Kängurun – Matematikens hopp

Cadet 2012, svar och lösningar

Här följer svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också lösningsförslag. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på nätet.
Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen ncm.gu.se/kanguru/
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 27 april.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat, i varje årskurs, kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Du kan sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever i samma åldersgrupp och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner att lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen.

Arbeta vidare med lösningarna
De flesta problem kan lösas på flera sätt och med olika representationsformer. Låt eleverna försöka hitta olika metoder, beskriva sina lösningar och jämför metoderna. Se efter både likheter och skillnader. Pröva om lösningsmetoden är generell, t ex genom att ändra de ingående talen. Låt eleverna få upptäcka, eller visa dem, hur samma lösning kan presenteras på olika sätt, t ex med ord och med symboler. Det är viktigt att eleverna får uttrycka sina lösningar på mer än ett sätt. Att kunna gå mellan olika representationsformer är viktigt för att utveckla förståelse.

Flera problem kan lösas med hjälp av algebra. I förslagen på hur man kan arbeta vidare med problemen har vi i några fall givit exempel på resonerande lösningar. Arbeta gärna med att jämföra sådana lösningar med algebraiska lösningar och se hur den algebraiska lösningen på ett enkelt och komprimerat sätt beskriver ett resonemang.

Arbeta vidare med problemen
Efter redovisningssidorna i detta dokument följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problemen.

Svar och lösningar– Cadet

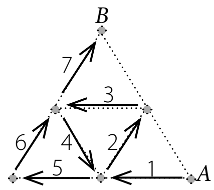
1. B 2 euro — För tre fler chokladkakor betalar man 6 euro.
Alltså kostar en chokladkaka 6/3 euro = 2 euro.

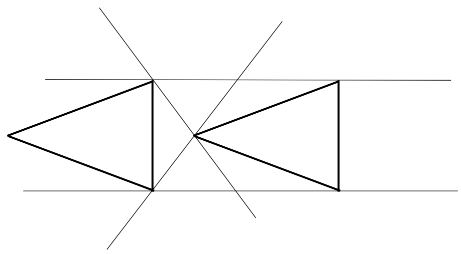
2. A 45 — NV är 1/4 varv moturs från NO, alltså 3/4 varv medurs från NO.
1/4 varv motsvarar 15 minuter, 3/4 varv alltså 45 minuter.

3. C 29 — När riddaren har huggit av det första huvudet har draken $5-1+5=9$ huvuden. Efter varje avhuggning ökar alltså antal huvuden med 4.
Ytterligare 5 hugg ger upphov till $5\cdot 4=20$ huvuden, totalt 29.
Antalet huvuden, h, som draken har efter n avhuggningar kan bestämmas med formeln $h=5+4n$. $n=6$ ger $h=29$.

4. E $(8+8-8)\div 8=1$
Beräkna uttryckens värde först för 8 och därefter för 1. Vi ser då att endast alternativ E ger samma resultat. Vi undersöker därför alternativ E och ser om detta alltid stämmer, oavsett vilket tal vi väljer.
Vi kallar talet för a:
E: $(a+a-a)\div a=1$, samma värde oavsett värdet på a.

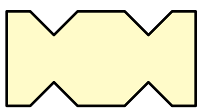
5. C 700 m — Ann kan gå 700 m om hon t ex går som pilarna visar.
Det måste vara två stigar som hon inte går.
Eftersom hon startar i A kan hon inte gå den stig som leder tillbaka till A, för då kan hon inte fortsätta.
Hon kan heller inte använda båda stigarna till och från B.





6. D 4

7. D



Denna bit kräver 4 raka klipp, eller två vikningar.

8. C 3825 — För att summan ska bli så liten som möjligt ska tusentalssiffrorna vara så låga som möjligt. Den minsta summan får vi om tusentalssiffrorna är 1 och 2, hundratalen 3 och 4, tiotalen 5 och 6 samt entalen 7 och 8.
Den lägsta summan är 3825, som vi tex kan få från $1357+2468$.

9. C 10 m^2 — Ärtlandets area ökar lika mycket som jordgubbslandets minskar.
Låt den gemensamma sidan mellan jordgubbslandet och ärtlandet ha längden x. Då är $3x=15$, $x=5$.
Ärtlandet hade förra året sidorna 5 m och 2 m, dvs arean 10 m^2.

10. B 60

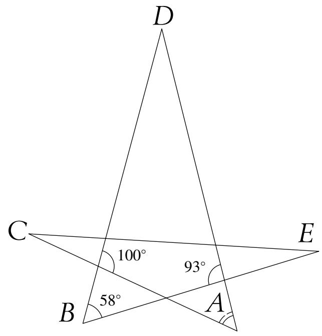
Eftersom talen i de tre rutorna åt vänster ska vara 100 tillsammans måste det andra och tredje tillsammans vara 90.
I de tre rutorna i mitten ska det vara sammanlagt 200, vilket innebär att det i den fjärde rutan måste stå 200 – 90 = 110. 110 + 130 =240, så i mittenrutan måste det stå 60.

10	*a*	*b*	*c*	130

Eller:
Kalla de tre talen för a, b och c.
Då gäller
$10 + a + b = 100$ ger $a + b = 90$
$a + b + c = 200$ ger $c = 110$
$b + c + 130 = 300$ ger $b = 60$

11. C 51°

$\angle D = 180° - 58° - 93° = 29°$
$\angle A = 180° - 100° - 29° = 51°$



12. C 7

Det enda påstående som inte stämmer med 7 är ”större än 100”, så på kortet med 7 måste det stå ”större än 100”.

13. D 1,5 cm

Omkretsen på de tre små trianglarna är sammanlagt 9 småtrianglars sidlängder.
Tre av sidorna sammanfaller med sidor i sexhörningen.
De tre återstående sidorna i sexhörningen motsvarar då 6 sidlängder hos den lilla triangeln, dvs varje sådan sida i sexhörningen är dubbelt så lång som sidan i den lilla triangeln.
Sidan i den stora triangeln blir då 4 gånger så lång som sidan i den lilla triangeln.
Vi vet att den stora triangelns sida är 6 cm, så sidan i den lilla triangeln är 6/4=1,5 cm.
Med algebra kan vi uttrycka det kortare:
Låt a vara sidan i en bortklippt liksidig triangel.
Då har den långa sidan i den grå sexhörningen längden $6 - 2a$.
Omkretsen av de tre liksidiga trianglarna är $9a$.
Omkretsen av sexhörningen är
$3(6 - 2a) + 3a = 18 - 3a$, så att $9a = 18 - 3a$, $12a = 18$, $a = 1{,}5$.

14. C 6

Vi låter talen 1–9 vara antalet nötter som ekorrarna tog.
En ekorre kan ta 9 nötter, en kan ta 7 och en kan ta 5.
Av de återstående antalen 1, 2, 3, 6, 4 och 8 kan endast ett i varje par: 1 eller 2, 3 eller 6, 4 eller 8 tas. Som mest ger det 6 möjliga antal.
Ekorrarna kan t ex ha tagit 1, 3, 4, 5, 7 och 9 nötter.

15. E 50 cm

Låt den minsta kuben ha höjden x cm. Då har de övriga fyra kuberna höjderna $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ och $x + 8$.
Den minsta och den näst minsta är tillsammans lika höga som den högsta vilket ger $x + x + 2 = x + 8$. Alltså är $x = 6$.
Den sammanlagda höjden är $6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 50$.

16. B 1 och 6

Om vi bygger en tärning utifån ritningen (mentalt eller konkret) hamnar 1 och 6 på samma plats.

17. D $\frac{3}{16}$

Arean av triangeln ABC är hälften av kvadrates area och arean av triangeln MCD är en fjärdedel.
Eftersom triangeln MNC är rätvinklig, M är mittpunkt på sidan AD och sträckan AC är diagonal i kvadraten är triangeln AMN en rätvinklig likbent triangel med arean $\frac{1}{16}$.
De vita områdena är alltså $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$, så det grå är $\frac{3}{16}$.

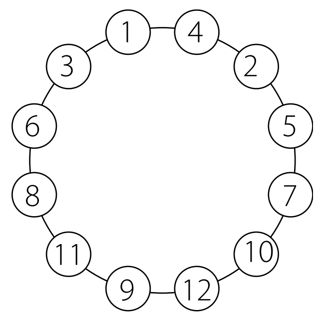
18. B 24

$\frac{3}{4}$ av männen dansar, så deras antal måste vara delbart med 3.

$\frac{4}{5}$ av kvinnorna dansar, så deras antal måste vara delbar med 4.
Antal dansande par måste vara delbart både med 3 och med 4, alltså även med 12. Minst 12 par, 24 personer, dansar. Då har vi dessutom 4 män och 3 kvinnor som inte dansar, 31 sammanlagt. De kan inte vara fler, skulle 24 par dansa så skulle totala antal personer vara dubbelt så stor, 62 och så många får inte befinna sig i salen samtidigt.
Eller:
Anta att det finns m män och k kvinnor, $m + k \leq 50$.
$\frac{3}{4}m = \frac{4}{5}k$ ger $15m = 16k$.
Den största gemensamma delaren till 15 och 16 är 1 så $m = 16$ och $k = 15$ är de minsta tal som uppfyller likheten, $16 + 15 = 31 < 50$. Alltså dansar 12 män med 12 kvinnor och det är 24 personer på dansgolvet.

19. D 6 och 8

Det finns bara två tal bland 1 till 12 som skiljer sig från 1 med 2 eller 3, talen 3 och 4, alltså måste 1 stå mellan 3 och 4. Av samma anledning måste 2 stå mellan 4 och 5. Alltså bildar talen 3-1-4-2-5 en båge i ringen.
Det finns bara tre tal bland 1 till 12 som skiljer sig från 3 med 2 eller 3, talen 1, 5 och 6. Men 1 och 5 har vi placerat så det andra talet intill 3 måste vara 6. Vi har nu bågen 6-3-1-4-2-5.
Om vi startar med 12 och 11 i stället för med 1 och 2 får vi genom i princip samma resonemang fram att ringen måste innehålla bågen 7-10-12-9-11-8. Dessa två bågar innehåller alla tal 1 till 12, deras ändpunkter ska stå intill varandra i ringen och 6 kan inte stå intill 7. Alltså står 6 intill 8.



Ringen blir: 7-10-12-9-11-8 - 6-3-1-4-2-5- (och tillbaka till 7). Inget annat svarsalternativ stämmer.

20 D 1993

De tvåsiffriga kvadrattalen är: 16, 25, 36, 49, 64 och 81.
De ska paras ihop till tresiffriga tal, på så sätt att entalssiffran i det ena talet är tiotalssiffra i det andra talet. Det ger följande tresiffriga tal: 816, 364, 649, 164. Deras summa är 1993.

21 E 300 m

Börje rör sig med 4/10 av Annas hastighet och kommer därmed 4/10 så långt, dvs 200 m. Anna är alltså 300 m före.
Eller:
Anna rör sig med hastigheten 4 km/h + 6 km/h = 10 km/h.
Då tar det henne 0,5 km ÷ 10 km/h = 0,05 h att förflytta sig 500 m.
Börje rör sig med hastigheten 4 km/h. På 0,05 h har han förflyttat sig 4 km/h · 0,05 h = 0,2 km = 200 m. 500 m – 200 m = 300 m.

22.E 23

Om vi lägger alla berättelser med udda antal sidor efter varandra (i godtycklig ordning), så kommer den första att börja på en sida med udda nummer (1), den andra på en sida med ett jämt nummer, den tredje på udda o s v, varannan på udda varannan på jämn.
Det finns 15 berättelser med udda antal sidor, 8 av dem kommer att börja på udda sidonummer och 7 på jämn. Om vi nu lägger berättelser med jämna antal sidor i början eller på slutet av boken eller lite varstans mellan de "udda" så ändrar det ingenting, de udda förskjuts bara ett jämt antal sidor fram, så udda startsida förblir udda och jämn förblir jämn. Däremot kan vi påverka antalet berättelser med jämnt antal sidor som kommer att börja på udda sidor. Vi kan se till att alla ska börja på udda sidor, t ex genom att placera alla jämna före alla udda, då kommer 8 udda och alla 15 jämna att starta på udda sida. Sammanlagt 23.

23.B 4

Vi sammanställer i en tabell varje enskild vridning i grader och den totala vridningen i grader.

Vridning nr	1	2	3	4
grader	3	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$
totalt i grader	3	12	39	120

Efter den fjärde vridningen kommer triangeln att passa i hålet igen, eftersom det är en liksidig triangel.

24. C 13

Om F är summan av fyrhörningarnas omkrets, T summan av de fyra små trianglarnas omkretsar, O omkretsen av den stora triangeln och S summan av de tre sträckornas längd så är
$F + T = 2S + \mathrm{O}$. Det ger $S = (25 + 20 – 19)/2 = 13$.

Arbeta vidare med Cadet

Det finns många sätt att arbeta med Känguruproblemen. Problemen är kanske inte av samma karaktär som eleverna möter i läroboken. De är inga rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra olika lösningar och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika representationsformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur det konkreta uttrycks i ord och med symboler.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem och arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning. Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och om strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att använda problemen kan vara att eleverna i grupp resonerar sig fram till en lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Nedan har vi sorterat problemen under några rubriker. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker.

Många problemtyper återkommer från år till år, i olika skepnader och i olika varianter. Här hänvisar vi till några av dessa, men det finns fler. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742

Tal och algebra

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. I flera av årets problem nämns siffra och tal. Diskutera med eleverna när har vi en siffra, när har vi ett tal. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grunden för arbete med tal i bråkform.

I flera av uppgifterna är det lämpligt att arbeta med uttryck och ekvationer, även om det går att hitta andra metoder. Utveckla därför problemen med att visa generella lösningsmetoder. Lär eleverna använda ekvationer, ett bra redskap.

C1

Ta upp begreppen uttryck och ekvation. Låt eleven träna på att skriva både numeriska och algebraiska uttryck. Hur synliggörs ”mer än” i en ekvation.

Liknande problem:
E2012 nr 10, C2001 nr 4, nr 14, B2001 nr 13, B2004 nr 9, J2004 nr 8, C2008 nr 6, J2009 nr 3.

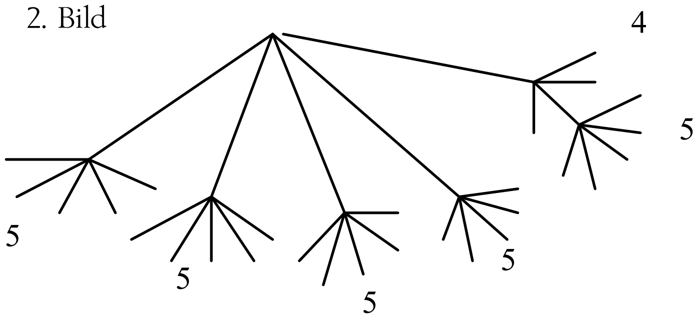
C3

Diskutera förändringen av antal huvuden efter varje avhuggning. Hur kan man formulera det med ord, bild, tabell, diagram, uttryck? Hur många avhuggningar måste göras för att draken ska få 41 huvuden, 0 huvuden? Visa på olika lösningsmetoder.

1. Tabell

Hugg	Huvuden
0	5
1	9
2	13
3	17
4	21
5	25
6	29
7	33

2. Bild



3. Numerisk beräkning

$5-1+5-1+5-1+5-1+5-1+5-1+5=35-6=29$

$5-1+5-1+5-1+5-1+5-1+5-1+5=5-6+6\cdot 5=29$

$5-1+5-1+5-1+5-1+5-1+5-1+5=5+6\cdot 4=29$

C4

Den här uppgiften omfattar både prioriteringregler för olika räknesätt i ett uttryck och i någon mening begreppet variabel.

Nästan alla uttryck i uppgiften innehåller parenteser och man kan undersöka vad som händer med uttrycken om man tar bort eller flyttar parenteserna.

Hur ser uttrycken ut om man skriver dem med ett horisontellt divisionstecken?

Hur skriver man $(8 + 8) \div 8 + 8$? Som $\dfrac{8+8}{8} + 8$ eller som $\dfrac{8+8}{8+8}$?

Varför behöver man ingen parentes i täljaren eller nämnaren i ett bråkuttryck, är inte division prioriterat före addition? Lösningen på uppgiften, $(8 + 8 - 8) \div 8$, har värdet 1 oavsett om 8:orna byts ut mot något annat tal. Utmana eleverna att konstruera andra numeriska uttryck där värdet alltid är 1. Kan de konstruera uttryck där värdet alltid är 2, 3 eller något annat konstant värde? Jämför även med Junior nr 6.

Uppgiften har likheter med spelet ”tänk på ett tal”. Ett exempel:

– Tänk på ett tal
– Multiplicera med tre
– Addera sex
– Subtrahera med det tal du tänkt på först
– Halvera
– Vad har du nu?

Låt eleverna konstruera egna spel med specificerade resultat. Det kan vara att man alltid ska hamna på samma tal, ett dubbelt så stort tal (dubbla det ursprungliga talet), etc. De kan spela med varandra och försöka ”avslöja” hur det fungerar.

I *Algebra för alla* (Bergsten m fl, 1997, s 39–40) finns beskrivet hur man kan arbeta med ”tänk på ett tal” med olika representationsformer.

C8

Ta upp begreppen siffra och tal. Hur många fyrsiffriga tal kan vi konstruera med de åtta siffrorna om varje siffra får användas exakt en gång, får upprepas? Vilken är den största summan man kan få? Vilken är den minsta differensen, största differensen mellan två fyrsiffriga tal bildade på samma sätt. Jämför även E2012 nr 13. Vilken är den största respektive minsta summa, största respektive minsta differens om vi har tio siffror och bildar femsiffriga tal. Liknande problem B2001 nr 21, B2002 nr 9, B2006 nr 17. En utvidgning kan vara att ta upp palindromtal se C2007 nr 8.

C10

Jämför S2012 2 och lös de två problemen parallellt. Be eleverna fylla i alla rutorna. Låt eleverna konstruera liknande problem. Ett annat problem med tal i rad finns som nr 9 på C2004. Ta upp ekvationssystem.

C12

Systematisk prövning för att lösa uppgiften kan göras i en tabell, tex

	2	5	7	12
Delbart med 7			X	
Primtal	X	X	X	
Udda		X	X	
Större än 100				

Ett alternativt sätt att resonera sig fram till lösningen är:

Det enda tal som inte är primtal är 12, så på kortet med talet 12 står det ”primtal”.

Det enda jämna talet av de övriga är 2, så ”udda” ska stå på det.

”Delbart med 7” måste stå på kortet med talet 5.

Alltså står det ”större än 100” på kortet med talet 7.

Ett sätt att arbeta vidare är att låta eleverna skapa egna liknande problem och lösa varandras. Uppmuntra eleverna att vara konstruktiva när det bestämmer vilka egenskaper hos de naturliga talen de ska använda. I ett bra problem ska egenskaperna (tex primtal, delbart med 3 osv) vara delvis överlappande. Man kan utvidga problemen genom att tillåta fler än fyra kort och andra tal, t ex alla heltal. Det sistnämnda kan ge upphov till diskussioner tex om ett negativt tal kan betraktas som jämnt eller udda, om det finns negativa primtal, etc.

Liknande problem har använts i studier av problemkontextens betydelse för hur svårt ett problem blir att lösa. Ett sådant är 4-korts-problemet (se tex Shannon, 2007, s. 179).

Här är fyra kort som ligger på ett bord. Du vet att alla kort har en siffra på ena sidan och en bokstav på den andra.

A P 6 3

Korten lär vara märkta enligt följande regel:

Om ett kort har en vokal på ena sidan så har det ett jämnt tal på motstående sida.

Vilka kort måste du vända på och titta på baksidan för att vara säker på att alla kort verkligen följer regeln?

Samma problem kan formuleras i en annan kontext (fritt efter Shannon, 2007).

Du arbetar på en krog och ska bl a se till att följande lag upprätthålls:
Personer under 20 år får inte dricka alkohol.

Vid ett bord sitter fyra personer. Två av dem kan du direkt bestämma åldern på, en är över 20 och en är under 20, men du ser inte vad de dricker. Åldern på de andra två är svårare att avgöra, men däremot ser du vad de dricker. En dricker läsk och en dricker öl. Situationen kan beskrivas så här:

Under 20 år	Över 20 år	Dricker läsk	Dricker öl

Vilka av dessa personer måste du kolla för att vara säker på att lagen inte bryts?

Det visar sig att den andra formuleringen av problemet är mycket lättare: De flesta inser direkt att man måste kontroller vad ”under 20 år”-ingen dricker, samt åldern på personen som dricker öl. Att man måste kontrollera vad som står på baksidan av korten som visar A och 3 i det första fallet är inte lika tydligt.

Ett sätt att använda problemen är att ge halva klassen den ena formuleringen och den andra till den andra halvan, följt av en gemensam diskussion av lösningarna till de två problemen.

Referenser
Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. NCM, Göteborgs universitet.
Shannon, A. (2007). Task context and assessment. I A. Schoenfeld, (red), *Assessing mathematical proficiency* (s 177–191). Cambridge University Press.

C14
Ordna talen 1 till 9 i en rad och diskutera vilka av talen som uppfyller villkoret dubbelt så många. Vilka mängder av tal kan vi bilda som uppfyller de två villkoren? Ändra dubbelt så många till en multipel av vad någon annan ekorre tog. Hur många ekorrar kan Smilla högst se då? Ändra nio nötter till ett annat antal nötter.
Liknande problem C2009 nr 19, C2001 nr 22.

C15
Använd tallinjer för att markera kubernas höjder. Rita en tallinje där man anger kubernas höjder utifrån den minsta, en tallinje där man anger utifrån den största och en där man anger utifrån den mellersta. Hur ser ekvationen för ”den största kuben är lika hög som de två minsta tillsammans” ut i de tre fallen. Ta upp aritmetisk talföljd och aritmetisk summa. Vilket samband finns mellan kubernas volymer om samtliga sidor alltid skiljer sig med 2 cm för två närliggande kuber?
Liknande problem S2007 nr 17, S2008 nr 15, C2010 nr 7.

C19
Diskutera hur man resonerar när man skriver in talen. Jämför även B2012 nr 17. Liknande problem C2007 nr 20.

C20
Ta upp begreppen kvadrattal och kubiktal. Vilken blir summan om man får ett tvåsiffrigt kubiktal istället för ett tvåsiffrigt kvadrattal? Samma procedur fast med tvåsiffriga tal, fyrsiffriga tal.
Liknande problem S2004 nr 10, GyC2006 nr 20

C22
Diskutera udda och jämna tal, summan av udda tal, jämna tal, udda och jämna tal. Hur många sidor omfattar berättelserna? Ta upp aritmetisk summa.

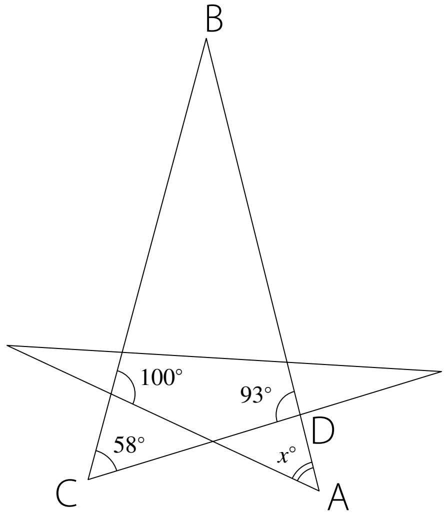
Geometri

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Hur markerar man t ex att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

I samband med uppgifterna C11, C13, C17, C23 och C24 kan det vara lämpligt att kontrollera elevernas kunskaper om geometriska begrepp. Be eleverna förklara vad som menas med linje, sträcka, mittpunkt, vinklar, vinkelrät, triangel, månghörning, omkrets, area och vridning,

C11

En annan lösningsvariant på detta problem är denna.
En myra går från *A* till *B*, svänger 100° till vänster, går till C, svänger 180°– 58° = 122° till vänster, går till *D* svänger 180°– 93° = 87° och fortsätter i riktning från *A*. Myran svängde sammanlagt 100° + 122° + 87° = 309° till vänster. Det är riktningsdifferensen mellan *A*-vinkelns ben. Men svängarna gick från benet *AB* till vänster och på utsidan till benet *AD*. Den inre vinkeln *BAD* = 360° – 309° = 51°.



Denna lösning kan användas som underlag för att diskutera hur många grader en riktningsändring innebär. Ta upp medurs och moturs vridning. Vilka vridningar räknas positiva, vilka räknas negativa?

Med den stjärnformade månghörningen som utgångspunkt diskutera storlek på vinklar, Ta upp likbelägna vinklar, vertikalvinklar, alternatvinklar, sidovinklar, supplementvinklar.

Figuren är en månghörning. Hur många hörn har den? Vad kallas en sådan månghörning? Ta upp diagonal och be eleverna rita in dessa. En diagonal kan även ligga utanför månghörningens kanter.

Liknande problem S2012 nr 7, J2010 nr 11, J2009 nr 10, GyC2005 nr 16, nr 21.

C13

Ta upp likformighet och kongruens. Bestäm skalan mellan en bortklippt triangel och en liksidig triangel. Ta även upp areaskala. Jämför arean av den stora triangeln och en bortklippt triangel. Vilken area har hexagonen?

Liknande problem J2007 nr 17, C2009 nr 2.

C17

Ta upp olika lösningsmetoder. En annan lösning är denna.

AN och *MN* är halva sträckan av diagonaler i en kvadrat med sidan *AM*. *AM* är halva sidolängden i *ABCD*, alltså är $AN = \frac{1}{4} \cdot AC$ och $CN = \frac{3}{4} \cdot AC$. Det medför att den färgade triangeln C*MN* har en area som är ¾ av arean av *ACM*, som är ¼ av kvadratens area, $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

Diskutera arean av de olika delområdena som bildas. Arbeta med trianglar som delar höjd som utgångspunkt för areabestämning. Lös J2012 nr 1 med eleverna.

Liknande problem B2010 nr 16, GyC2010 nr 22, S2008 nr 21, S2007 nr 6, C2003 nr 23.

C23

Lägg två exakt lika stora liksidiga trianglar på varandra. Fixera dem genom att sticka en knapphål genom deras tyngdpunkt. (Gå gärna igenom hur man bestämmer den.) Vrid nu den översta triangeln moturs runt tyngdpunkten. Hur många grader har man vridit den när trianglarna helt överlappar varandra? I det här problemet skulle man göra vridningar som var potenser av 3 grader, dvs 3, 3^2, 3^3, 3^4. De fyra vridningarna är tillsammans 3° + 9° + 27° + 81° = 120°. Vad händer om man fortsätter att vrider triangeln grader som är potenser av 3, dvs 3^5, 3^6 osv. När passar den in i hålet igen och hur många varv har man då vridit den?

Kan man utgå från någon annan vinkel än 3° (v° och låta varje vridning vara v gånger så stor som den föregående) och ändå få triangeln att passa in i sitt ”hål” efter ett antal vridningar? Hur blir det om varannan vridning är moturs och varannan medurs? Kommer triangeln att passa in i sitt ”hål” efter ett antal sådana vridningar?

Hur blir det om man istället vrider en kvadrat runt diagonalernas skärningspunkt? Börja med att t ex pröva startvinkeln 5° och låta varje ny vridning vara 5 gånger så stor som den föregående. Kommer kvadraten att passa in i sitt ”hål” efter ett antal vridningar?

C24

För att öka elevernas förståelse för hur man kan lösa denna typ av problem kan man låta eleverna arbeta med något liknande.

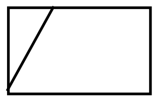
1a Börja med att rita en rektangel och beräkna dess omkrets.

b Dra en diagonal i rektangeln så den delas i två rätvinkliga trianglar.

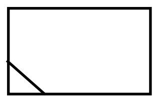
c Ta reda på de två trianglarnas omkrets.

d Hur kan du bestämma diagonalens längd om du känner rektangelns omkrets och de två trianglarnas omkrets?

2 Undersök hur det blir om du istället dra drar en sträcka från ett hörn till en motstående sida. Går det att ta reda längden av den ritade sträckan om man vet rektangelns omkrets och omkretsen på de två delar rektangeln delats in i?



3. Undersök hur det blir om du istället drar drar en linje från en sida till en närliggande sida. Går det att ta reda på sträckans längd om man vet rektangelns omkrets och de två delarnas respektive omkrets?



4. Måste man utgå från en rektangel? Tänk dig att det är två länder. Man vet vart och ett av ländernas omkrets. Man vet också hur långt det är runt bägge länderna. Kan man då räkna ut hur lång deras gemensamma gränslinje är?

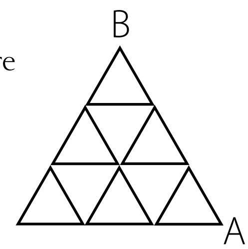
Liknande problem GyC2006 nr 14, B2007 nr 12, nr 17, nr 20, B2008 nr 21, GyC2008 nr 4, J2008 nr 10, C2011 nr 20, nr 22

Logiskt resonemang och problemlösningsstrategier

En stor del av årets uppgifter bygger på logiska resonemang inom olika matematiska fält. Här gäller det att utgå från givna förutsättningar och utifrån de föra ett hållbart resonemang. Uppgifterna ges också goda möjligheter till både skriftlig och muntlig kommunikation.

C5

Resonera om hur Ann kan promenera från A till B. Utöka figuren med ytterligare en rad trianglar. Hur lång är nu den längsta promenad Ann kan gå?



Liknande problem C2001 nr 10, B2003 nr 22, GyC2005 nr 3, GyC2009 nr 9, J2009 nr 16, J2010 nr 8, B2011 nr 8.

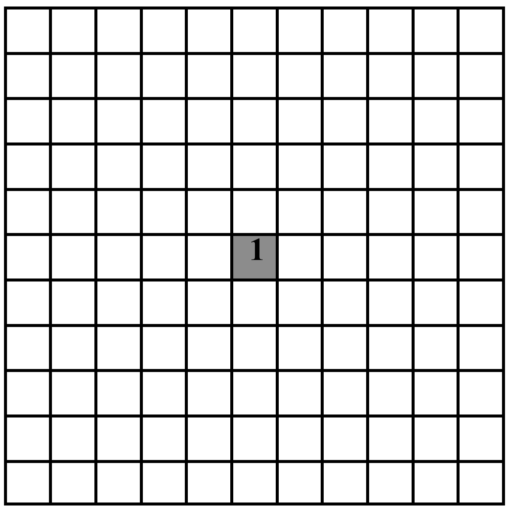
C7

Resonera först om hur man kan ha klippt för att få de olika svarsalternativen. Gör sedan klippen och se om det stämmer.
Liknande problem att resonera om och arbeta med B2001 nr 2, C2003 nr 1, GyC2004 nr 7, C2011 nr 17.

C16

I uppgiften hamnar det ursprungliga bottenytan underst igen efter fem vändningar på kuben. Med hjälp en vanlig tärning kan eleverna undersöka ett antal liknande frågeställningar, tex

– vilken sida på kuben hade har inte varit underst när man kommit till position 5 (i uppgiften)?
– hur skulle man ha vänt kuben från position 5 om man ville undvika att samma sida kom underst igen?
– på hur många olika sätt kan man rulla en tärning så att alla sex sidor hamnar underst precis en gång? (40)
– på vilka rutor hamnar man om man rullar tärningen/kuben så att alla sidor hamnar underst precis en gång? (Startrutan markerad.)



Om man använder en tärning som är numrerad på vanligt vis och startar med 1:an nedåt kan man undersöka vilka summor av ”bottentalen” man kan få genom att vända tärningen. T ex kan man efter en vändning få fyra olika summor.

1 +2 =**3**, 1+3= **4**, 1+ 4=**5**, 1+5=**6**

– Vilka summor kan man få (inte få) genom två vändningar (alltså summan av tre ”bottental”)?
– På hur många olika sätt kan man få de olika summorna?
– Hur blir det med tre vändningar (summan av fyra ”bottental”)?