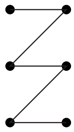
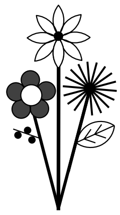
Svar och lösningar – Ecolier

1: D mellan 1 och 4
Eftersom tre är mindre än fyra ska 3 placeras före 4.

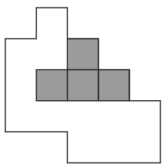
2: A 1 och 4 Hus 2 har för liten huskropp och endast två små trianglar, hus 5 har fel triangelform på taket och i hus 3 finns två små rektanglar men ingen större och dessutom har det huset 4 små trianglar.

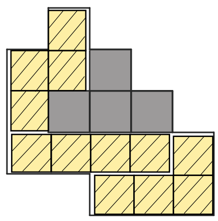
3: A 

4: E 
Här gäller det att se på alla detaljer i bilden.
A är riktig när det gäller höger och vänster, däremot är kvisten med bär upp och ned. B är inte spegelvänd vänster-höger, och lövet och bären har bytt plats. C och D är spegelvända, men bär och löv har bytt plats och i C har lövet dessutom vänts upp och ned.

5: E Lea Ordningen mellan barnen blir Sara, Adam, Markus, David, Lea.

6: E 8 I rutorna ska det stå 2, 2 i nedre våningen, 4 i andra våningen och 8, 8 i den tredje.

7: C 
Alla figurer har 12 otäckta rutor, men placeringen av dem avgör. Så här kan bitarna placeras:



8: D 90 $60 = 30 + 30$, $70 = 70 + 0$, $80 = 30 + 50$, $100 = 50 + 50$

9: E 48 Motsatsen till att ta hälften är att dubblera.
Tre halveringar återställer vi med 3 dubblingar: $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

10: B 
Vardera arean ska vara totalt 4,5 rutor. Det mörka området är 3,5 ruta. Det räcker att se på de enfärgade områdena, på de tvåfärgade är areorna lika stora. Det ska vara lika många hela vita bitar som hela grå bitar.

11: B 6 Abir har använt 13 brickor och har 5 kvar, dvs hon har totalt 18 brickor, alltså 6 av varje färg.

12: B 30 Ett kvartal är 5 kängurumånader, $5 \cdot 6$ veckor $= 30$ veckor

13: D 5

Vi kan börja med hundratalssiffran som måste vara 1.
Summan av tiotalen är 10 eller 12 (vi har ju fått 1 hundratal).
$5+6+1$ (minnesetta) ger 12 men den lösningen är omöjlig eftersom det skulle innebära att vi har fått 10 eller 12 ental och det kan vi inte få utan att använda 5 eller 6.
Alltså är summan av tiotalen 10 som vi bara kan få med $6+4$, tiotalssiffran 0. Entalen är alltså 2 och 3 och summans entalssiffra är 5.

14: C

Det enda möjliga är att det är fyra flickor.
Det största möjliga antal pojkar som kan stå i ringen är tre.
Kan då fyra flickor placeras så att det ingenstans står tre flickor?
Ja, det är möjligt.
Nästa fråga är om det är möjligt att placera två pojkar och fem flickor i ringen.
Det är inte möjligt eftersom två pojkar delar ringen så att fem flickor då ska delas i två grupper och då måste det vara minst tre i den ena.

15: B 7

Vi ser först hur 9 och 4 kan kombineras till 30:
$2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 = 30$ är enda möjligheten.
Det betyder att Bobby åt 9 morötter i två dagar och
4 morötter och 1 kålhuvud i tre dagar.
Under dessa 5 dagar åt Bobby alltså 3 kålhuvuden.
De återstående två dagarna åt han 2 kålhuvuden varje dag,
alltså $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$.

16: A kärran och flygplanet

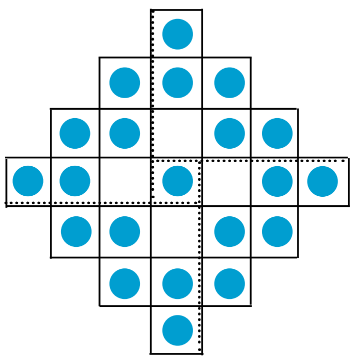
Samir betalade 125 kr. De enda leksaker som tillsammans kostar 125 kr är kärran och flygplanet. Eller:
De två leksaker som skiljer sig åt med 5 kronor är spårvagnen och flygplanet. Det betyder att Samir först köpte spårvagnen och sen bytte den mot flygplanet. 125 kr – 52 kr = 75 kr, dvs vad kärran kostar.

17 D 8

Summan av grannarna till den mörka rutan är minst $5+6+7+8=26$, dvs det kan vare sig stå 5 eller 6 i den rutan.
Både 5 och 6 kommer att ha den mörka rutan som granne och därför måste också summan av deras andra grannar vara densamma.
De vita tomma rutorna har sidogrannar som ger summorna 3, 5, 5 och 7.
Alltså måste 5 och 6 stå i rutor som ger sidosumman 5.
$13-5=8$, som alltså måste vara talet i den grå rutan.

18 D 21

Om vi delar figuren i fyra likadan delar ser vi att det i varje del räcker med en omålad ruta. Det gäller att låta den ruta vara omålad som ingår i flera kvadrater.



Arbeta vidare med Ecolier

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar:

– Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?

– Är lösningarna tydliga?

– Är resonemanget korrekt?

– Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?”

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera kring både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under några rubriker *Tal*, *Geometri* och *Problemlösning och logiska resonemang*, Naturligtvis kan flera av problemen passa under flera rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Några grundläggande aspekter som barn i denna ålder kan resonera om är positionssytemet, udda och jämna tal, räknesättens innebörd, tals uppdelning och enklare faktorisering. Dessutom brukar det ofta i Kängurun finnas problem som handlar om grundläggande bråk. Problemen utmanar också barnen strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra därför eleverna att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

1 Talet 2014

– Var skulle 3 placerats om det ursprungliga talet hade varit 4012?

– Undersök liknande tal med olika siffror. Försök att komma fram till ett resonemang som kan användas på alla tal i motsvarande fall.

– Låt eleverna konstruera största och minsta möjliga tal med några givna siffror. Diskutera gemensamt hur man kan resonera.

6 Taltrappa

Uppgiften handlar om faktorisering. Kan vi göra en motsvarande trappa med 64 på toppen, med andra tal i rutorna nedanför?

– Undersök olika tal på liknande sätt.

– Gör liknande trappor med andra räknesätt.

Se också Nämnaren 2007:1, Kurt Klungland: *Talpyramider*

8: Piltavlan

– Diskutera vilka olika summor som det är möjligt att få med två pilar? Tre pilar?

– Konstruera en tavla där alla hela tiotal är möjliga att få, med så få träffområden som möjligt och med så få pilar som möjligt

Tidigare problem: Ecolier 2008:9.

10 Karamellskålen

– Gör fler liknande exempel. Gör också exempel där barnen tar en tredjedel och en fjärdedel i stället. Använd också addition och subtraktion.

– Låt eleverna försöka formulera en generell metod för att arbeta baklänges genom att använda inversa operationer.

Se också: Ecolier 2007:8

13 Additionsuppställning

Att låta eleverna fundera ut vilka tal som ska placeras var är ett bra sätt att stimulera resonemang om tal och operationer. Ställ gärna direkta frågor, t ex:

– Vad krävs för att hundratalssiffran ska bli 2?
– Kan den bli 2 om vi har två termer? Varför inte?

– Undersök om det finns mer än ett sätt att placera siffrorna i exemplet.

– Konstruera liknande exempel, eventuellt med någon siffra placerad.

Liknande problem har funnits tidigare i Kängurun, bl a Benjamin 2009:12 och 2010:1.

17 Tal i rutor
Här handlar det om att undersöka möjliga summor.

–Vilka summor kan bildas runt den grå rutan, den största och den minsta möjliga?

– På vilka sätt kan vi få summan 13 med talen 1–4 och 6–9.

I 2014 års tävling finns liknande problem i flera klasser, Benjamin 18 och Cadet 15.
Tidigare problem: Ecolier 2007:7; Ecolier 2011:16; Benjamin 2008:3; Benjamin 2010:10.

Geometri
Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan.

2 Fem hus
Undersök husen, låt eleverna ange vilka former som vart och ett är uppbyggt av.
Låt eleverna göra ett tredje hus som har samma element som de två som är lika.
Diskutera vad det är som skiljer hos de andra husen.

4 Blommor på skyltfönstret
Här måste man använda sin visualiseringsförmåga. Hur ser det ut från andra sidan? Åt vänster blir åt höger, men hur är det med upp och ner?

– Konstruera egna exempel genom att exemplevis fotografera något som eleverna sedan får rita som de tänker att det ser ut bakifrån. Man kan också använda bilder från tidningar som underlag:
  – Hur ser det här ut bakifrån? Uppifrån? Från sidan?

– Diskutera skillnaden mellan att se något bakifrån och att se något i en spegel. Låt barnen få undersöka skillnaden konkret och också få formulera vad de upptäcker.

– Undersök också skillnaden mellan att se sig själv i spegeln och att se sig själv på ett fotografi.

Benjamin 4 i årets tävling är ett liknande problem, liksom Ecolier 2011:18.
Se också Nämnaren 1996:2, Karin Wallby: *Matematiken i bilden eller bilden i matematiken* och *Uppslaget Fyren, kvarnen och tornet* som finns på ArkivN på ncm.gu.se

7 Pussel
Uppgiften kan vara enklare att lösa om man ritar in rutnätet i figuren. Lägg märke till hur eleverna ritar in sitt rutmönster. Det är inte en självklart lätt uppgift, många elever i den här åldern har svårt att se det underliggande rutmönstret. Att kunna rita och senare föreställa sig ett underliggande rutmönster i en figur är grundläggande för att utveckla förståelse för area och areaberäkning.

– Låt eleverna placera bitarna i de andra figurerna och se varför det inte fungerar.

Liknande pusseluppgifter har förekommit tidigare i Kängurun och tränar förmågan att kunna vrida och flytta formerna i huvudet. I efterarbetet kan man förstås också klippa ut och prova om det behövs.

– Undersök arean av småbitarna och av den stora figuren. Undersök också omkretsen på både de små bitarna och den stora figuren.

– Hur kan en bit med samma area som den stora figuren se ut om vi vill ha så liten omkrets som möjligt?

– Kan vi få en större omkrets än 10 sidlängder på den lilla biten?

Att undersöka hur area och omkrets kan påverkas av omformning av figurer behöver eleverna få göra många gånger.

Pusseluppgifter är bl a Ecolier 2012:6; Ecolier 2013:11; Benjamin 2011:15; Benjamin 2013:10

9 Plattor i två färger

Diskutera med eleverna om varför vi kan bortse från de tvåfärgade bitarna.

– Hur vet vi att bitarna som är delade på diagonalen verkligen delar biten i två lika stora delar?

- Undersök hur diagonaler delar kvadrater, romber, rektanglar, parallellogrammer, godtyckliga fyrhörningar. I vilka fall får vi två lika stora delar? I vilka fall är diagonalen också en symmetrilinje?
- I ursprungsversionen av detta problem var en av rutorna delad på mitten parallellt med sidan. Vad måste gälla för att den verkligen skulle visa två *lika stora* delar?
- Hur skulle figuren kunna se ut om vi ville ha lika mycket mörkt som ljust, men med andra bitar än dessa?

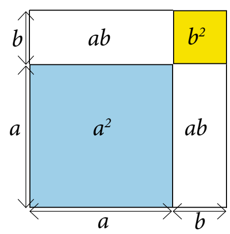
Benjamin 7 i årets tävling är ett liknande problem
Tidigare problem: Ecolier 2011:6; Ecolier 2012:7; Cadet 2011:4

18 Måla rutor

- Diskutera hur eleverna angrep problemet. Vilka rutor kan vi fylla i utan risk? Var måste vi vara speciellt uppmärksamma?

Figuren innehåller flera kvadrater av storleken fyra rutor. Hur många? För att undersöka detta kan man förstora figuren och klippa ut en (förstorad) kvadrat med fyra rutor. Med hjälp av den urklippta kvadraten kan sedan eleverna konkret undersöka var och hur många sådana kvadrater som finns i figuren.

– Hur många kvadrater av av storleken 1 ruta finns det? 9 rutor?
– Hur stor skulle nästa kvadrat vara?



Jämför dessa kvadrater med tal i kvadrat $1\cdot 1$, $2\cdot 2$, $3\cdot 3$ etc. Det är inte säkert att eleverna på egen hand kopplar samman en geometrisk kvadrat med tal i kvadrat, men detta är ett bra exempel på olika representationer av ett begrepp, kvadraten kan representeras både geoemtriskt och aritmetiskt. Om eleverna ser detta samband kan de utnyttja det i olika sammanhang, exempelvis för att utveckla förståelse för kvadreringsreglerna, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$:

– Vilken är den största kvadraten som finns i figuren?
–Om vi konstruerar en kvadrat som inte följer rutornas sidor?

Se också *Uppslaget Kvadrater i kvadrat* i Nämnaren 1994:2

Problemlösning och logiska resonemang

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och uppmuntra eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med hjälp av stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. I denna process är resonemang en viktig del.

5 Snöbollarna

Arbeta med texten stegvis. Vilken information ger varje mening?
Visa att man kan strukturera informationen relativt enkelt, t ex:

Adam gjorde färre än Markus:		A	M		
men fler än Sara:	S	A	M		
etc					
	S	A	M	D	L

Låt eleverna göra egna liknande problem till varandra.

Ecolier 2007:14; Ecolier 2008:13; Ecolier 2010:8

11 Brickorna

För elever i Ecolieråldern är antagligen problemformuleringen den stora utmaningen. Arbeta igenom texten tillsammans och diskutera vad varje mening ger för information.

– Vilken information i texten är nödvändig?

– Låt eleverna beskriva situationen med egna ord så att de får en helhetsbild av situationen. De kan också visa med konkret material.

– Gör egna liknande problem.

12 Kängurukalendern

Här måste eleverna bortse från vårt vanliga sätt att dela in tiden, vilket kan vara svårt.
Uppgiften kan vara utgångspunkt för ett samtal om tid och tidmätning.

– Varför kallas det kvartal? Vilka andra ord känner eleverna till som påminner om detta?
– Hur skulle vårt år, 365 dygn, se ut om vi i stället hade 20 månader? Om en månad bestod av 40 dagar?

Dygn, månader och år är knutna till naturliga fenomen (jordrotationen), men veckor är en konstruktion så det skulle lika väl kunna vara ett annat antal dagar i en vecka.

– Hur många dagar skulle vi ha för att slippa förskjutning av veckodagar?
– Hur skulle vi kunna hantera skottdagen?

Att resonera om andra modeller och utgå från andra förutsättningar är bra för att eleverna ska få en idé om att mycket i vår omvärld är mänskliga konstruktioner. Sådana är dock oftast inte slumpmässiga, utan någon form av anpassning eller analys har sannolikt gjorts.

14 Sju barn i ring

Att pröva sig fram till en lösning fungerar bra på detta problem, men kan eleverna också föra ett resonemang om alternativen? Om det är 3 flickor, vad innebär det för antalet pojkar etc.

Jämför med om barnen i stället stod på ett led. Varför blir det annorlunda då?

– Hur många mellanrum blir det mellan tio träd som står på en rad? Mellan tio barn i en ring?

Låt eleverna få formulera en generell slutsats om antalet mellanrum i ring och på rad.

Ecolier 2007:4; Benjamin 2013:21.

15 Kaninmat

I detta problem är det mycket att hålla reda på, förutom vad Bobby äter varje dag måste man också ta antal dagar i veckan i beaktande. Det finns olika sätt att kombinera Bobbys dagsransoner, men endast ett sätt som ger 30 morötter på en vecka. Gå igenom problemet noga så att alla förstår innebörden av att Bobby äter endera av de tre möjligheterna.

Undersök hur olika veckors matintag kan se ut.
– Hur ska han äta för att få så många morötter som möjligt? Hur många kan han som mest få under en vecka? Som minst?

– Hur många kålrötter kan han få som mest?
– Hur ska han planera sin mat om han vill ha jämn fördelning mellan kålrötter och morötter?
– Är det möjligt för honom att under en period äta lika många morötter som kålrötter? Hur många dagar skulle i så fall den perioden vara?

Ett liknande något svårare problem finns på Benjamin, nr 20. Pröva gärna det också.
Se också Ecolier 2010:14; Ecolier 2013:15; Benjamin 2009:5.

16 I leksaksaffären

Vi behöver inte veta vad Samir först köpte, men ett sätt att resonera är att ställa sig frågan: "Vilka två leksaker har en prisskillnad på 5 kr?". Då får vi reda på vilket som är den ena leksaken han köper.

– Diskutera med eleverna vad som är nödvändig information i uppgiften. Att få en överblick över helheten först är bättre än att arbeta sig igenom problemet steg för steg. Se på detta exempel:

> Erik, Emma och Pontus hade 10 kulor var. Erik gav 5 kulor till Emma och Pontus gav 7 kulor till Erik. Sedan bytte Erik och Emma alla sina kulor med varandra. Därefter gav Emma 8 kulor till Pontus. Hur många kulor hade de nu tillsammans?
>
> (ur Ntema 10, *Matematikundervisning i praktiken*, s 329)

Låt eleverna först lösa det på egen hand och därefter i mindre grupper. Om ingen upptäcker att man inte behöver utföra några operationer alls, så ge eleverna ett nytt, likadant problem men med andra tal. Gör fler exempel. Låt eleverna beskriva situationen med egna ord och illustrera den konkret.

Att läsa

Bergius, B. & Emanuelsson, L. (2008). *Hur många prickar har en gepard?* NCM, Göteborgs universitet.
Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem.* NCM, Göteborgs universitet.
Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation.* Stockholm: Liber.
Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* NCM, Göteborgs universitet.
McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal.* NCM, Göteborgs universitet.
Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.
Wallby, K m fl (red) (2014). *Matematikundervisning i praktiken. NämnarenTema 10.* NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2009 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Om ni inte har och inte planerar att läsa problemlösningsmodulen inom Matematiklyftet, finns den alltså ändå tillgänglig. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.