Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2012

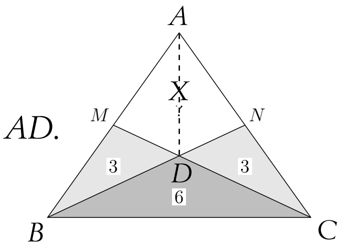
Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Därefter följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problem i klassen.

Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Där kan du sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru/
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 27 april.

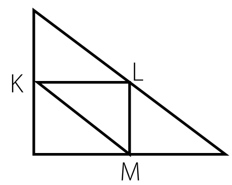
Svar och lösningar



1 D: 6
Låt D vara skärningspunkten mellan de två medianerna. Dra linjen AD. Eftersom $AM = BM$ och höjden från D till AB är gemensamma för triangel ADM och MDB, så har de samma area, 3. Samma resonemang gäller för triangel ADN och NDC. Alltså är arean av fyrhörningen 6.
Lösning 2: Area av triangeln ABN är lika med arean BCN som är 9. Arean av $AMDN$ är lika med arean av ABN minus arean av BDM, alltså $9 - 3 = 6$.

2 E: Alice har gjort ett misstag.
Beräkningen $2 \times$ talet $+ 9$ ger alltid ett udda svar. Alices fjärde tal är jämnt, så här gjorde hon ett fel.

3 C: 12 cm
Den kortaste sträckan är den vinkelräta sträckan från hörnet D till linjen L. Kvadraten har arean 16 cm^2. Eftersom triangeln har samma area och samma bas, har den höjden 8 cm. Avståndet är 4 cm + 8 cm = 12 cm.



4 B: 12
Vi ritar den rätvinkliga triangeln och markerar mittpunkterna. Triangeln KLM är likformig med den ursprungliga triangeln då sidornas förhållande är 1:2. Därför är omkretsen hälften av den stora triangelns omkrets. Omkretsen är 24/2 = 12.

5 C: 90 cm
Anta att bordet har höjden h cm och låt Adam ha längden a cm och Mike längden m cm. Då gäller följande $h+a=m+80$ och $h+m=a+100$. Ledvis addition ger $h=90\,\text{cm}$.

6 D: $8-(8\div 8)+8$
Vi ersätter konstanten 8 med variabeln a. Då bildas följande utryck som är meningsfulla för alla $a>0$

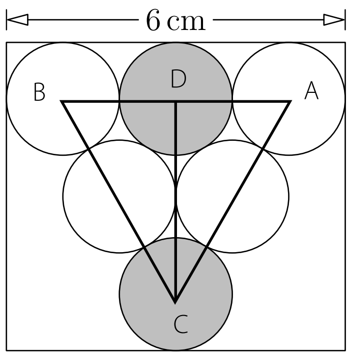
A: $(a+a-a)\div a=a/a=1$
B: $a+a\div a-a=1$
C: $a\div(a+a+a)=a\div 3a=1\div 3$
D: $a-a\div a+a=2a-1$ som beror på värdet på a
E: $a\cdot(a\div a)\div a=1$

7 D: 11
Diagonalen med längden 2 är en sida i var och en av de två likbenta trianglarna. I den ena triangeln måste en sida vara 4 och då måste även den andra vara 4 (2 skulle inte uppfylla triangelolikheten). För den andra triangeln gäller att en sida är 2 och en är 1. Då måste den tredje vara 2. Alltså är omkretsen $4+4+2+1=11$.

8 D: 19
Det sökta talet $x>11$, ska vara en delare både i $144-11=133$ och i $220-11=209$, alltså en faktor i den största gemensamma delaren till 133 och 209, som är 19.

9 B: 12
Anta att Dennis vann x gånger. Då har han fått $3x$ kolor samtidigt som han har gett Mary $(30-x)\cdot 2$ kolor. Men de har samma antal kolor som från början, alltså vann Dennis lika många kolor som han förlorade, $3x=2(30-x)$ med lösning $x=12$.

10 C: $(2\sqrt{3}-2)\,\text{cm}$
Bind samman mittpunkterna i hörncirklarna till en liksidig triangel ABC. Låt D vara mittpunkten i den övre grå cirkeln. Då är ADC en halv liksidig triangel. Då gäller $AD{:}AC{:}DC=1{:}\,2{:}\sqrt{3}$. Eftersom diametern i varje cirkel är 2, så är $AD=2$ och $DC=2\sqrt{3}$. Det sökta avståndet är $2\sqrt{3}-2$.



11 D: 2:59
Klockorna visar 2:54, 2:57, 3:02 och 3:03. Det är bara 2:59 som uppfyller villkoren för klockornas felvisning.

12 E: 6
3300, 2310, 2301, 1320, 1302, 1311.

13 C: 32 cm^2
Rektangelns area är $4\cdot 16\text{ cm}^2=64\text{ cm}^2$. Fyrhörningarna $ANMD'$ och $AMNB$ är kongruenta, så arean av fyrhörningen $ANMD'$ är 32 cm^2.

14 B: 4
Rad 1 och kolumn 3 har en gemensam siffra. Det ger att summan i rad 1 är fyra mer än kolumn 3. De synliga siffrorna i rad 3 har samma summa, 7, som de synliga siffrorna i kolumn 2. Alltså ska det stå 4 i den skuggade rutan.

15 D: Georg, Rolf, Kent

Vi gör en tabell och fyller i placeringarna.

	1:a	2:a	3:e
Påstående 1	Georg eller Kent		
Påstående 2	Rolf	Om Georg ...	Kent
Påstående 3	Rolf	Kent	Om Georg ...
Påstående 4		Georg eller Rolf	

Påstående 1 och 4 ger följande möjligheter

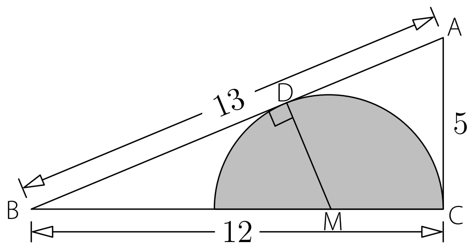
A:	Georg	Rolf	Kent
B:	Kent	Rolf	Georg
C:	Kent	Georg	Rolf

Påstående 3 motsäger möjlighet B, påstående 2 motsäger möjlighet C.

16 B: 10/3

Tangenten är vinkelrät mot radien i tangeringspunkten. Avståndet $AD = AC = 5$ ger $BD = 8$. Låt den inskrivna halvcirkeln ha radien r. $BM = 12 - r$. Pythagoras sats ger

$r^2 + 8^2 = (12 - r)^2$ med lösning $r = \dfrac{10}{3}$ eller:



Triangel ABC är likformig med triangel MBD vilket ger $r = MD = 5 \cdot 8/12$.

17 C: 64

När Kängurun befinner sig i S eller i L har han inget val, har han redan hoppat 12 gånger så måste han hoppa till H, annars till L. 6 gånger under spelet befinner sig Kängurun i L, då får han välja mellan två hoppriktningar. Multiplikationsprincipen ger $2^6 = 64$ möjligheter.

18 D: 9

Vi börjar med att primtalsfaktorisera 2012. $2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503 = 2^2 \cdot 503$. Då är $m = 2$. Vi söker en potens av 2 så att $2^k - k = 503$. För $k = 9$ får vi $512 - 9 = 503$.

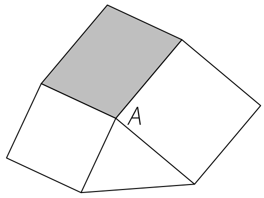
19 A: 8

För att kunna sätta ihop en sluten kedja måste guldsmeden ha minst lika många öppna länkar som kedjestumpar (bestående av en eller två stängda länkar). Från början har han 12 stumpar och inga öppna länkar, alltså 12 färre. Om han öppnar en länk i en stump med två länkar ökar han antalet öppna länkar med ett, alltså minskar differensen med ett. Om han öppnar båda länkar i en stump med 2 ökar han antalet öppna länkar med två och samtidigt minskar antalet stumpar med en alltså minskar differensen med tre. Det effektivaste sättet att minska differensen med 12 är att öppna både länkar i fyra stumpar. Alltså behöver han öppna 8 länkar.

20 B: 16

Lösning 1:

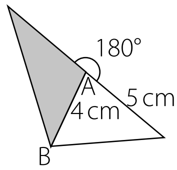
Sidorna i triangeln som är gemensamma med kvadraterna har längden 4 cm respektive 5 cm. Låt v vara den mellanliggande vinkeln. Areasatsen ger $\frac{4 \cdot 5 \cdot \sin v}{2} = 8$. Parallellogrammen har sidorna 4 cm och 5 cm.



Den mellanliggande vinkeln i hörnet A är $180° - v$, $\sin(180 - v) = \sin v$.
Alltså är parallellogrammens area $2 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$.

Lösning 2:

Halva skuggade parallellogrammen och den vita triangeln har två lika stora sidor 4 cm och 5 cm på grund av de två kvadraterna. Summan av de mellanliggande vinklarna är 180°, eftersom i punkten A där den skuggade parallellogrammen och den vita triangeln träffas finns det dessutom två räta vinklar på grund av kvadraterna. Då kan vi rita halva den skuggade parallellogrammen och den vita triangeln bredvid varandra. Då ser vi att de två trianglarna har en gemensam sida, 4 cm, och båda har de lika långa sidorna 5 cm. Trianglarna har gemensam höjd från punkten B mot sidan 5 cm. Alltså har de samma area och parallellogrammens area 16 cm².



21 C: 4

Vi har $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53} = (2 \cdot 5)^{53} \cdot 2^6 \cdot 3^4 = 6^4 \cdot 2^2 \cdot 10^{53} = 6^4 \cdot 4 \cdot 10^{53}$. En potens av 6 har alltid slutsiffra 6. Multiplikation med 4 ger slutsiffra 4.

22 A: G är dubbelt så långt som H

Lösning 1:

Låt A vara det ställe där loken av de två tågen börjar mötas och B det ställe där de sista vagnarna skiljs åt. Vi ska jämföra tåglängderna med intervallet AB. Tåget G passerar A på 8 sek och under den nionde sekunden åker det ytterligare en sträcka som är 1/8 av tåglängden vilket är lika långt som |AB| eftersom slutet av sista vagnen förflyttar sig från A till B under den 9:e sekunden. Under samma 9 sek hinner bara 3/4 av tåget H passera A (hela tåget behöver 12 sek). Den återstående 1/4 sträcker sig mellan A och B i det ögonblick då tågen skiljs åt.
1/8 av G = |AB| = 1/4 av H, alltså är G dubbelt så långt som H.

Lösning 2 (använder klassisk mekanik):

Låt L_1 och L_2 vara tågens längder, v_1 och v_2 tågens farter. Vi använder sambandet $s = t \cdot v$, (sträcka = tid · fart). Problemets premisser kan uttryckas med ekvationerna:

$L_1 = 8 \cdot v_1$

$L_2 = 12 \cdot v_2$

$L_1 + L_2 = 9 \cdot (v_1 + v_2)$

Den tredje ekvationen förklaras med att, sett från ett av tågen, har det mötande tåget en (relativ) fart på $v_1 + v_2$ och förflyttar sig under 9 sekunders tid, i relation till det första tåget, en sträcka som motsvarar båda tågens längder sammanlagt.

$9 \cdot L_1 = 72 \cdot v_1$

$6 \cdot L_2 = 72 \cdot v_2$

$-8 \cdot (L_1 + L_2) = -72 \cdot (v_1 + v_1)$

Ledvis summering ger $L_1 = 2 \cdot L_2$

23 C: Det är omöjligt att alla mynten visar krona.
När Karin vänder ett mynt och Bux vänder ett mynt, så kan de göra det på ett av följande tre sätt:

1. Karin vänder ett som visar klave och Bux vänder ett som visar klave. Efteråt visar dessa två mynt krona och antalet mynt som visar krona ökar därmed med 2.
2. Karin vänder ett som visar krona och Bux vänder ett som visar krona. Efteråt visar dessa två mynt klave och antalet mynt som visar krona minskar därmed med 2.
3. En av dem vänder ett som visar klave och en av dem vänder ett som visar krona och antalet mynt som visar krona förblir därmed oförändrat.

I samtliga fall, om antalet mynt som visade krona var jämt innan, så förblir det jämt. Antalet mynt som visade krona var jämt från början (noll) och det förblev jämn, hur många gånger än de två utförde sina vändningar. Det är därför omöjligt att alla fem mynten visar krona efter 10 sådana par av vändningar. Alltså gäller svarsalternativet C. Vi visar nu att inget av svarsalternativen A, B och D alltid behöver vara sant:

A: Bux vänder varje gång samma mynt som Karin vände.

B: Det finns ett mynt som de aldrig vänder, de väljer bland de övriga 4 varje gång.

D: Om det finns mynten som visar klave när det är Bux´ tur, så vänder han ett av dem.

24 D: 5/18
Om a är antalet prickar första tärningskastet visar och b det andra så delas åttahörningen i exakt tre delar av linjer Aa och Bb om och endast om $2 \le a \le b \le 5$. Av totalt 36 utkast finns det $T(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ sådana, som uppfyller dessa villkor.

Arbeta vidare med Junior 2012

Det finns många sätt att arbeta med Känguruproblemen. Problemen är kanske inte av samma karaktär som eleverna möter i läroboken. De är sällan rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Vill man inte arbeta genom en tävlings samtliga problem kan man exempelvis välja ut problem som har något gemensamt från de olika tävlingarna. De kan också komplimenteras med liknande problem från tidigare års tävlingar. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742

Tal och algebra

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. I flera av årets problem nämns siffra och tal. Diskutera med eleverna när har vi en siffra, när har vi ett tal. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grunden för arbete med tal i bråkform.

J2 Informationen i texten innehåller uttrycket: 2 x talet + 9. Fråga eleverna vad man kan göra med uttryck. Vilken gemensam egenskap har de resultat man får när man använder det här uttrycket på heltal? Diskutera udda och jämna heltal. Hur ska ett uttryck se ut om svaret ska bli ett jämnt tal? Alice kunde i stället för uttrycket ha skrivit en formel. Ta upp begreppen formel och uttryck. Vilka bokstäver motsvarar de beräkningar som var korrekta? Ta upp begreppet ekvation. Låt eleverna göra egna meddelande.

J5
Låt eleverna formulera algebraiska uttryck för textens påståenden. Ett liknande problem är C2012 nr 15.

J6
Ta upp begreppen numeriskt uttryck och algebraiskt uttryck. Låt eleverna göra om svarsalternativen till algebraiska uttryck och förenkla dem. Ett liknande problem är C2012 nr 4. Arbeta med båda problemen parallellt. Diskutera prioriteringsregler. Vilka parenteser behövs?

J8
Ta upp begreppet delbar. Låt a och b vara två heltal. Om b är en delare i a så gäller att det existerar ett heltal k så att $a = kb$. Om b inte är en delare i a så kan vi skriva $a = kb + r$ där k och r är heltal. Diskutera resttermen r. Vilka värden kan r anta? Ta upp positiva och negativa rester, begreppet modulus. Liknande problem S2006 nr 12.

J9
Vilken förändring av kolor sker efter varje slantsingling? Hur kan man uttryck den algebraiskt? Diskutera vilka räknesätt som är inblandade när man ”ger”.

Räkna sannolikheter. Vi antar naturligtvis att sannolikheten att myntet visar klave och att det visar krona är 50% var. Vad händer efter 3 kast. Låt elever göra en lista på alla möjliga utfall. Vilken är sannolikheten att Dennis och Mary efter tre kast har lika många kolor som de hade från början? Vilken är sannolikheten att Mary vinner? Låt elever göra en lista över möjliga resultat (antal vunna/förlorade kolor) efter tre kast och beräkna sannolikheten för varje resultat, gör en sannolikhetsfördelningstabell. Om man har en sannolikhetsfördelningstabell för tre kast, kan man ha nytta av den, när man vill göra en likadan för fyra kast. Rita Pascals triangel och beräkna sannolikhetsfördelningar även för fem och för sex kast. Ställ två frågor motsvarande de ställda efter tre kast. Låt elever gissa motsvarande sannolikheter efter nio kast. Fortsätt att räkna på samma sätt fördelningar för sju, åtta och nio kast för att se hur bra man har gissat. Rita grafer för sannolikhetsfördelningar (binomialfördelningar) efter tre, sex respektive nio kast. Gör tillsammans en gissning/uppskattning av motsvarande sannolikheter efter 30 kast. Diskutera binomialfördelningen och normalfördelningen. En fråga på slutet: Vilken blir sannolikheten, exakt, att Dennis och Mary efter 25 kast har lika många kolor som de hade från början?

J12
Inför beteckningen *abcd* för ett fyrsiffrigt tal och låt eleverna skriva talet i utvecklad form. Ändra frågan till ”Låt någon av siffrorna vara 3 och summan av de övriga siffrorna 3”. Hur många tal finns det då? Vilken gemensam egenskap har dessa tal? Dessa fyrsiffriga tal har siffersumma 6. Hur många fyrsiffriga tal med siffersumma 6 finns det? Jämför uppgift 6 på Junior 2011.

J14
Diskutera olika lösningsmetoder. Ta upp magiska kvadrater. Liknande problem J2011 nr 17, S2011 nr 12, B2010 nr 10, GyC2010 nr 17, S2009 nr 18, GyC2008 nr 2, S2008 nr 1, J2005 nr 11.

J18
Diskutera olika lösningsmetoder. En metod kan vara att pröva för olika positiva heltal *m*:
$m = 1$ ger $2012 = 1^1(1^k - k) = -k$ saknar lösning då k är ett positivt heltal.
$m = 2$ ger $2012 = 2^2(2^k - k) = 4(2^k - k)$, $2^k - k = 2012 / 4 = 503$ och bara $k = 9$ uppfyller ekvationen.
$m = 3$ ger $2012 = 3^3(3^k - k) = 27(3^k - k)$, men 2012 är inte delbart med 3.
$m = 4$ ger $2012 = 4^4(4^k - k)$, men 2012 är inte delbart med 4^4.
$m \geq 5$ ger $2012 \leq 5^5(5^k - k) = 3125(5^k - k)$ saknar lösning eftersom för minsta möjliga värde på k är HL större än VL.
Vad händer om *m* och *k* även kan vara negativa heltal?
Ta upp primtalsfaktorisering. Liknande problem S2005 nr 5, J2008 nr 18.

J21
Resonera med eleverna om antalet nollor i slutet på talet. Hur kan de bestämma antal nollor? Låt de skriva talet i grundpotensform. Ta upp slutsiffror på kvadrattal, kubiktal, andra potenser. Liknande problem är S2004 nr 18, S2009 nr 20.

Geometri

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t.ex. att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

I samband med uppgifterna J1, J3, J4, J7, J10, J13, J1 och J20 kan det vara lämpligt att kontrollera elevernas kunskaper om geometriska begrepp. Be eleverna förklara vad som menas med linje, sträcka, skärningspunkt, parallellogram, inskriven cirkel, likformighet och kongruens.

J1
Ta upp höjder i trianglar. Vilka trianglar har samma höjd? Vad kan vi säga om deras area?
Liknande problem är J2006 nr 23.

J3
Diskutera vad som menas med kortaste möjliga sträcka. Vilket är förhållandet mellan kvadraten och triangelns area om svarsalternativ A, B eller D gäller? Diskutera svarsalternativ E. Vilka lägen kan punkten *D* ha för att svarsalternativ C ska vara korrekt?

J4
Diskutera likformighet och kongruens. Vilken area har triangeln *KLM*?

J7
Ta upp triangelolikheten. Konstruera fyrhörningen. Vilken area har fyrhörningen?

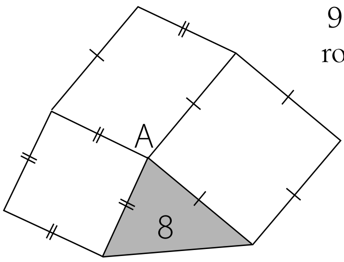
J10
Diskutera olika lösningsmetoder. Ta upp halvliksidig triangel och förhållandet mellan triangelsidorna. Låt eleverna arbeta med S2012 nr 17.

J13 Här har vi angett rektangelns mått som 4 cm x 16 cm. Ta upp det skrivsättet. Ta upp likformighet och kongruens. Ta upp olika lösningsmetoder. Vilken area har femhörningen *ABNMD*?

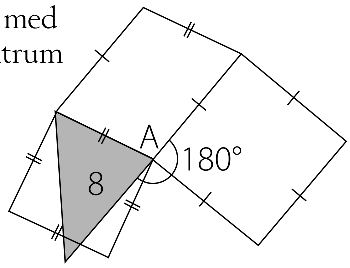
J16
Ta upp tangenter till cirklar och olika lösningsmetoder.
Lösning 1: Triangelns area är $5 \cdot 12 / 2 = 30$. Triangeln kan delas i två trianglar med höjden r och baserna 5 respektive 13, dess sammanlagda area är $r \cdot 5 / 2$ och $r \cdot 13 / 2$. Likheten $r \cdot 5 / 2 + r \cdot 13 / 2 = 30$ ger $r = 10 / 3$.
Lösning 2: Den rätvinkliga triangeln är en halva av en likbent triangel med sidor 10, 13, 13 och halvcirkeln är en halva av den i den likbenta triangeln inskrivna cirkeln. Cirkelns radie ges med Herons formel $p = (a + b + c)/2$ där a, b och c är triangelns sidor, $p = (10 + 13 + 13) / 2 = 18$
$r^2 = (p - a)(p - b)(p - c) / \mathrm{p}$ $r^2 = (18 - 10)(18 - 13)(18 - 13) / 18 = 8 \cdot 5 \cdot 5 / 18 = 100 / 9$ $r = 10/3$.
Även om formeln troligen var upptäckt av Arkimedes är även fysikern, matematikern, mekanikern och uppfinnaren Heron i Alexandria värd att uppmärksammas.

Jämför denna uppgift med S2012 nr 16. Arbeta med dem parallellt.

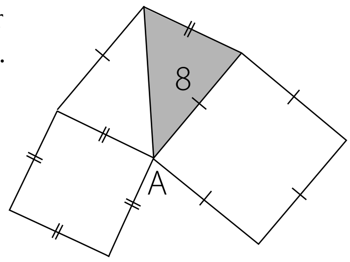
J20
Ta upp olika lösningsmetoder.
Lösning 3: Vi ska jämföra triangelns area med parallellogrammets area.



Vi vrider triangeln 90° medurs med rotationscentrum i A ...



... och parallellförflyttar triangeln.



Parallellogrammet består av två kongruenta trianglar, således är arean $2 \cdot 8\ \mathrm{cm}^2 = 16\ \mathrm{cm}^2$.

Logiskt resonemang

Några av årets uppgifter bygger på logiska resonemang inom olika matematiska fält. Här gäller det att utgå från givna förutsättningar och utifrån de föra ett hållbart resonemang. Uppgifterna ges också goda möjligheter till både skriftlig och muntlig kommunikation.

J11
Resonera med eleverna om hur man kan lösa uppgiften. Här kommer ett par lösningsförslag:

1. Den klocka som visar mest fel (5 min) går för fort eller sackar efter. Om den går för fort så måste den visa 3.03 och den riktiga tiden skulle i så fall vara 2.58. Det stämmer inte för då skulle klockan som visar 2.57 bara gå en minut fel. En sådan klocka har inte Bill. Alltså sackar den efter och visar 2.54. Den riktiga tiden är då 2.59 och det stämmer för alla fyra klockorna.

2 En rolig metod är att titta på kvadratsummornas av alla klockors fel. Den är $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 54$. Om den riktiga tiden är x minuter över tre (x kan vara negativt) så är kvadratsumman av alla klockors fel $(-6 - x)^2 + (-3 - x)^2 + (2 - x)^2 + (3 - x)^2 = 4x^2 - 8x + 58$. Ekvationen $4x^2 - 8x + 58 = 54$ har dubbelrot $x = -1$. Den riktiga tiden var 2.59. Ta upp minsta kvadratmetoden med eleverna.

Diskutera begrepp inom beskrivande statistik: medelvärde, variationsbredd, varians och standardavvikelse.

J15
Ta upp begreppen disjunktion och implikation inom satskalkylen. Diskutera likheter och skillnader mellan innebörden av ”eller” och ”om … så” i logiken och i vardagsspråket. Ta upp logisk slutledning. Låt elever försöka från de fyra påståendena sluta sig till en bestämd ordning av de tre tävlande. Här kommer ett exempel på en sådan slutledning, (1), (2), (3) och (4) är de fyra åskådarnas påståenden:

(1) Kent eller Georg kommer att vinna.
Bara en kan vinna och (1), alltså *(a) Rolf kommer inte att vinna.*
(2) Om Georg kommer tvåa, kommer Rolf att segra.
(a) och (2), alltså *(b) Georg kommer inte tvåa.*
(3) Om Georg kommer trea, kommer Kent inte att segra.
(1) och (3) alltså *(c) Georg kommer inte trea.*
(b) och (c) och alla tre kom på tre första platserna alltså *(d) Georg kommer att segra.*
(4) Georg eller Rolf kommer att bli tvåa.
(b) och (4) alltså *(e) Rolf kommer tvåa.*
(d) och (e) alltså *(f) Kent kommer sist av de tre.*
(d) (e) (f) är svaret, de kommer i ordning: Georg, Rolf och Kent.

Sist kontrollerar vi om de fyra åskådarnas påståenden stämmer på den ordningen, (skulle nu något av dessa påståenden inte stämma, så skulle det betyda att påståenden motsäger varandra).

Låt i första hand eleverna söka efter den sortens resonemang. Om de lyckas med själva resonemanget, behöver de kanske hjälp med dess presentation som bör göras i små distinkta steg med tydliga referenser (men den behöver inte nödvändigtvist se ut som presentation ovan).

Man kan också arbeta i omvänd riktning, utgå från t ex presentation ovan och låta elever uttrycka varje steg med egna ord och gärna beskriva resonemanget med uttryck som sammanfattar två eller flera steg.

En annan metod liknar användning av sanningsvärdetabell:

Eftersom det handlar bara om tre tävlande så kan vi skriva listan av alla möjliga placeringsordningar: GKR, GRK, KGR, KRG, RGK och RKG där G står för Georg, K för Kent och R för Rolf och eftersom vi vet att de tre kom på de tre första platserna i tävlingen, så kan vi betrakta varje ordningsföljd som tilldelning av dessa platser. Vi undersöker för varje placeringsordning/platstilldelning om det, bland de fyra påståendena: 1, 2, 3 och 4 finns något som förnekar den: GKR förnekas av 4, GRK förnekas inte av något av påståenden, KGR av 2, KRG av 3, RGK av 1 och RKG av 1 och 4. Vi ser att bland de 6 möjliga ordningar, bara Georg-Rolf-Kent inte förnekas av något av dessa fyra påståenden.

J17
En annan lösning på problemet är att beskriva Känguruns väg med ett ”ord” som består av 14 bokstäver: SP_P_P_P_P_P_H. Varje streck kan ersättas med S eller L oberoende av varandra. Vi har sex streck, två alternativ per streck, alltså $2^6 = 64$ ”ord” .

J22
Problemet och de två föreslagna lösningar kan diskuteras på fysik eller astronomilektioner. Hur skulle det gå med två kometer som färdas i motsatta riktningar? Vilken lösningsmetod skulle då vara lämplig?

J23
Många elever behöver nog genomföra uppgiften praktiskt för att inse att antal mynt som visar krona efter en omgång måste vara jämnt. Diskutera med eleverna om resultatet beror på vilka mynt som vänts, hur många gånger de vänder mynt, antal mynt som finns från början.

J24
Mera generellt problem kan vara: Given en konvex n-hörning . Man lottar ut två hörn, drar en sträcka mellan dem, lottar två hörn igen och drar en ny sträcka. Hur stor sannolikheten är att dessa två sträckor delar månghörningen i exakt 3 delar?