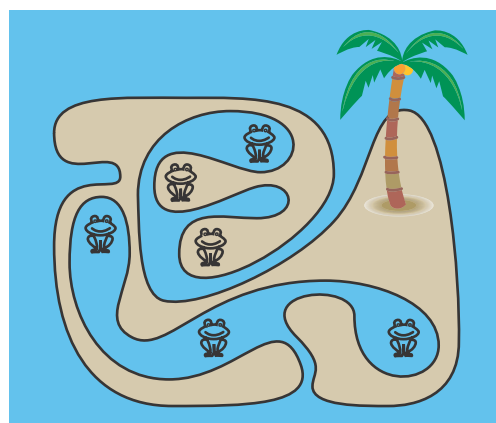
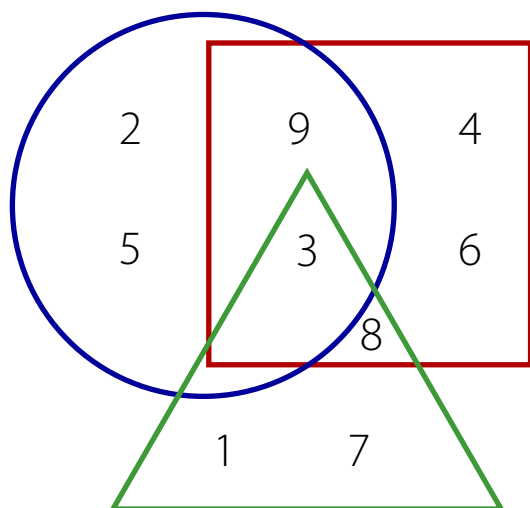
## Geometri och rumsuppfattning

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan. och flytta formerna i huvudet. I efterarbetet kan man förstås också klippa ut och prova om det behövs.

- 2: Uppgiften skulle också kunna placeras under rubriken tal, då ihopkoppling av de två skenorna kan ses som en addition. För elever i den här åldern handlar det nog ändå mer om att uppfatta och förstå bilden. Hur många hål i skenan kommer att läggas över/under den andra skenan? Undersök gärna konkret. Diskutera det generella sambandet att ju större överlappning desto kortare skena. Varför blir det så? När utnyttjar vi detta i vardagsammanhang? Hitta konkreta exempel som barnen kan ha erfarenhet av.

Ett liknande problem är årets Benjamin II, som handlar om att klistra samman remsor.

- 7: Uppgiften handlar om att avgöra vad som är innanför och vad som är utanför. Vilken strategi använde eleverna? Färglägg ön så framgår det tydligare vad som är land och vad som är hav.



Vilka tal finns i kvadraten men inte i cirkeln?  
Vilka tal finns i cirkeln och kvadraten?  
Gör egna liknande uppgifter.

E2004:7; E2009:2

- 8: Undersök för andra svarsalternativ vad som är fel med dem.

Undersök olika föremål och rita dem från olika håll. Samtala om hur olika delar ser ut från andra håll och låt barnen komma fram till hur höger kan bli vänster om man ser på något från andra hållet. Utgå sedan från bilder och låt eleverna rita motivet från ett annat håll.

Se Wallby, K. *Matematiken i bilden eller bilden i matematiken*, Nämnaren 1996:2.

- 14: Även problem 14 handlar om att se något från ett nytt perspektiv. Här är höger och vänster viktiga begrepp. Bilden är en enkel karta. Använd kartor över närområdet och genomför promenader på kartan. Låt eleverna beskriva vägen utifrån kartan.

Använd uppgiftens bild och beskriv hur man ska cykla om man vill ha andra slingor.

Låt eleverna formulera egna liknande problem, vilket kräver lika mycket matematikkunskaper som att lösa dem.

B2002:13; B2008:18; B2013:3; E2013:7



- 9: Finns det olika sätt att lägga trianglarna? Att kunna täcka figurer med mindre figurer är viktigt för att utveckla förståelse för area. Låt eleverna göra egna liknande figurer som de delar in i mindre delområden, som tillsammans täcker hela figuren.

Använd figuren för att beräkna arean. Hur stor är figurens area om triangelns area är 1? Ge rutorna olika storlek och jämför arean. Låt sidan på en mindre ruta vara 1, 2 och 4. Undersök relationen mellan areorna.

E2001:3

- 16: Även problem 16 handlar om att täcka/dela upp en area, men här är det lite svårare då vi måste vrida och vända på bitarna. Varför går det inte att klippa alla former? Det är ju 5 bitar i alla? Låt eleverna resonera kring betydelsen av både bitarnas form och storlek.

Liknande problem har funnits många gånger tidigare, t ex B2003:5; E2006:11

- 11: Hur många sidor, hörn och kanter har en kub?

Varje hörn har en egen kub och varje sida och kant har en egen liten kub, som sitter mitt på sidan/kanten:  $6 + 8 + 12 = 26$ , var finns den 27:e lilla kuben? Hur många osynliga kuber finns det i en kub med sidan 4? Med sidan 5?

Även detta är en mycket vanlig problemtyp i Kängurun, några ex: E2002:15; E2003:11; E2006:2; E2007:11; E 2007:15; B2013:2

- 17: Att vika och vika ut en tredimensionell form är en utmaning för många. Undersök kuben konkret och se hur de olika sidorna förhåller sig till varandra. Hur skulle den färdiga kuben se ut om någon annan sida togs bort?

Hur ser en utvikt vanlig tärning ut, om tärningen är korrekt prickad (motstående sidor har tillsammans sju prickar)?

Tidigare problem E2003:12; E2004:12; E2005:13; B2006:6

- 18: Låt eleverna beskriva vilka rutor som är svart och vilka som inte är svarta. Be dem berätta hur de löser uppgiften.

Resonera tillsammans: Hur många rutor totalt är mörka? Varför räcker inte de 11 mörka rutorna, det är ju bara 9 rutor som ska täckas?

Ett sätt att resonera: Skiva 2 och skiva 3 har båda en rak och en diagonal vit rad. När vi lägger dem ovanpå varandra får vi, om vi inte vrider någon skiva eller vrider ett halvt varv, en rak vit rad. Om vi vrider den ena skivan ett kvarts varv får vi en diagonal vit rad kvar. Ark 1 har varken en rak eller en diagonal svart rad, så den kan inte täcka den vita raden. Minst en vit ruta måste bli kvar.

Hur många rutor kan som mest täckas om vi använder två av skivorna? Går det att täcka alla rutor om vi ändrar en ruta på en skiva?

B2004:4; E2009:6

- 21: Samtala om de olika alternativen, varför stämmer de inte? Uppgiften har samband med problemet att rita ett klassiskt kuvert med ett streck, utan att lyfta pennan.

Se också B2010:8 och 18.

- 22: Konstruera kvadraterna på geobrädet. De tre "raka" kvadraterna hittar nog de flesta. Kanske också den kvadrat som har sidan "ett snett hopp". Många tror att denna kvadrat, som alltså står på sin spets inte längre är en kvadrat utan bara en romb (det är en romb också).

Den kvadrat som troligen är svårast att hitta har sidan "diagonalen i en  $2 \times 1$ -rektangel".

Diskutera varför dessa snedställda kvadrater fortfarande är kvadrater.

Hur stor area har de olika kvadraterna?



## Logiska resonemang och problemlösningstrategier

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och uppmuntra eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med hjälp av stödjande frågor. Hjälpe eleverna att strukturera informationen i texten.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att "veta vad man ska göra". Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. I denna process är resonemang en viktig del.

- 10: Beräkningen i problemet är ingen svårighet för elever i denna ålder, däremot kan strukturen i problemet upplevas som komplicerad. Använd uppgiften för att diskutera hur man kan angripa sådana problem. Variera antalet äpplen och bananer.

Det finns i alla tidigare omgångar mängder av problem som kan användas för att utveckla elevernas förmåga att bearbeta information.

- 15: Även i problem 15 måste man gå igenom informationen mycket noga. Alternativet 3 finns inte, men vad skulle det ha varit svar på? Här måste vi räkna med att ett par skickar två SMS, dvs ett i vardera riktningen. Jämför detta med "handskakningsproblem". Låt nyckelpigorerna "skaka hand med varandra" om de är vänner. Vilka likheter och skillnader är det i dessa två olika situationer?

- 12: För många är det svårt att arbeta med ett okänt antal, i det här fallet 3 fler än något som vi inte vet. Undersök systematiskt:

Om Milan varit först:      xxxM                      (4 åkare)

Om han varit tvåa:          xxxxMx                     (6 åkare)

Om han varit trea            xxxxxMxx                 (8 åkare)

Ändra antalet och gör motsvarande. Om det är dubbelt så många bakom som framför, vilka möjligheter finns det då? Ändra förutsättningen med att det är 10 åkare, hur förändras problemet då?

E2002:17

- 13: Här passar det med systematiskt ordnande. Uppgiften har en begränsning, skeppet och dockan måste stå bredvid bilen, så kombinationsmöjligheterna blir inte så många. Hur många sätt finns det om vi släpper den begränsningen?

E2012:15



23: Detta är ett klassiskt kombinatorikproblem, utan begränsningar. För den som kan är det alltså en rutinuppgift  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ . Men varför?

Låt eleverna undersöka systematiskt. Gör både tabeller och trädidiagram där strukturen framträder:

Gris=G, Haj=H, Noshörning=N

Ordning: Huvud – kropp – bak

G-G-G

G-G-H

G-G-N

G-H-G

G-H-H

G-H-N

G-N-G

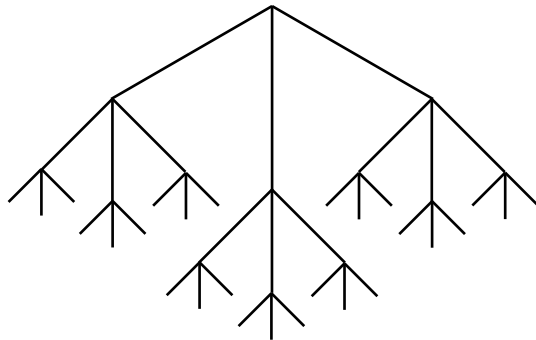
G-N-H

G-N-N

För hajhuvud och noshörningshuvud får vi också nio möjligheter.

### Med trädidiagram

Vi väljer huvud – kan göras på tre sätt, sen kropp, också på tre sätt och därefter bak på tre sätt:



Detta problem kan varieras på många sätt. Låt eleverna undersöka, kombinera och dokumentera sina kombinationer.

E2007:6





## Att läsa

- Bergius, B. & Emanuelsson, L. (2008). *Hur många prickar har en gepard?* NCM, Göteborgs universitet.
- Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.
- Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använd tal*. NCM, Göteborgs universitet.
- Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.
- Wallby, K m fl (red) (2014). *Matematikundervisning i praktiken. NämnarenTema 10*. NCM, Göteborgs universitet.
- Nämnaren*. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2009 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, [namnaren.ncm.gu.se](http://namnaren.ncm.gu.se). Du finner dem via *artikel databasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.
- Strävorna* finns på [ncm.gu.se/stravorna](http://ncm.gu.se/stravorna). Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.
- Matematiklyftets lärportal* [matematiklyftet.skolverket.se](http://matematiklyftet.skolverket.se). På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Om ni inte har och inte planerar att läsa problemlösningsmodulen inom Matematiklyftet, finns den alltså ändå tillgänglig. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.