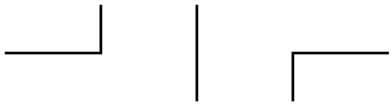
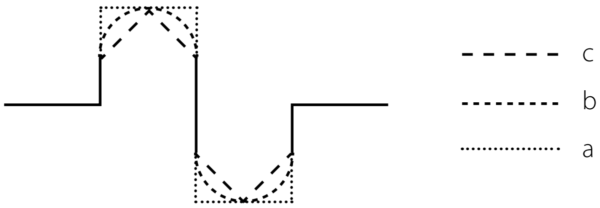
Lösningsförslag Junior 2014

1 E: $c < b < a$
Längden av linje a är 16 l.e., linje b $(8 + 2\pi)$ l.e. och linje c $(8+4\sqrt{2})$ l.e.
Alternativ lösning: Grundfiguren har 4 l.e. vertikalt och 4 horisontellt, något omflyttade.



Lägg in de delar som är olika i samma figur:



2 A: 16 cm^2
De två sexhörningarna är likformiga med längdskala 2. Areaskalan är längdskalan i kvadrat, dvs 4. Den stora sexhörningens area är $4 \cdot 4\ cm^2 = 16\ cm^2$

3 C: 77
Differensen mellan den sökta summan och 44 måste vara delbar med 3.
$77 - 44 = 33 = 3 \cdot 11$.

4 B: Någon löste mindre än 21 problem
Negationen till alla är ”inte alla”.

5 B: 8

$$a^{-3b} = \frac{1}{a^{3b}} = \frac{1}{(a^b)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

Alternativ lösning: Om $a^b = \dfrac{1}{2}$ så är $a^{-b} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ och $a^{-3b} = (a^{-b})^3 = 2^3 = 8$.

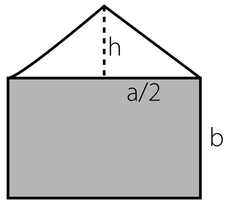
6 E: $b^2 + 1$
Faktorisering ger att alternativen A: $2(b + 1)$, B: $(b + 1)(b - 1)$, C: $b(b + 1)$ och D: $-(1 + b)$ alla innehåller faktorn $(b + 1)$, men inte E: $b^2 + 1 = (b+1) \cdot (b - 1) + 2$

7 E: 111
$(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$, dvs siffran 1 följd av 110 nollor.

8 B: 2,3
För en kvadrat gäller att diagonalerna skär varandra i mittpunkten och under rät vinkel. Den givna diagonalen har längden 6, dess mittpunkt är då (2, 0) och de två övriga hörnen har koordinaterna (2,3) och (2,-3).

9 C: 2010
Potenser av 2 är 1, 2, 4, 16, 32 och 64. För att summan ska kunna bli 100 måste 64 och 32 vara med. Alltså återstår 4 och barnbarnet är född 2010.

10 B: 7:49
Deras sammanlagda tid i badrummen är 96 minuter, den kan fördelas på (23+13+11) min = 47 min i ena badrummet och (22+18+9) min = 49 min i andra badrummet.



11 C: Tavla C hänger närmast golvet.
Låt *a* vara tavlans bredd och *b* tavlans höjd. Höjden *h* från tavlans övre kant till kroken kan bestämmas med Pythagoras sats, $h = \sqrt{1-(a/2)^2}$. Det största värdet på *h*+*b* ger den tavla som hänger närmast golvet. Det ger

A: $0,4+\sqrt{1-(0,6/2)^2} = 0,4+\sqrt{0,91} < 1,4$

B: $0,5+\sqrt{1-(1,2/2)^2} = 0,5+\sqrt{0,64} = 1,3$

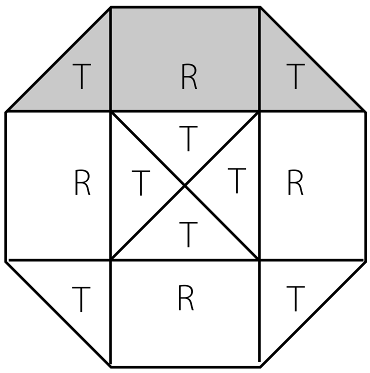
C: $0,9+\sqrt{1-(1,2/2)^2} = 0,9+\sqrt{0,64} = 1,7$

D: $0,6+\sqrt{1-(1,6/2)^2} = 0,6+\sqrt{0,36} = 1,2$

E: $1+\sqrt{1-(1,6/2)^2} = 1+\sqrt{0,36} = 1,6$

12 D: 12 cm^2
Dela in åttahörningen i rektanglar *R* och trianglar *T* enligt bilden. Då är $R + 2T = 3$. $4R + 8T = 12$.

Alternativ lösning: Låt sidan i åttahörningen ha längden *a*. Då är kateternas längd i de rätvinkliga trianglarna $a/\sqrt{2}$. För det skuggade området gäller att arean är $\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{2} = 3$. Den undre parallelltrapetsen har samma area pga symmetri.



För rektangeln gäller att arean är

$$a\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}+a\right) = 2\frac{a^2}{\sqrt{2}}+a^2 = 2\left(\frac{a^2}{\sqrt{2}}+\frac{a^2}{2}\right) = 2\cdot 3 = 6$$. Den totala arean är 12.

13 E: 23
Summan av talen på två motsatta sidor är alltid udda eftersom det bara finns ett jämnt primtal. Då måste talet som står mittemot 35 vara 2 eftersom högre primtal än 2 ger en jämn summa. Alltså är summan 37 och talet som står mittemot 14 är 23.

14 A: Om *a* ökar
Volymen av rätblocket är från början *abc*. Låt *d* vara det positiva tal som *a* eller *b* eller *c* ökas med. Då kan rätblocket få följande volymer:

$(a + d)bc = abc + dbc$
$a(b + d)c = abc + dac$
$ab(c + d) = abc + dab$
Eftersom $a < b < c$ så är $dab < dac < dbc$ och volymen blir störst om sidan a ökar.

15 B: 18
Låt M vara den gemensamma medelpunkten och T punkten där kordan BC tangerar den mindre cirkeln. Eftersom BC är en tangent så är $\angle CTM = 90°$. $\angle ABC = 90°$ då den är randvinkel till en diameter. Eftersom $\angle C$ är gemensam så är triangel CMT likformig med triangel CAB. Eftersom $AC = 2 \cdot MC$ så är $AB = 2 \cdot MT$, dvs $MT = 6$ och stora cirkelns radie = 18.

16 D: 10
6 veckor = $6 \cdot 7$ dagar = $6 \cdot 7 \cdot 24$ dygn = $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ sekunder. Faktorisering ger $6 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 10!$

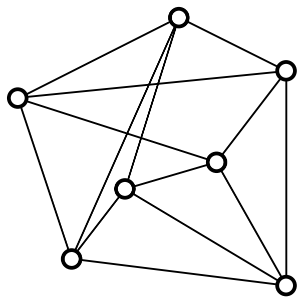
17 A: 2
På två motsatta sidor finns alla åtta hörnen. Summan av alla hörntalen är 36, alltså är summan för varje sida 18. Då är fjärde talet på den undre sidan lika med 7. De tal som återstår är 2, 3, 5 och 8. Betrakta den högra sidan. Låt det fjärde hörnet vara y, då gäller att $x + y = 7$. Alltså måste talen vara 2 och 5. Betrakta den bakre sidan. Låt det fjärde hörnet var z, då gäller $x + z = 5$. Alltså måste talen vara 2 och 3. Eftersom x är gemensamt är det 2.

18 C: 18

$$\frac{25}{19} = 1 + \frac{6}{19} = 1 + \frac{1}{\frac{19}{6}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}} = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}$$

Ovanstående ger $p = 1$, $q = 3$ och $r = 6$ och $pqr = 18$. Observera att $\frac{1}{r} \leq 1$ och $\frac{1}{q + \frac{1}{r}} \leq 1$ eftersom q och r är positiva heltal, alltså är $p = 1$.

19 D: 9
Låt antalet förbindelser från varje ort vara n. Då är totala antalet förbindelser $\frac{7 \cdot n}{2}$ alltså måste n vara jämnt. Fem förbindelser är inritade och en ort har tre, så minsta antalet förbindelser från varje ort kan vara fyra. Det ger totalt 14 förbindelser, så nio är det minsta som måste ritas in.



20 C: 68

Primtalsfaktorisering av 18 är $2 \cdot 3 \cdot 3$. Talen som står på tavlan måste uppfylla minst ett av följande villkor: 1. Inget av talen är jämnt. 2. Högst ett av dem är delbart med 3 och det talet är inte delbart med 9. Villkor 1 ger 50 tal. Villkor 2 ger: Det finns 33 tal som är delbara med 3, men bara ett av dem står på tavlan, det ger $100 - 32 = 68$ tal.

21 B: 45°

Låt de två lika stora vinklarna vid punkten P vara v grader. Dra radien OT. Eftersom PT är en tangent så är $\angle OTP = 90°$. Då är $\angle TOP = 90° - 2v$. $\angle TRP$ är randvinkel till $\angle TOP$, alltså är $\angle TRP = 45° - v$. Yttervinkelsatsen ger att $\angle TSP = 45° - v + v = 45°$.

22 B: $\frac{125}{8}\,\text{cm}^2$

Triangeln ABC är rätvinklig med den räta vinkeln i A eftersom Pythagoras sats är uppfylld för längderna. Triangeln AMF är rätvinklig med den räta vinkeln i M. Eftersom M är mittpunkten på sidan BC och $\angle BAC$ är rät så kan triangeln ABC inskrivas i en cirkel med medelpunkt i M och radien $MC = 5$. ($\angle BAC$ är randvinkel till den raka vinkeln $\angle BMC$) . Då är $AM = MC$. Kvadraten har alltså sidan 5. $\angle MAC = \angle MCA$ eftersom triangeln MAC är likbent. Triangel AMF är likformig med triangel CAB. Det ger

$\frac{MF}{6} = \frac{5}{8}, MF = \frac{15}{4}$. Den sökta arean är $5 \cdot 5 - \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8}$

23 E: 8

Det gäller att sannolikheten för att ingen känguru är silverfärgad är detsamma som sannolikheten för att alla är guldfärgade. Antag att det finns x guldfärgade kängurur. Följande förhållande kan tecknas för de tre kängurur som möts:

$$\frac{x}{9} \cdot \frac{x-1}{8} \cdot \frac{x-2}{7} = \frac{2}{3}$$

$x(x-1)(x-2) = 8 \cdot 7 \cdot 6$, och $x = 8$.

24 C: 3

$f(x) = ax + b$ och likheten $f(f(f(0))) = 2$ ger

$f(f(f(0))) = f(f(b)) = f(ab + b) = a(ab + b) + b = a^2b + ab + b = 2$.

Likheten $f(f(f(1))) = 29$ ger

$f(f(f(1))) = f(f(a + b)) = f(a(a + b) + b) = a(a(a + b) + b) + b = a(a^2 + ab + b) + b = a^3 + a^2b + ab + b = 29$

$a^2b + ab + b = 2$ ger

$a^3 + 2 = 29$,

alltså är $a = 3$.

Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2014 – arbeta vidare

De flesta av årets Känguruproblemen kan direkt kopplas till innehållet i kursplanerna i Ma 1 och Ma 2. Få av dem är direkta rutinuppgifter men alla bygger på grundläggande förståelse och kunskaper. Flertalet av dem kan kopplas till det centrala innehållet problemlösning men även till förmågan problemlösning. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer och begrepp att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till Matematiktermer för skolan (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Vill man inte arbeta genom samtliga problem kan man exempelvis välja ut problem som har något gemensamt från årets olika tävlingar, eller liknande problem från tidigare års tävlingar. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera kring både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemets innebörd ändras.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742. Fler litteraturförslag finns i slutet av detta dokument.

Taluppfattning, aritmetik och algebra

Ur kursplanen för Ma 1b och Ma 1c:

A1 Egenskaper hos mängden av heltal, olika talbaser samt begreppen primtal och delbarhet.

A2 Metoder för beräkningar inom vardagslivet och karaktärsämnena med reella skrivna på olika former inklusive potenser med reella exponenter

A3 Generalisering av aritmetikens räknelagar till att hantera algebraiska uttryck

Och i kursplanen för Ma2b och Ma2c

T7 Algebraiska och grafiska metoder för att lösa andragradsekvationer

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. I flera av årets problem nämns siffra och tal. Diskutera med eleverna när har vi en siffra och när har vi ett tal. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen med tillhörande begrepp, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grunden för arbete med tal i bråkform.

J5, J7, J9

Dessa problem bygger på begreppet potenser. I samband med dessa uppgifter kan det vara lämpligt att ta upp potenslagarna.
I J5 passar det speciellt bra att diskutera olika lösningsmetoder.
Låt också eleverna göra egna liknande problem.

I arbete med J7 kan man använda problem J21 från 2012
Cadet 12 i årets tävling är en variant på problem J9.
Även Student 8, 2012 passar bra att använda i detta sammanhang.

Fler problem med tillämpningar av potenslagar är Junior 2013:1, 2013:44, 2012:18 och 21, Student 2012:6 och 8 och Junior 2011:12 och Sudent 2011:3

J3

Diskutera delbarhetsregler och begreppet multipel. Ändra gärna förutsättningarna.
– Hur blir det om det är två personer, fyra personer osv.?

J13, J16, J20

Ta upp entydigheten i primtalsfaktoringen (Aritmetikens fundamentalsats) och summan av udda och jämna tal. Diskutera olika lösningsmetoder.

Se också Cadet 21 på årets tävling.

J18

I samband med detta problem passar det bra att behandla kedjebråk, stambråk och rationella uttryck.

Några användbara problem med anknytning till bråk från tidigare tävlingar är Student 2012:20; Junior 2011:21 och 22 2.

J6

Problemet handlar om faktorisering av uttryck. Faktorisera uttrycken. Ta upp faktorsatsen, restsatsen och nollställen

Geometri

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t ex att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det räcker inte att hänvisa till att två vinklar *ser* lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte *vet* att det är så. Hur kan man veta det?

Diskutera gemensamt de geometriska begreppen. Be eleverna att på olika sätt beskriva och förklara begreppen linje, sträcka, skärningspunkt, parallellogram, regelbunden månghörning, tangent, korda, likformighet och kongruens.

J1

Diskutera olika lösningsmetoder.

– Vilka sträckor är lika långa i de tre figurerna?

J2

Ta upp likformighet, längdskala och areaskala. Gör motsvarande konstruktion med andra regelbundna månghörningar. Diskutera regelbundna månghörningar och vinklarnas storlek.

J12

Diskutera lösningsmetoder. Vilken sida har åttahörningen?

J15

Här passar det bra att behandla korda, tangent, randvinkelsatsen och likformighet.
Diskutera också elevernas lösningsmetoder. Vilket är förhållandet mellan cirklarnas omkrets och mellan deras area?

J21

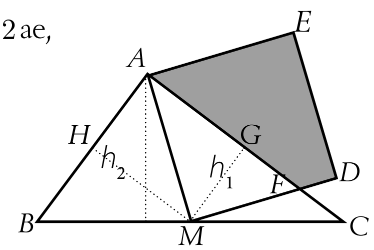
Ta upp tangent och bisektris. Diskutera olika lösningsmetoder.

J22

Det finns flera olika sätt att lösa detta problem. Det är inte alla som kommer på att triangeln kan skrivas in i en cirkel. En alternativ lösning är följande:

Triangeln ABC är rätvinklig med den räta vinkeln i A.
Triangeln AMF är rätvinklig med den räta vinkeln i M. Arean av triangeln ABC är $\frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ ae.

Dra höjden från A mot sidan BC.
Arean av triangeln ABM är lika med arean av triangeln AMC, $\frac{24}{2} = 12$ ae, eftersom trianglarna delar höjd.



I triangel AMC, dra höjden h_1 från hörnet M mot sidan AC och kalla skärningspunkten för G.

Då gäller att $\frac{h_1 \cdot 8}{2} = 12$. $h_1 = 3$.

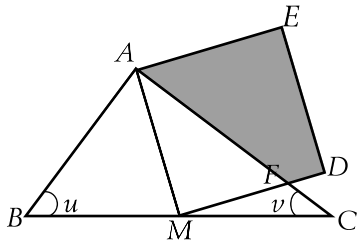
I triangel ABM, dra höjden h_2 från hörnet M mot sidan AB och kalla skärningspunkten för H. Då gäller att $\frac{h_2 \cdot 6}{2} = 12$, $h_2 = 4$.

Fyrhörningen $AGMH$ är en rektangel, alltså är $AG = 4$ och $AM = 5$.
$\angle MAC = \angle MCA$ och triangel AMF är likformig med triangel CAB. Det ger $\frac{MF}{6} = \frac{5}{8}$, $MF = \frac{15}{4}$.

Den sökta arean är $5 \cdot 5 - \dfrac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = 25 - \dfrac{75}{8} = \dfrac{125}{8}$.

Ett annat alternativ är att arbeta med trigonometri.
Triangeln ABC är rätvinklig med den räta vinkeln i A.
Sätt $\angle ABC = u$ och $\angle ACB = v$.

Då gäller $\cos u = \sin v = \frac{3}{5}$, $\sin u = \cos v = \frac{4}{5}$.



Eftersom M är mittpunkten på sidan BC och trianglarna ABM och ACM delar höjd så har de samma area.
Cosinussatsen ger att $AM = 5$.
$\angle MAC = \angle MCA$ och triangel AMF är likformig med triangel CAB.

Det ger $\frac{MF}{6} = \frac{5}{8}$, $MF = \frac{15}{4}$. Den sökta arean är $5 \cdot 5 - \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8}$.

– Ta upp begreppet ”median i en triangel”. Uppmärksamma eleverna på skillnaden mellan det statistiska begreppet median och median i en triangel. Har de något gemensamt?

– Låt eleverna bevisa följande påstående:
I en rätvinklig triangel har medianen från den räta vinkeln hälften av hypotenusans längd.
Låt dem sedan göra en lösning som utnyttjar detta.

Analytisk geometri

Ur kursplanen för Ma2b, 2c :

hur analytisk geometri binder ihop geometriska och algebraiska begrepp.

Ett par av årets uppgifter hör hemma under begreppet analytisk geometri.

J8

Detta problem kan lösas med analytisk geometri. Låt eleverna rita koordinatsystemet och markera de givna punkterna. Vad vet de om diagonaler i en kvadrat?

– Diskutera hur man bestämmer mittpunkten mellan två punkter och avståndet mellan två punkter.

– Bestäm kvadratens sida. Diskutera olika metoder för att bestämma kvadratens area.

En alternativ uppgift:

Punkterna (-1,0) och (5,0) är hörn i en kvadrat, vilka är möjliga positioner för övriga hörn?

(De finns sex olika svar, varav två är samma som i den ursprungliga uppgiften)

Andra uppgifter som passar för att arbeta med analytisk geometri är Junior 3 och Junior 13 från 2013.

Samband och förändring

Ur kursplanen för Ma 1b, 1c:

F3 Begreppen funktion, definitions- och värdemängd samt egenskaper hos linjära funktioner och potens-och exponentialfunktioner

F4 Representationer av funktioner, …

J24

Be eleverna förklara begreppet funktion och ta upp definitions- och värdemängd.

– Låt eleverna arbeta med funktioner av funktioner. Om $f(x) = ax + b$, vad är $f(f(x))$? Vilken typ av funktion blir den nya funktionen.

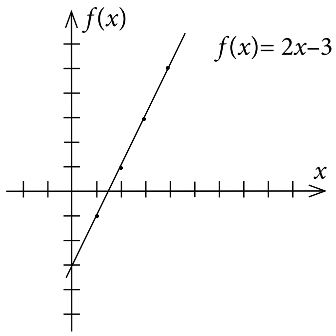
– Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två linjära funktioner. Undersök $f(g(x))$ och $g(f(x))$. Vilken slutsats kan eleverna dra?

– Ta upp inversa funktioner.

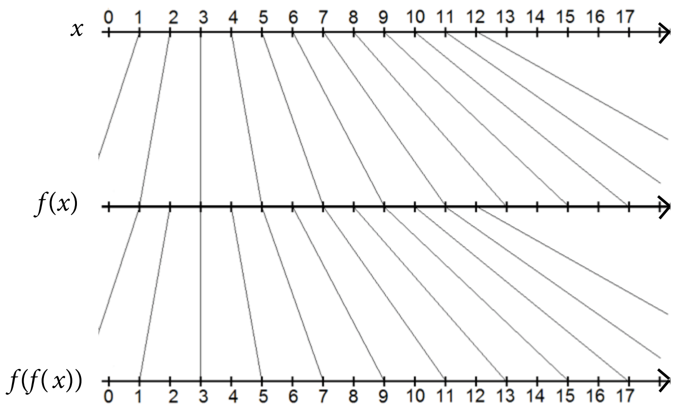
Tidigare givna problem om funktioner: Student 2004:21, Student 2005:7, Junior 2010: 14, Student 2011:24, Student 2012:14 och22 och Junior 2013: 6.

Sammansättning av funktioner

Det finns flera sätt att grafisk representera en avbildning. En graf i ortogonalt koordinatsystem kan ge exakt information om en komplicerad funktion. Att arbeta med olika representationer av enkla funktioner stödjer utveckling av förståelse av avbildning och med det relaterade begrepp. Olika representationer bör användas och jämföras.



Sammansättning av funktioner kan bekvämt demonstreras vid representation av avbildningar med



hjälp av parallella tallinjer. Här visas sammansättning av avbildningen $f(x) = 2x - 3$ med sig själv.

Frågor och övningar:

1. Rita sambandet mellan x och $f(f(x))$ i parallella tallinjer, (utan mellanliggande $f(x)$).
2. Vilken sorts funktion är sammansättning av två linjära funktioner?
3. Vilka funktioner får man genom sammansättning av två polynomfunktioner?
4. $y = f(x)$, $z = g(y)$ och $t = h(z)$. Skriv värdet av t som uttryck av x, f, g och h.
5. I figuren ovan ser vi en lodrätt linje. Den säger något om funktionen f och talet 3. Vad? Uttryck det med ord och med en formel. Kan man i grafen i det ortogonala koordinatsystemet se att 3 och f har detta samband?
6. Finns det för varje linjär funktion L en lodrätt linje i funktionens representation med parallella tallinjer? Skriv ekvationen för den lodrätta linjen om $L(x) = ax + b$.
7. f, g och h är godtyckliga funktioner. $b = f(a)$, $c = g(f(a))$, $d = h(g(b))$, $e = h(c)$. Vilket samband gäller för d och e?

Svar på nästa sida.

Svar:

2. En linjär funktion.
3. En polynomfunktion av grad som är produkt av grader av ingående funktioner.
4. $t = h(g(f(x)))$
5. Linjen skär de parallella tallinjerna i punkten 3. Funktionens värde för 3 är identisk med argumentet $f(3) = 3$. I ett ortogonalt koordinatsystem har koordinataxlarnas bisektris, linjen $y = x$ och linjen $y = L(x)$, skärningspunkt $(3, 3)$.
6. Om $a \neq 1$, så finns en sådan linje och den har ekvationen $x = \frac{b}{(1-a)}$. Om $a = 1$ och $b = 0$, så är alla linjer lodräta. Om $a = 1$ och $b \neq 0$, så finns det inga sådana linjer.
7. $d = e$

Problemlösning och logiska resonemang

Några av årets uppgifter bygger på logiska resonemang inom olika matematiska områden. Här gäller det att utgå från givna förutsättningar och utifrån dem föra ett hållbart resonemang. Uppgifterna ger också goda möjligheter till både skriftlig och muntlig kommunikation.

J4

Diskutera negation av *alla*, *ingen* och *någon*. Gå igenom påståendena A till E och negera dem.

J14

Låt eleverna föra generella resonemang om hur lådans volym förändras då en sida längd ändras.

J17

Diskutera olika lösmetoder med eleverna. Resonera om hur man bestämmer summan.

– Hur ändras resonemanget om X sitter i att annat hörn?

– Hur kan man placera ut 1–8 i hörnen så att summan av hörntalen för en sida är lika för alla sidorna?

J19

– Hur många förbindelser är det om varje ort har direktförbindelse till var och en av de andra orterna?

– Hur många matcher måste spelas om alla lag ska möta alla lag en gång i en turnering? Gå också igenom det klassiska ”handskakningsproblemet”.

I samband med detta problem passar det att behandla multiplikationsprincipen, permutationer och kombinationer.

Liknande uppgifter är Junior 2013:15 och 19

J23

Diskutera med eleverna hur många olika grupper om tre kängurur det går att bilda av 9 kängurur.

– Hur många av dessa innehåller ingen silverfärgad känguru?

– Hur många guldfärgade kängurur måste det finnas för att bilda dessa grupper?

Resonera om likformiga sannolikheter och komplementhändelser.

Att läsa

Eriksson, K. & Rydh, S. (2003). *Nöjesmatematik*. Stockholm: Liber.

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2010). *Matematiska äventyr.* NCM, Göteborgs universitet.

Vaderlind, P. (2005). *Klassisk och modern nöjesmatematik*. Stockholm: Svenska förlaget.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2009 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problem-lösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.