Lösningsförslag Cadet 2014

1. A 0

$$\frac{2014 \cdot 2014}{2014} - 2014 = 0$$

2. D 21 mars

Det blir torsdag senast om månaden börjar med en fredag. Då är det torsdag dag 7, dag 14 och dag 21.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
fre	lö	sö	må	ti	on	to	fre	lö	sö	må	ti	on	to	fre	lö	sö	må	ti	on	to	fre
						I							II							III	

3. D 7

Prövning ger att han får flest vita pärlor om han tar 6 pärlor (4 vita, 2 grå) från vänster och 6 pärlor (3 vita, 3 grå) från höger. Alltså $3 + 4 = 7$ vita.

4. E 35

Minst ett av talen är positivt eftersom summan är positiv. De har också samma tecken eftersom produkten är positiv. Alltså är båda talen positiva. Produkten är 36, dvs det är ganska små tal som ska multipliceras.

$1 \cdot 36$, $2 \cdot 18$, $3 \cdot 12$, $4 \cdot 9$, $6 \cdot 6$ ger alla produkten 36. Men om vi också har villkoret att summan ska vara 37 blir endast det första alternativet kvar så att vi får $1 + 36 = 37$. Differensen blir då $36 - 1 = 35$.

Alternativ lösning: Man kan också tänka sig talparen från andra hållet, vilka tal adderade blir 37? Då får vi 1 och 36 som första alternativ och alla övriga har en produkt som blir för stor.

5. E 6 dm^2

	Area (dm^2)
stor triangel	2
liten triangel	0,5
liten kvadrat	1

Fågelns area: $2 + 4 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 + 2 = 6$.

Alternativt kan man resonera om att det går att flytta bitarna så att det blir en kvadrat och en halv kvadrat, vilket ger lösningen $4 + 2 = 6$.

6. E 20

En kub med kantlängden 3 cm har volymen 27 cm^3. Han behöver totalt 27 kuber, dvs det behövs $27 - 7 = 20$ småkuber till.

Alternativt kan man resonera sig fram till hur många extra kuber det behövs till varje lager för att bli en hel kub. Till översta och understa lagret behövs ytterligare 8 kuber, till mittenlagret behövs 4 till. Alltså totalt $8 + 8 + 4 = 20$ kuber.

7. B 8 liter

1/4 av hinken fylls när man häller i 2 liter. Alltså rymmer hinken $4 \cdot 2$ liter $= 8$ liter.

8. B $55 \cdot 666$
Alla produkter kan faktoriseras, och en gemensam faktor är $11 \cdot 111$ (tex $55 \cdot 666 = (5 \cdot 11) \cdot (6 \cdot 111) = 5 \cdot 6 \cdot (11 \cdot 111)$). På så sätt kan uppgiften reduceras till:

A: $4 \cdot 7 = 28$
B: $5 \cdot 6 = 30$
C: $7 \cdot 4 = 28$
D: $8 \cdot 3 = 24$
E: $9 \cdot 2 = 18$

Beräkningarna ovan multiplicerat med en och samma term, $11 \cdot 111$, ger slutsatsen att alterativ B ger största produkten.

9. E 10
På två veckor har Jack 3 lektioner fler än Hanna. På $5 \cdot 2 = 10$ veckor har Jack $5 \cdot 3 = 15$ fler lektioner än Hanna.

En algebraisk lösning: Om x betecknar antalet veckor så har Jack haft $2 \cdot x$ pianolektioner och Hanna $x/2$ lektioner på en termin.

$2 \cdot x = 15 + \frac{x}{2}$ Lösningen blir $x = 10$ veckor.

10. B $\frac{9}{2}$ cm^2

Varje cirkel har arean 1 cm^2 och varje överlapp 1/8 cm^2. Det finns 5 cirklar och det blir 4 överlapp.
$5 \cdot 1\,\text{cm}^2 - 4 \cdot \frac{1}{8}\,\text{cm}^2 = 4\frac{1}{2}\,\text{cm}^2$.

11. D 17
$135 = 5 \cdot 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Siffror man kan använda då är 3, 9 och 5. Siffersumman blir $3 + 5 + 9 = 17$.

12. C 4
Åldrarna är potenser av 2, dvs 1, 2, 4, 8, 16, 32 eller 64 (nästa potens av 2 är 128 vilket blir för mycket). För att komma upp till en summa på 100 måste 64 och 32 vara med. $64 + 32 = 96$. Kvar är 4. Åldrarna är alltså 64, 32 och 4.

13. E 5 cm, 1 cm, 5 cm
En bisektris delar rektangelns vinkel i två delar à 45°. Därför kommer den att skära övre sidan 6 cm från övre vänstra hörnet och därmed $11 - 6 = 5$ cm från det högra hörnet. Kalla de tre nybildade delarna av övre sidan för a,b resp c (från vänster till höger). c är alltså 5. Symmetri ger att $a = c$. $a + b = 6$ och $a + b + c = 2a + b = 11$. Det ger att $a = 5$ och $b = 1$.

14. B 7:46
Pojkarna behöver 90 min totalt i två badrum ($8 + 10 + 12 + 17 + 21 + 22 = 90$ minuter), dvs idealet vore 45 min i varje badrum. Det går ej att få 45 med två summor av de tal som ges här. Däremot går det att få 44 min och 46 min. ($22 + 12 + 10$ samt $21 + 17 + 8$). Klockan blir alltså 7:46 när de är klara.

En metod för att få fram vilka grupper av tider som ger minst total badrumstid är att börja med att gruppera tiderna tre och tre. Försök sedan få så lika summor som möjligt. Exempelvis, börja med 8, 10, 12 och 17, 21, 22. Första gruppens summa är mycket större. Byt plats på minsta och största tal, vi får $10 + 12 + 22 = 44$ och $8 + 17 + 21 = 46$.

15. E 27

Om 9 står i mitten är dess grannar 5, 6, 7 och 8. Då blir summan $5+6+7+8=26$. Det går inte.
9:an står alltså utefter en sida.
Om grannarna till 9 är 1, 2 och mittentalet m så gäller att $15=1+2+m$, $m=12$. Det går inte.
Om grannarna till 9 är 1, 3 och mittentalet m så gäller att $15=1+3+m$, $m=11$. Det går inte.
Om grannarna till 9 är 2, 4 och mittentalet m så gäller att $15=2+4+m$, $m=9$. Det går inte, 9:an är upptagen.
Om grannarna till 9 är 3, 4 och mittentalet m så gäller att $15=3+4+m$, $m=8$. Det går!
8 har grannarna 5, 6, 7, 9 med summan 27.

16. B (2,3)

För en kvadrat gäller att diagonalerna skär varandra i mittpunkten och under rät vinkel. Den givna diagonalen har längden 6, dess mittpunkt är då (2, 0) och de två övriga hörnen har koordinaterna (2, 3) och (2, -3).

17. C 60°

$\angle ABH = 180 - 5a$ men det gäller även att $\angle ABH = 180° - 90° - 2a$.
$180° - 5a = 180° - 90° - 2a$. Lösnig av ekvationen ger att $a = 30°$. $\angle CAB = 2a = 60°$.

18. A 75 %

Två tal skiljer sig lika mycket från deras medelvärde. Medelvärdet är 30 % mindre än det ena talet. Då är det andra talet ytterligare 30 % mindre än det första talet. Medelvärdet är 70 % av det första talet, det andra talet är 40 % av det första. Förhållandet är 70:40 mellan medelvärdet och det andra talet, dvs $\frac{70}{40} = 1\frac{3}{4}$. Alltså är medelvärdet 75 % av det andra talet.

(Tänk att första talet är 100 och medelvärdet blir alltså 70 och det andra talet blir då 40).

Algebraisk lösning: Kalla talen a och b. Då gäller att $\frac{a+b}{2} = 0,7a$.

Förenkling ger att $a+b=1{,}4a$ eller $a = \frac{b}{0,4}$.

Alltså är $\frac{a+b}{2} = 0,7 \cdot \frac{b}{0,4} = \frac{7}{4}b = 1,75b$, dvs medelvärdet är 75 % större än det andra talet.

19. D 150

50 färre mynt ger 5 färre mynt per pirat, det måste alltså vara $50/5 = 10$ st pirater. Mynten från 4 pirater räcker alltså till 10 extra mynt för 6 pirater. Varje pirat måste då från början haft $10 \cdot 6/4 = 15$ mynt. Totalt fanns $10 \cdot 15 = 150$ mynt.

Algebraisk lösning:
Antag att det är p pirater (inklusive Kapten Krok) och att de har grävt upp x mynt.

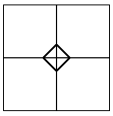
Då får var och en $\frac{x}{p}$ mynt. 50 färre mynt ger $\frac{x-50}{p} = \frac{x}{p} - 5$, $x-50 = x-5p$, $p=10$.

Fyra färre pirater ger $\frac{x}{p-4} = \frac{x}{p} + 10$. $p=10$ ger $\frac{x}{6} = \frac{x}{10} + 10$, $5x = 3x + 300$, $x = 150$.

20. D

De tre nedersta sambanden ger att A < B och E < C. Jämför vi första och fjärde sambandet så ge de att C < D. Jämför vi andra och tredje ser vi att B < C. Alltså är D tyngst.

21. C 273
Vi listar 13 tal som är delbara med 13: $1 \cdot 13$, $2 \cdot 13$, $3 \cdot 13$, $4 \cdot 13$, $5 \cdot 13$, $6 \cdot 13$, $7 \cdot 13$, $8 \cdot 13$, $9 \cdot 13$, $10 \cdot 13$, $11 \cdot 13$, $12 \cdot 13$ och $13 \cdot 13$. Av dessa 13 tal är sex delbara med 2. Vi måste alltså ersätta fyra av dessa tal med andra tal delbara med 13 men inte med 2. De talen är $15 \cdot 13$, $17 \cdot 13$, $19 \cdot 13$ och $21 \cdot 13$. Det tal som söks är då $21 \cdot 13 = 273$.

22. A 
Vi vet att kuberna är identiska och vi ser sex olika sidor på bilden: stor kvartscirkel, liten kvartscirkel, stor triangel, liten triangel, stor kvadrat och liten kvadrat.

Jämför den fjärde och den första kuben. Om den fjärde kuben vrids så att dess framsida sammanfaller med den första kubens högersida så sammanfaller även ovansidorna. Det innebär att den fjärde kubens högersida är den som är motsatt sida mot den första kubens framsida.

Alternativ lösning:
Vi vet att alla sidor är unika enligt ovan. Betrakta kub 2 och 3. Vrid kub 3 så att den lilla kvartscirkelns läge är på samma sida som för kub 2. Den stora kvartscirkeln befinner sig då på motsatt sida mot den andra kubens framsida.

23. D 56
Antag att de hade löst samma problem. Då hade de tillsammans fått $60 \cdot 4 + 60 \cdot 1 = 300$ poäng. För varje par av problem som bara löstes av en av dem ökas poängen med 3. Eftersom de tillsammans fick 312 poäng, så är det 4 unika problem som löstes av var och en av flickorna. Alltså löstes 56 problem av båda flickorna.

24. B 5
Låt B, S, M vara antalet personer från Bulleberga, Semmelstad respektive Muffinsberg. Låt M_1 vara de som är i tur att tala sanning i Muffinsberg och M_2 vara de som är i tur att ljuga ($M_1 + M_2 = M$). På frågan ”Är du från Bulleberga?” svarar $B + S + M_2 = 17$ ”ja” eftersom B talar sanning och S och M_2 ljuger. På frågan ”Är du från Muffinsberg” svarar $S + M_2 = 12$ ”ja” eftersom S ljuger och M_2 nu måste tala sanningen. Detta ger $B = 17 - 12 = 5$.

Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Arbeta vidare med Cadet 2014

Årets Känguruproblem kan direkt kopplas till innehållet i kursplanerna för åk 9 samt för Ma1. Få av problemen kan kategoriseras som rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Flertalet av dem kan kopplas till det centrala innehållet problemlösning men även till förmågan problemlösning som ska utvecklas. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Man kan komplettera med liknande problem från tidigare års tävlingar. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera kring både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Tal och taluppfattning

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. I flera av årets problem nämns siffra och tal. Diskutera med eleverna när vi har en siffra och när har vi ett tal. Egenskaper hos heltalen, såsom faktor, multipel, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grund för arbete med tal i bråkform.

Cadet 1 (C1)

I problemet finns de fyra räknesätten med. Ta upp prioriteringsregler. Diskutera vad som händer om man sätter ut parenteser, t ex

$$(2014 \cdot 2014) / 2014 - 2014$$

$$2014 \cdot (2014 / 2014) - 2014$$

$$(2014 \cdot 2014) / (2014 - 2014)$$

$$2014 / (2014 \cdot 2014) - 2014$$

Blir det någon skillnad om uttrycket skrivs

$$2014 \cdot 2014 / 2014 - 2014$$

$$\frac{2014 \cdot 2014}{2014} - 2014$$

$$2014^2 / 2014 - 2014$$

$$2014 \cdot 2014 - 2014 / 2014$$

$$\frac{2014 \cdot 2014 - 2014}{2014}$$

Vad händer om vi väljer ett annat tal? Låt eleverna ersätta 2014 med en variabel, t ex x. Hur ser uttrycket ut då? Hur kan det förenklas? Diskutera vad de har visat när de har förenklat uttrycket $x \cdot x / x - x$.

Jämför gärna med Cadet 2012 nr 4, Junior 2012 nr 6, Cadet 2011 nr 9 och Cadet 2003 nr 2.

C8

Diskutera med eleverna om de kan se någon/några gemensamma faktorer i multiplikationerna. Försök få dem att inse att alla multiplikationerna är skrivna som $11 \cdot x \cdot 111 \cdot y$. Med denna faktorisering är det lätt att jämföra produkterna.

Liknande problem är Cadet 2013 nr 6.

C11

Även denna uppgift bygger på faktorisering. Ett sätt att göra detta är att skriva ner alla tänkbara sätt att faktorisera och jämföra dessa. Därefter kan man gå vidare och hitta primtalsfaktoriseringen och finna att den ser likadan ut för alla sätten som tidigare skrivits upp. Ett förslag på övningsuppgift är ”vilket är det minsta tal som är delbart med 1, 2, 3, 4 och 5?” och motsvarande upp till 10, gärna genom diskussioner i små grupper eller par. Diskussionen ger en hel del samband mellan delbarhet och primtalsfaktorisering som kan vara nyttiga att upptäcka.

Liknande problem är Junior 2014 nr 16. Bra problem med fokus på faktorisering är Cadet 2013 nr 7, 11, GyCadet 2005 nr 24, Cadet 2004 nr 6, samt Junior 2004 nr 19.

C12

Detta problem handlar om potenser. Diskutera potenser och repetera potenslagarna. Skriv upp olika potenser av 2. Vilka går att skriva om till olika baser, t ex bas 4? En annan formulering av problemet finns i Junior nr 9 i år. Be eleverna göra liknande problem.

Det finns en hel del äldre problem med potenser att välja bland, t ex Junior 2013 nr 4, Student 2012 nr 8 och GyCadet 2007 nr 16.

C21

Ta upp begreppen delbarhet och multipel. Diskutera varför alla talen måste vara multiplar av 13. Konstruera liknande problem.

Se även nr 20 på årets Junior.

Algebra

Det finns alltid flera metoder att lösa problemen på. Många av dem är formulerade så att man med hjälp av svarsalternativen kan komma fram till svaret. I eftyerarbetet kan man försöka diskutera generella lösningar där man låter eleverna lösa problemen med algebra. I förslaget ovan till arbeta vidare med får eleverna öva på att skriva ett generellt uttryck med en variabel.

C4

I den här uppgiften sägs ingenting om vilken typ av tal som söks. Är det självklart att det är positiva heltal? Låt eleverna anta att de två talen är *a* respektive *b*. Be dem formulera ekvationer för de samband som är givna. Kan de förenkla till *en* ekvation? Diskutera ekvationen. Låt dem undersöka hur man kan lösa en sådan ekvation.

En metod man kan använda är att titta på de olika svarsalternativen:

$((a+b)+(a-b))/2=a, ((a+b)-(a-b))/2=b$

a+b= 37. Vi kontrollerar de fem svarsalternativen för $a-b$ och beräknar $a \cdot b$.

A: $a-b=1$	$a=(37+1)/2=19$	$b=(37-1)/2=18$	$a \cdot b>36$
B: $a-b=4$	$a=(37+4)/2=41/2$	$b=(37-4)/2=33/2$	$a \cdot b>36$
C: $a-b=10$	$a=(37+10)/2=47/2$	$b=(37-10)/2=27/2$	$a \cdot b>36$
D: $a-b=26$	$a=(37+26)/2=63/2$	$b=(37-26)/2=11/2$	$a \cdot b>36$
E´: $a-b=35$	$a=(37+35)/2=36$	$b=(37-25)/2=1$	$a \cdot b=36$

C7

Här finns det möjlighet att öva på att införa en variabel och ställa upp en ekvation. Antag att hinken rymmer *x* liter. Hur ser uttrycken för halvfull hink respektive hink fylld till tre fjärdedelar ut? Formulera liknande problem.

C9

Om frågan ändras till att *Jack har 16 fler lektioner än Hanna*, hur ändras svaret? (Här blir det inte entydigt, utan beror på om vi börjar med en vecka då Hanna har en pianolektion eller inte.) Här kan man ställa upp algebraiska modeller, och hålla en diskussion om vilken modell som kan användas till olika fall.

Andra exempel på uppgifter är Cadet 2012, uppgift 9 och 21.

C23

Diskutera olika elevlösningar på C19 och C23. Det får sedan bli grunden till ett samtal om fördelen med en generell metod och behovet av ekvationssystem.

Låt eleverna sätta upp ekvationer utifrån problemet:

$x \cdot 4 + y \cdot 1 = 312$

(fyra poäng per uppgift som lösts, plus en poäng per uppgift som någon annan löst först.)

$x + y = 120$

(de har löst 120 uppgifter totalt, varav x ger fyra poäng och y ger en poäng.)

Ekvationssytemet löses sedan med additions- eller subtraktionsmetod, eller grafiskt. Ovanstående ekvationssytem var troligen krångligare än de flesta elevlösningar, men nu har vi infört en generell metod och kan lösa svårare problem enkelt.

Låt eleverna använda metoden även för uppgift 19, trots att det där inte blir ett linjärt system. Se även Benjamin 2004, nr 19.

Geometri och rumsuppfattning

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t ex att två vinklar är lika stora eller att de inte är lika stora? Hänvisningar såsom att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så, är ofta inte godtagbara.

C5

Diskutera olika lösningsmetoder. De tre, kanske mest intuitiva, metoderna är:

Räkna ut arean på varje bit, och summera ihop bitarnas area i figuren.
Se att bitarna kan flyttas för att bilda en kvadrat och en halvkvadrat.
Se att bitarna som använts är från två kvadrater utom den större triangeln.

Här kan för- och nackdelar diskuteras, där den första metoden troligen tar längst tid, men också är mer allmän.

Vilka andra geometriska figurer kan vi bygga av dessa bitar? Hur stora areor har de, givet att vi bara vet de ursprungliga bitarnas areor? Detta blir dels en övning i geometri, men också i att bygga upp kunskap utifrån det man har givet. Enkla figurer som går att skapa är rektanglar och parallellogram. Ganska snabbt blir det en begränsning med de få bitar som vi har att bygga av.

Låt eleverna rita figurer de själva kommer på (romber och parallelltrapetser är några, regelbundna sexhörningar fungerar också men kräver Pythagoras sats) med hjälp av trianglar och rektanglar och komma fram till deras areor. På så sätt går vi från en konkret metod med urklippta pappersbitar, till ett matematiskt verktyg som kräver lite mer kreativitet, men som ändå behåller samma kärnidé.

C6

Diskutera volym och begränsningsarea med utgångspunkt från Gustafs bygge. Beräkna volymen och begränsningsarean och jämför med en kub byggd av 27 enhetskuber. Med hur många procent ökar volym respektive area? En enklare variant av bygget finns i Benjamin 2013 nr 2. Vilken area respektive volym har den? När Gustaf har byggt sin kub med kantlängden 3 cm, har han sammanlagt 27 enhetskuber. Ge eleverna årets Benjamin uppgift 8 att lösa.

Problemen i Junior 2010 nr 4, Cadet 2006 nr 6 och Benjamin 2006 nr 16 handlar om begränsningsyta hos kuber.

I förra årets tävling fanns i Benjamin nr 15 och Cadet nr 9 bilder av byggen. Ta fram dessa problem och diskutera dem.

Nr 19 från Cadet 2010 är ett lite annorlunda problem som även det handlar om 27 enhetskuber.

I nr 19 från Cadet 2004 efterfrågas hur många rätblock med givna mått som behövs för att få en kub. Vilken volym får kuben?

C13

Vilka villkor på rektangelns längd och bredd måste gälla för att bisektriserna ska skära varandra inuti rektangeln? Blir det alltid tre delar? Diskutera likformighet.

Bisektriserna har delat figuren i fyra delar, vad är arean av varje del? Låt eleverna rita figuren. Diskutera även vinklarnas storlek i de olika delarna. Svar: 0,25; 30,25; 17,75 resp 17,75 cm^2 (arean av hela rektangeln är alltså 66 cm^2).
Här finns flera olika lösningsförfaranden. Dessa kan med fördel diskuteras och jämföras i klassen. Det kan också vara värt att jämföra lösingar med de som eleverna använde på den ursprungliga lösningen.

C16

Här får eleverna möjlighet att arbeta med koordinatgeometri. Låt dem rita koordinatsystemet och markera de givna punkterna. Vad vet de om diagonaler i en kvadrat? Diskutera hur man bestämmer mittpunkten mellan två punkter, avståndet mellan två punkter osv. Bestäm kvadratens sida. Diskutera olika metoder för att bestämma kvadratens area.

Alternativ uppgift: Punkterna (-1,0) och (5,0) är hörn i en kvadrat, vilka är möjliga positioner för övriga hörn? (Sex olika svar, varav två är samma som i den ursprungliga uppgiften).

Tidigare givna uppgifter med koordinatsystem är GyCadet 2007 nr 8 och Student 2004 nr 11.

C17

Utgå från triangeln i uppgiften och låt eleverna arbeta med följande frågor:

Kan man ta reda på alla vinklar i triangeln?
Behövs all information som man har fått för att lösa den ursprungliga uppgiften?
Vilka andra alternativ på startinformation skulle man kunna ge för att uppgiften ska bli lösbar?

Eleverna kan ge varandra startvillkor och lösa varandras problem.

Ge eleverna diverse uppgifter som använder samma principer om vinkelsummor och/eller bisektriser, t ex Junior 2009 nr 3 och nr 10.

C22

Diskutera med eleverna hur man kan avgöra hur den motstående sidan ser ut. Vad syns på de övriga sidorna när de fyra kuberna är placerade så här? Ett sätt att övertyga sig är att konstruera utvikta kuber och sedan bygga ihop dem. Här finns det många äldre problem att plocka fram Cadet 2011 nr 17, GyCadet 2008 nr 8, Cadet 2006 nr 4, Cadet 2005 nr 5, Cadet 2004 nr 7, Cadet 2003 nr 3.

Problemlösning

Några av årets uppgifter bygger på logiska resonemang inom olika matematiska fält. Här gäller det att utgå från givna förutsättningar och utifrån dem föra ett hållbart resonemang. Uppgifterna ger också goda möjligheter till både skriftlig och muntlig kommunikation.

C2

Omformulera frågan till *Vilket datum är det tidigaste som tävlingen kan hållas?*
Ta fram en kalender och diskutera hur man kan avgöra vilka veckodagar som olika datum infaller på om man vet att t ex 20/3 är en torsdag. En annan diskussionsfråga är att avgöra hur många veckodagar av varje slag det kan finnas i en månad.

Jämför med Benjamin 2011 nr 18, Junior 2011 nr 10, Cadet 2002 nr 15, Cadet 2004 nr 10, Cadet 2006 nr 11, Benjamin 2006 nr 19, Junior 2011 nr 11 och Benjamin 2005 nr 15.

C18

Ha uppgiften som utgångspunkt för två olika begrepp i det fortsatta arbetet: procent och medelvärde.

C24

Diskutera vilken information som behövs för att lösa uppgiften. Låt eleverna hitta på enkla uppgifter åt varandra och låt uppgiften innehålla mer information än nödvändigt. Ange vilken information som behövdes och vilken som inte behövdes. Detta kan utvidgas till att också handla om alternativ information. Om man har för mycket information, men har flera olika alternativ, vilken information kan man använda för att lösa uppgiften? Då kan det kopplas ihop med föreslagen arbeta vidare i uppgift 17. Samma diskussion kan man ha om uppgift 22.

Att läsa

Eriksson, K. & Rydh, S. (2003). *Nöjesmatematik*. Stockholm: Liber.

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2010). *Matematiska äventyr*. NCM, Göteborgs universitet.

Vaderlind, P. (2005). *Klassisk och modern nöjesmatematik*. Stockholm: Svenska förlaget.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2009 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken Månadens problem.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.