Svar och lösningar – Benjamin

1: A 0

Summerar vi entalen ger de 9, hundratalen ger 3 så det är inga minnessiffror att beakta. Summan av tiotalen är 0.

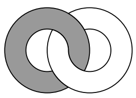
2: A 1

9999 + 1= 10 000. Talet efter det största fyrsiffriga talet måste vara det minsta femsiffriga talet.

3: B 3

Emil tar 2 svarta och 1 vit kula från vänster och 3 svarta och 2 vita kulor från höger. Då har han 5 svarta, och dessutom 3 vita kulor lösa.

4: D



När man ser bakifrån byter höger och vänster plats, liksom framför och bakom. Jenny ser den mörka ringen till vänster om den ljusa, den mörka ligger framför den vita upptill och bakom den vita nedtill vid ihopsättningen.

5: D 60 cm

Sidorna på kvadraten är 12 cm.
Den långa rektangeln består av 4 sådana sidor och dessutom två halva sådana sidor, dvs: $4 \cdot 12$ cm + $2 \cdot 6$ cm = 60 cm.

6: D 450 g

Eftersom den största biten väger lika mycket som de andra tillsammans väger den hälften av 900 g, dvs 450 g.

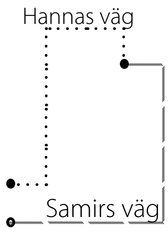
7: E Det går inte att få lika stor area med någon av bitarna

Den totala arean är 9 rutor, så hälften är 4,5 rutor. Redan nu är arean av de vita områdena 5 rutor och den kan inte bli mindre.

8: D 7

I övre lagret kan bara de 4 hörnbitarna vara kvar, dvs fem bitar tas bort. Dessutom måste ytterligare två bitar i mitten utefter ena sidan tas bort.

9: B 1 km mot norr



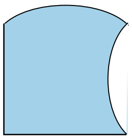
10: D 10

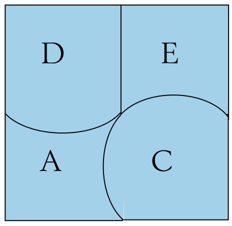
De som åt glass igår var de 7 barn som äter varje dag och 6 av dem som äter varannan dag. I dag är det de 7 och resten av varanndagsätarna, dvs 3 barn, som äter glass. Totalt 10 barn äter glass idag.

11: B Bella

Om två grannar byter plats sitter de fortfarande bredvid varandra, men på andra sidan. Ari och Eli har bytt plats, liksom Cosmos och Dolly. Men Bella sitter inte bredvid någon av sina ursprungliga grannar.

12: B



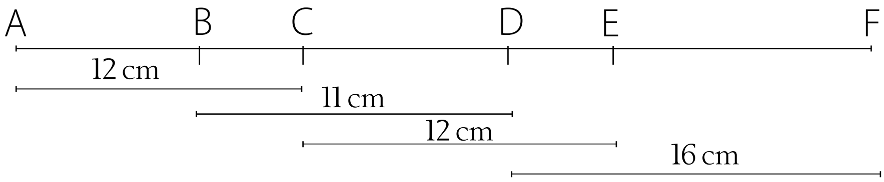


13: A 4

72 – 36 = 36 platser finns vid bord med 6 platser.
Det betyder att sex bord har plats för 6 personer.
Det ska därför vara 16 – 6 = 10 bord med totalt 36 platser, fördelade på bord med 3 och bord med 4 platser.
36 uppdelat på multiplar av 3 och 4 ger $4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 36$, så en lösning är fyra bord med 3 vid varje och sex bord med 4 vid varje.
Någon annan lösning som uppfyller kravet på tio bord finns inte.

14: D 16 cm

Vi vet att hela sträckan AF har längden 35 cm.



Vi kan sedan söka längderna av AB och EF för att subtrahera dessa.
Vi adderar längderna av BD och DF, 11 cm + 16 cm = 27 cm.
Alltså är längden av AB 35 cm – 27 cm = 8 cm.
AC och CE är tillsammans 12 cm + 12 cm = 24 cm,
alltså är EF 35 cm – 24 cm = 11 cm.
Sträckan BD är 35 cm – 8 cm – 11 cm = 16 cm.

15: A

Hela loopen tar 13 minuter. Efter 60 minuter har musiken spelat 4 hela loopar och 8 minuter in på nästa.
Om vi startar på C och går 8 minuter framåt hamnar vi på A, detta oberoende av var i C vi startade.

16: A 1

Två sidor med gemensam kant kallar vi grannar. Två grannar har alltid två gemensamma grannar (som är motstående sidor till varandra).
1 och 6 är grannar och deras gemensamma grannar är 2 och 5.
Det finns alltså inga fler gemensamma grannar till 1 och 6.
4 är granne till 6, men inte en gemensam granne till 1 och 6, dvs inte granne till 1. Alltså ligger 4 mitt emot 1.

17: C 20

Mönstret kan delas in i grupper om 6 träd, eftersom rönnar och lindar står som vartannat och vart tredje träd.
Det räcker därför att undersöka en sådan grupp: B, R, L, R, B, R …
Hela planteringen består av 10 grupper.
I varje grupp finns 2 björkar, totalt 20 st.

18: E 29

5 och 6 måste placeras som i bilden, för att summan av femmans grannar ska bli 9. Grannar till 6 blir då 5, 7, 8 och 9 med summan 29

1		3
5	6	
2		4

19: B 7 eller 8

36 kan med tre faktorer, varav minst en ska vara 3, skrivas $3 \cdot 2 \cdot 6$ eller $3 \cdot 3 \cdot 4$. För att siffersumman ska bli 15 i första fallet måste 3 ersättas med 7. I andra fallet måste en av treorna ersättas med 8.

20: C 2

Vi ser först hur vi kan kombinera multiplar av 9 och multiplar av 4 för att få 30, dvs antalet morötter. $2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 = 30$ är enda möjligheten.
Det betyder att Ville åt *bara morötter* i 2 dagar och *morötter och kålrötter* i 3 dagar. Under dessa 5 dagar åt han alltså 3 kålrötter.
Övriga 6 kålrötter åt han under 3 dagar.
De återstående 2 dagarna åt han bara gräs.
Med en tabell ser vi det tydligare:

	Dagar	totalt	
Morötter, 9 per dag	2		18 morötter
Kålrötter, 2 per dag	3	6 kålrötter	
1 kålrot och 4 morötter per dag	3	3 kålrötter	12 morötter
Gräs	2		
	10	9 kålrötter	30 morötter

21: E 13

Det antal stenar som Leo ska ha måste vara delbart med både 3 och 5, dvs med 15. Det antal han har får rest 2 om det delas med 15.
Det innebär att det saknas 13 stenar.

Arbeta vidare med Benjamin 2014

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Påminner problemet om något annat problem vi har löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?”

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att *resonera och argumentera* vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under rubrikerna *Problemlösning och logiska resonemang Tal, Tid* , *Geometri* och *Koordinatsystem*. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade.

Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Problemlösning och logiska resonemang

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och uppmuntra eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med hjälp av stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. I denna process är resonemang en viktig del.

3 Pärltråden

Här gäller det att välja på ett smart sätt och att försäkra sig om att den väg man väljer är den bästa. Hur vet vi det? Låt eleverna motivera sina lösningar. Att inte bara hitta en lösning utan att undersöka om det är den enda eller den bästa lösningen är en del av problemlösningsförmågan.

Gör egna liknande problem. Om eleverna får göra problem kommer de antagligen att göra dem mer komplexa. Det är bra.

Benjamin 2009:4 var ett liknande problem.

10 Glassätare

Beräkningarna i detta problem är enkla så här handlar det mer om att hantera information och att resonera logiskt. Arbeta gemensamt med texten och strukturera informationen. Låt eleverna beskriva situationen med egna ord och med hjälp av konkret material. Vad vet vi? Spelar det någon roll hur många barn det är på lägret?

Diskutera gemensamt olika frågor som man kan ställa sig för att reda ut problemet, exempelvis:

– Vilket är det minst antalet glassätare idag?
– Hur många av varannandagsätarna åt glass igår?

11 Platsbyte

Diskutera gemensamt hur eleverna har angripit problemet. Hur har de strukturerat informationen? Illustrera gärna situationen konkret. Undersök om det spelar någon roll om ordningen är medsols eller motsols.

Benjamin 2011:10 handlar också om att byta platser.

13 Bordsplacering

Problemet handlar om tal och hur tal kan delas upp. Illustrera problemet med konkret material och med en tabell.

– Vilken betydelse har informationen att restaurangen har 72 platser?

Det finns två tänkbara sätt att dela upp 36 platser på tremannabord och fyrmannabord:
$4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 36$ och $8 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 36$. Den andra lösningen, 8 tremmannabord och 3 fyrmannabord stämmer dock inte med förutsättningen att det ska vara 10 bord. Att hantera flera förutsättningar samtidigt kan vara en utmaning för många elever. Diskutera betydelsen av att gå tillbaka till problemet och kontrollera mot förutsättningar och villkor.

– Pröva att göra andra exempel med andra kombinationer och andra villkor.
– Låt eleverna konstruera liknande problem själva.

Problemet kan också uttryckas med ekvationer, eller med förenklade symboluttryck som är någonting mellan en beskrivande text och en korrekt ekvation, gärna flera olika. Hur formellt korrekt man uttrycker sambandet får bestämmas av elevernas tidigare erfarenheter. Ställ gemensamt upp ekvationerna eller uttrycken och låt eleverna beskriva vad dessa talar om. Jämför med den konkreta representationen och tabellen.

Tidigare problem: Ecolier 2013:15

14 Sträckor

Här passar det bra att diskutera bildens roll som stöd i problemlösning. Bilden i detta problem kan ge oss ett stöd för resonemanget, men ger inte direkt de exakta värdena och man kan inte mäta sig fram till svaret. Bilden blir sannolikt inte korrekt vid första försöket och den behöver heller inte vara riktig beträffande längderna.

– Bilden i det här problemet är ett bra stöd för att diskutera innebörden av räknesättet subtraktion.

I problemet handlar det om längder av sträckor, men det skulle också kunna handla om exempelvis åldrar. Låt eleverna formulera ett eget problem om årtal i stället. Observera och diskutera då skillnaden mellan en tidslinje och en tallinje. På en tallinje är varje tal en punkt, medan varje år (eller dag) på en tidslinje är en utsträckning.

Benjamin 2008:13

20 Kaninmat

I detta problem är det mycket att hålla reda på, förutom vad Ville äter varje dag måste man också ta antalet dagar i beaktande. Det finns olika sätt att kombinera Villys dagsransoner, men endast ett sätt som ger 30 morötter och 9 kålrötter på 10 dagar. Gå igenom problemet noga så att alla förstår innebörden av att Villy äter endera av de fyra möjligheterna.

– Diskutera problemlösningsstrategier. Har någon använt tabell?

– Undersök olika kombinationer:
  – Hur ska han äta för att få så många morötter som möjligt?
  – Hur många kan han som mest få under en vecka? Som minst?
  – Hur många kålrötter kan han få som mest?
  – Hur ska han planera sin mat om han vill ha jämn fördelning mellan kålrötter och morötter?
  – Är det möjligt för honom att under en period äta lika många morötter som kålrötter?
  – Hur många dagar skulle i så fall den perioden vara?

Ett liknande något enklare problem finns på Ecolier, nr 15. Pröva gärna det också.
Tidigare problem: Ecolier 2010: 14; Ecolier 2013:15; Benjamin 2009:5

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Elever i denna ålder kan resonera om bl a räknesättens innebörd, faktorisering och delbarhet. Problemen utmanar också barnen strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra därför eleverna att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

1: Additionsuppställning

Varför kan vi direkt se att summan måste vara 0?

Gör olika exempel med villkoret att det är olika/samma siffra som är övertäckt.

$$\begin{array}{r} 10\blacktriangle \\ 10\blacktriangle \\ +10\blacktriangle \\ \hline 309 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10\blacktriangle \\ 10\blacktriangle \\ +\ 10\blacktriangle \\ \hline 314 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\blacktriangle 8 \\ 1\blacktriangle 8 \\ +1\blacktriangle\blacktriangle \\ \hline 409 \end{array}$$

Några tidigare problem av denna typ: Benjamin 2004:14; B2009:12; B 2010:1; B 2013:5; Ecolier 2013:2

2 Största och minsta tal

Gör motsvarande uppgift inom större och mindre talområden.
– Största femsiffriga och minsta sexsiffriga? Minsta fyrsiffriga och största femsiffriga etc.
Se efter mönster och låt eleverna finna det generella sambandet.

– Anknyt gärna till trippmätaren i bilen eller andra räkneverk som eleverna har erfarenhet av.

Tidigare problem: Benjamin 2011:12

6 Kakdelning

Vad väger de andra bitarna? Variera villkoren för att få olika svar, exempelvis:
– Om alla väger lika?
– Om den största av de bitarna väger lika mycket som de andra tillsammans?
– Om den minsta biten väger 100 gram?
Här finns möjlighet att variera öppenhetsgraden och anpassa problemet till olika elever.
Tog eleverna kanske för givet att alla bitarna var lika stora? I så fall varför? Diskutera betydelsen av sätta sig in i problemet och inte lägga till villkor som inte finns.

7 Trädplantering

Undersök om det spelar någon roll om vi bestämmer att det första eller det andra trädet ska vara en rönn. Diskutera tolkningen av vartannat och vart tredje och jämför med hur vi använder det i vardagen. Varför spelar det ingen roll hur vi placerar ut vartannat respektive vart tredje?

– Diskutera hur talen 2, 3 och 60 hör ihop. Varför räcker det att se på de 6 första träden?

– Låt eleverna konstruera ett liknande problem men inte med vartannat och vart tredje, utan med andra intervall, exempelvis vart annat och vart femte. Diskutera likheter och försök att komma fram till det generella i problemet.

18 Talrutor

Låt eleverna få resonera sig fram till en lösning och hjälp dem att argumentera för varför 5 måste stå i rutan mellan 1 och 2.

Se också nr 17 i årets Ecolier och nr 15 på Cadet, som båda är varianter på detta problem.
Ecolier 2007:7; Benjamin 2010:10 och Ecolier 2011:16 .

19 Suddat tal

Detta handlar om att faktorisera tal och om siffersumma. Gå igenom alla möjligheter att multiplicera tre ensiffriga tal och få 36. Låt eleverna argumentera för lösningen på problemet, varför duger inte de andra möjligheterna? Här är det viktigt att tänka på alla villkor: siffersumman i det ursprungliga talet var 15, minst en av siffrorna i det nya talet ska vara 3.

– Låt eleverna beräkna siffersumma på olika tal. Eftersom vi använder siffersumma för att bestämma delbarhet är det bra att kunna detta begrepp även om det inte används utanför matematiken.

– Att kunna faktorisera tal är användbart. Låt eleverna systematiskt faktorisera talen upp till hundra. Vilka tal har många faktorer? Vilka har få? Diskutera *primtal*, *rika tal*, *fattiga tal* och *perfekta tal.*

Ett perfekt tal: Summan av talets delare (utom talet själv) ska vara lika med talet.
Exempel: 6: $1+2+3$ och 28: $1+2+4+7+14$. Nästa perfekta tal är 496 och därefter 8128. Hittills har man upptäckt 48 perfekta tal, det senaste upptäcktes 2013 och består av 34 850 340 siffror!

Ett rikt tal: Summan av talets delare är större än talet. Exempel 24: $1+2+3+4+6+8+12=36$
De rika talen är lättare att finna, de första är: 12, 18, 20, 24, 30, 36.

Fattiga tal: Summan av talets delare är mindre än talet. Exempel: 10: $1+2+5=8$.
Alla primtal är fattiga liksom 4, 8, 9, 14, 15 ....

Att låta eleverna leka med tal och undersöka deras egenskaper är bra för att de ska kunna utveckla god taluppfattning.

21 Stengruppering

Här handlar det också om delbarhet, och om *rest*. Undersök vilka rester som kan komma ifråga om vi delar ett tal med 3, med 4 etc. Låt eleverna få förklara hur vi kan veta vilket den största möjliga resten blir. Det är inte säkert att de har reflekterat över detta samband.

För att kunna undersöka rester behöver eleverna kunna utföra division manuellt. Behärskar de någon algoritm kan de göra intressanta undersökningar om decimalutveckling. $1/3 \approx 0,333...$? Varför upprepas trean och hur många decimaler måste vi beräkna för att inse att det bara blir treor?

Tid

15 Musikslinga

Varje år brukar det finnas något problem som handlar om tid och hur vi beräknar tid. Själva tideräkningen är troligen ingen svårighet i detta problem, att 60 sekunder är en minut och 60 minuter är en timme är de enda tidskunskaper som behövs. Men hur utnyttjar eleverna att varje loop är 13 minuter? Jämför elevernas olika lösningsstrategier – hur går de vidare från att varje loop tar 13 minuter och en timme är 60 minuter. Börjar de från början och räknar upp, $13+13+13+13=52$ och sen saknas det 8? Eller arbetar de bakifrån? Delar de 60 med 13 och får 4 rest 8? Hur tolkar de i så fall det?

– Här finns goda möjligheter att se på räknesättens relation: addition och subtraktion som omvända operationer, division som upprepad subtraktion.

– Vad hade svaret blivit om det i stället hade stått: *När Sofia gick hemifrån spelade låt* C? Spelar det någon roll var i låt C slingan är? Vad händer om det är låt E som spelas? Undersök andra möjligheter med loopen.

– Varifrån känner eleverna igen ordet loop? Vad betyder det?

– Låt eleverna konstruera en egen spellista som har den egenskapen att om en speciell låt spelas så kommer det att vara samma låt som spelar efter en timme, oavsett var i låten man börjar.

Geometri

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan.

I geometri spelar också bilden en väsentlig roll, som underlag för kommunikation och som stöd för tanken. Med stigande ålder hos eleverna bör vi också ställa större krav på hur de använder bilder. Hur vet vi att vinklar är räta? Hur kan vi vara säkra på att en yta är hälften så stor som en annan? Att det ser så ut är inte ett tillräckligt starkt argument.

5 Kvadratdelning

– Upprepa delningen. Hur lång kan den smala rektangeln bli som längst? Vad händer med arean? Med omkretsen? Låt eleverna gemensamt formulera ett algebraiskt uttryck för omkretsen på den bildade rektangeln.

– Starta med en rektangel med olika långa sidor. Undersök upprepad delning åt båda hållen. Sök generella samband.

– Utgå från en figur med given omkrets och omforma figuren. Vad händer med arean?

Eleverna behöver få många möjligheter att undersöka hur area och omkrets påverkas av att formen ändras men omkrets eller area hålls konstant. Många har uppfattningen att både area och omkrets behålls, oavsett hur formen ändras. Återkom därför till liknande undersökningar och låt eleverna få formulera sina iakttagelser och slutsatser

Några tidigare problem: Benjamin 2007:12 och 14; Ecolier 2009:13; Ecolier 2006:9.

7 Svarta och vita plattor

Varför räcker det att se på de enfärgade bitarna? Hur vet vi att de tvåfärgade bitarna är delade i halvor?

– Undersök hur diagonaler delar kvadrater, romber, rektanglar, parallellogrammer, godtyckliga fyrhörningar. I vilka fall får vi två lika stora delar?

– I vilka fall är diagonalen också en symmetrilinje?

– Hur skulle figuren kunna ändras för att det skulle bli möjligt att få lika stor mörk som vit area?

– Hur stor andel av figuren är mörk respektive vit?

– Uttryck arean av vitt och mörkt i varje bit i form av bråk där biten är helheten. Se sedan på arean i relation till hela figuren.

– Lägg till de olika svarsalternativen och se hur det påverkar andelen.

Ecolier 2011:6; Ecolier 2012:7.

12: Buktiga bitar

Jämför sidornas form, hur kan de hjälpa oss? De fem bitarna har sammanlagt 4 inbuktningar och 4 utbuktningar. Man bevarar balansen om man tar bort en bit med en inbuktning och en utbuktning. Undersök problemet konkret, klipp ut och rita av formerna.

I tanken måste vi vrida bitarna och också se att det bildas räta vinklar i hörnen för att det ska bli en kvadrat.

– Om vi vet att de fyra bitarna ska bilda en kvadrat, vad vet vi då om sidlängderna? Diskutera vilka egenskaper en kvadrat har.

– Kan vi bygga en kvadrat med fyra bitar på ett annat sätt, om vi kan använda samma bit flera gånger?

– Undersök bitarnas former och storlek. Vilka är lika stora?

– Hur kan vi sluta oss till att inbuktningar och utbuktningar är lika stora? (Vi vet att det går att göra en kvadrat med fyra bitar, alltså måste detta gälla)

Diskutera gärna att vi inte kan bygga vårt resonemang på hur något ”ser ut” utan att vi måste ha mer stöd för våra utgångsantaganden. Graden av precision på resonemang beror naturligtvis på hur gamla eleverna är, för de allra yngsta kan man förstås utgå från hur bilden ser ut. I Benjaminåldern kan man däremot låta eleverna möta större krav på argumentationen.

Fler problem som handlar om att sätta samman olika bitar är Benjamin 2011:3; B 2012:7; Ecolier 2013:11.

Visualisering

Flera problem tar elevernas förmåga att visualisera och att föreställa sig hur något ter sig från en annan synvinkel i anspråk. Denna förmåga utvecklas genom konkreta erfarenheter. För en del barn räcker det att de gör dessa erfarenheter, men många behöver hjälp med att dra slutsatser. Diskutera därför konkreta exempel och låt eleverna berätta vad de ser i den konkreta situationen och hur de tänker kring problem som de löser ”i huvudet”.

4 Ringar från andra sidan

Låt eleverna rita av föremål eller samlingar av föremål från olika håll och sedan byta papper med varandra. Var har den som ritat stått? Det går förstås också bra att fotografera eller att använda färdiga bilder och diskutera:

– Var har fotografen stått?
– Hur ser motivet ut från andra håll?

Jenny och Amer står vända mot varandra så det som Amer ser till vänster ser Jenny till höger. Där ringen går framför sett från ena sidan går den bakom sett från den andra. Hur hade ringarna sett ut om Amer i stället hade sett på ringarna i en spegel bakom sig, eller om Jenny hade sett i en spegel bakom Amer?

En aktivitet inom detta område är beskriven i *Matematiken i bilden eller bilden i matematiken*, Nämnaren 1996:2 Se också *Uppslag: Fyren, kvarnen och tornet* som finns på ArkivN på ncm.gu.se.
Ecolier 4 i år är ett liknande problem, liksom Ecolier 2011:18.

8 Klossbygge

– Bygg kuber och se på den från olika håll. Gör andra vyer av kuber och bygg så att det motsvarar ritningen.

Att överföra den konkreta upplevelsen av en verklig kropp till en tvådimensionell bild kräver erfarenhet och övning. Många barn får sådan träning i samband med lek men en del barn måste få göra sina erfarenheter i skolan. Ett steg mellan det konkreta och den tvådimensionella bilden kan vi numer ta med hjälp av digital teknik, med vars hjälp eleverna kan undersöka och laborera med virtuella kuber.

– Undersök också större kuber, 5×5, 7×7.

Kubproblem och problem med att se byggen från olika håll har funnits i många Kängurutävlingar, bl a Benjamin 2011:2; Benjamin 2012:3; Benjamin 2013:15. I boken *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem* finns ytterligare samlade och kommenterade exempel.

16 Kub med numrerade sidor

Här står resonemanget i fokus. Med avsikt använder vi inte ordet tärning i formuleringen, då en korrekt tärning är konstruerad så att summan på de motstående sidorna är 7.

– Låt eleverna rita den utbredda kuben och undersöka om det finns olika sätt att placera siffrorna.

– Pröva också att rita utbredningen på olika sätt. Klipp ur och pröva.

Ecolier 2008:18; Ecolier 2004:12; Cadet 2004:7; Ecolier 2005:13, Benjamin 2006: 6 handlar om hur en utbredd kub kan se ut. Se också Benjamin 2003:10, som handlar om ett utbrett hus.

Problem med tärningar har förekommit flera gånger, ex: Benjamin 2002:21; Benjamin 2007:5; Benjamin 2011:20 och Ecolier 2011:18. Junior: 13 i årets tävling kan vara en spännande utmaning.

I artikeln *Rika tärningar* i Nämnaren 2003:4 beskriver Barbara Clarke en intressant och utvecklingsbar aktivitet kring tärningar, som inte handlar om visualisering men om att se generella mönster.

Koordinatsystem

Problem som inbegriper koordinatsystem är relativt ovanliga i Kängurusammanhang. Men de är ofta roliga och för eleverna i Benjaminåldern passar de speciellt bra med tanke på att de också arbetar en hel del med kartor under dessa skolår.

9 Orientering

Rita in vägarna i problemet i ett koordinatsystem.
Pröva att låta Hanna och Samir gå sina delsträckor i en annan ordning. Spelar ordningen någon roll?
– Vilket hade varit den kortaste vägen för var och en? Rita in den vägen.
– I vilket väderstreck har de gått?
– Jämför deras vägar, vem går längst totalt – fågelvägen?

– Gör fler egna exempel på vägar och låt eleverna hitta olika vägar mellan två bestämda punkter
– Undersök "vandring" på klotet, om vi startar vid en pol. Detta kan fascinera barnen. Jämför med koordinatsystemet. Varför blir det inte likadant på klotet som i koordinatsystemet? Anknyt till elevernas erfarenhet av kartor över närområdet och världskartor. Vad händer med polområdena på en platt världskarta? Varför?

Om kartor och kartprojektion kan man läsa i Ulf Perssons artikel *Sfären* i Nämnaren 2004:4.
Cadet 16 i år är också ett problem i koordinatsystemet.

Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. &Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2009 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Om ni inte har och inte planerar att läsa problemlösningsmodulen inom Matematiklyftet, finns den alltså ändå tillgänglig. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.