Kängurun – Matematikens hopp

Student 2011

Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också lösningsförslag. Därefter följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problem i klassen.

Svar och lösningar

1 A: 1

Eftersom summan av talen vid varje sträckas ändpunkter är densamma måste talen vid punkter som har en gemensam granne vara lika. Med andra ord punkter med två stegs avstånd har samma tal. Av detta följer att punkter med jämnt avstånd har samma tal. Punkten markerad med ”x” har avstånd 6 till en punkt med 1.

2 B: Fernando, Sebastian, Michael

Michael och Fernando bytte plats 9 gånger ger att Fernando är före Michael i mål. Fernando och Sebastian bytte plats 10 gånger ger att Fernando är före Sebastian i mål. Michael och Sebastian bytte plats 11 gånger ger att Sebastian är före Michael. Det ger ordningen Fernando, Sebastian, Michael.

3 A: 5

$2^{xy} = (2^x)^y = 15^y = 32 = 2^5$ ger $xy = 5$

4 C: Claes

Två raka gator kan korsa varandra högst en gång. Det finns bara en krokig gata i byn så minst en av de 2 gator där Ann och Bo bor är rak. Men den korsar Claes gata 2 gånger, alltså måste Claes gata vara krokig.

5 D: 9:e
De fyrsiffriga talen med siffersumman 4 skrivna i fallande ordning är: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002, 1300, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1030, 1021, 1012, 1003.

6 C: 12
Eftersom sexhörningen har sidan 1, så är även kvadraternas sidor 1 och i varje triangel är två av sidorna 1. Den regelbundna sexhörningens hörnvinkel är 120°, alltså har trianglarna vinkeln $360° – 120° – 2 \cdot 90° = 60°$ mellan de lika sidorna. Alltså är trianglarna liksidiga. Figurens omkrets består av 12 kanter, vardera med längden 1.

7 C
Skärningslinjen är en mjuk kurva, vilket betyder att den har en tangent i varje punkt. Det ser ut att uppfyllas i figur B och C. Men för figur B bildas i ihopsättningspunkten en vinkel som inte är 180°, alltså saknas det tangent i den punkten.

8 C: 25
Alternativ 1: Dra från hörnet S en sträcka SU, parallell med TQ och lika lång som TQ. Dra RU. Triangeln SUR är kongruent med triangel STP. Alltså är $SU = 5$ och fyrhörningens area är 25.

Alternativ 2: Om triangeln PTS roteras 90° moturs med S som rotationscentrum så hamnar P på R och parallelltrapetsen $QRST$ bildar tillsammans med den förflyttade triangeln en kvadrat med sidan 5.

9 C: 671
Alternativ 1: Det finns 1006 udda tal, var tredje är en multipel av 3. Kvar blir 671 tal.

Alternativ 2: Kvar blev alla tal från 1 till 2011 som varken är delbara med 2 eller med 3. Bland 6 konsekutiva heltal finns alltid exakt två sådana. Heltalsintervallet [1, 2, 3, …, 2011] består av talet 1 och 335 sextalsintervall. Kvar blev 1 och 335 par, totalt $1 + 335 \cdot 2 = 671$.

10 B: 5
Anta att de kastar n tärningar.

$P(\text{ingen sexa med } n \text{ tärningar}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

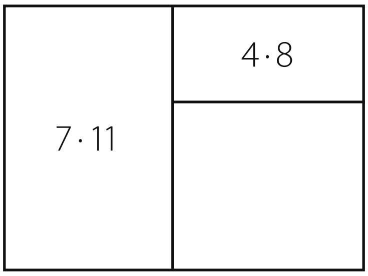
$P(\text{en sexa med } n \text{ tärningar}) = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ ger $n = 5$.

11 D: 7 gånger 8

Om en rektangel delas i tre rektanglar så har antingen samtliga rektanglar ett mått som är gemensamt eller så har varje par av delrektanglar ett gemensamt hörn på den stora rektangelns rand. 7×11 och 4×8 har inget mått gemensamt, alltså har de ett gemensamt hörn på en av den storas sidor.

Val av längden på de sidor som ska utgå från det gemensamma hörnet och som är vinkelräta mot den stora rektangelns sida bestämmer den tredje rektangelns mått: 11 och 8 ger $(11-8)\cdot 4 = 3\cdot 4 = 12$, 11 och 4 ger $(11-4)\cdot 8 = 7\cdot 8 = 56$, 7 och 8 ger $(8-7)\cdot 11 =$ $= 1\cdot 11$, 7 och 4 ger $(7-4)\cdot 8 = 3\cdot 8 = 24$. Den tredje rektangeln har måttet 7×8.



12 E: inget av A–D är möjlig

Skriv i de tomma rutorna *a, b, c, d* och *e*. Följande ekvationssystem kan ställas upp:

$$\begin{cases} a+2+1+c=10 \\ 2+b+c+3=10 \\ 1+c+d+4=10 \\ c+3+4+e=10 \end{cases} \text{ Förenkling ger } \begin{cases} a+c=7 \\ b+c=5 \\ c+d=5 \\ c+e=3 \end{cases} \text{ Ledvis summering ger att}$$

$a+b+c+d+e=20-3c$. Summan kan inte anta något av värdena A–D.

13 D: 36

$6+9+4=19$ barn hade med sig syskon. Det innebär att $48-19=29$ barn inte hade syskon med och kom från 29 olika familjer. Sex barn med ett syskon representerar 3 familjer, 9 barn med två syskon representerar 3 familjer och 4 barn med tre syskon representerar en familj. Totalt var $29+7=36$ familjer representerade.

14 A: 1

Linjen genom cirklarnas medelpunkter utgör figurens symmetriaxel. T är symmetribilden av Y, alltså har de lika stor area.

15 E: $c<0$

Parabeln har en minimipunkt. Då är $a>0$, alltså är alternativ A sant.
Punkten (1,-10) ger att $a+b+c=-10$, alltså är alternativ C sant.

$y=ax^2+bx+c$ kan skrivas om som $y = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$. Grafen ger att

parabeln har en minimipunkt i fjärde kvadranten. Alltså är $\dfrac{b}{2a} < 0$, dvs $b<0$. Alltså är alternativ B sant.

Parabeln har två nollställen som ger $\frac{b^2}{4a} - c > 0$ vilket ger $b^2 > 4ac$, alltså är alternativ D sant. Välj $y = 10x^2 - 22x + 2$, den uppfyller alternativ A–D, men inte E eftersom $c > 0$. Alltså kan det sista påståendet vara falskt.

16 A: 200
Alternativ 1:
$x^2 - 81 = (x+9)(x-9) = k \cdot 100$, där k är ett heltal och x positivt heltal mindre än 100.
Primtalsfaktorisering av 100 ger $100 = 2^2 \cdot 5^2$.
$x = 9$ ger $0 \cdot 18 = 0 \cdot 100$
$x = 41$ ger $32 \cdot 50 = 16 \cdot 100$
$x = 59$ ger $50 \cdot 68 = 34 \cdot 100$
$x = 91$ ger $82 \cdot 100$
Summan är $9 + 41 + 59 + 91 = 200$.

Alternativ 2:
$x^2 - 81 = (x+9)(x-9) = p \cdot q$ där $p = x - 9$ och $q = x + 9$ är delbart med 100. Differensen $q - p = 2x$ är ett jämnt tal, produkten pq är delbar med 100, alltså är både p och q jämna. $q - p$ är inte delbar med 5, men produkten är delbar med 25, alltså är ett av talen p eller q delbar med 25 och därmed med 50. Omvänt om ett av talen p eller q är delbart med 50 så är produkten delbar med 100. Positiva heltal < 100, sådana att $x + 9$ är delbara med 50, är 41 och 91, sådana att $x - 9$ är delbara med 50, är 9 och 59.
Summan är $9 + 41 + 59 + 91 = 200$.

17 B: 7
I schackklubben finns 5 flickor och x pojkar. Påståendet ”I varje grupp om sex medlemmar finns det alltid minst fyra flickor” ger att det kan finnas högst 2 pojkar.

18 B: 3
De vinklar som i figuren markerats med 1, 2,..., 9, betecknar vi $v_1, v_2, \ldots v_9$. Låt triangeln BED vara liksidig, då är $v_4 = v_5 = v_6$, $v_3 = v_7 = 120°$. Om triangel AEB är likbent och triangel ACD är likbent, så är $v_1 = v_2 = v_8 = v_9 = 30°$. Tre vinklar räcker. Anta att det bara är två olika vinklar. $v_1 < v_4$ och $v_6 < v_3$ ger $v_3 = v_4 = 90°$, alltså $v_5 = v_6 = 45°$ och $v_7 = 135°$, men det blev minst tre vinklar.

19 A: 2011

$$a_1 = 2011, a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{1}{1-2011} = -\frac{1}{2010},$$

$$a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2010}} = \frac{2010}{2011} = 1 - \frac{1}{2011}$$

$$a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{2011}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2011}} = 2011.$$

Allmänt $a_n = 2011$ ger $a_{n+3} = 2011$ vilket ger $2011 = a_1 = a_4 = \ldots = a_{1+3k}$. Det ger att $a_{2011} = a_{1+3 \cdot 670} = 2011$.

20 D: 25 kg

Alternativ 1:

När herr Jansson stod i kön till säkerhetskontrollen tänkte han: ”Jag fick betala mer än herr och fru Olsson därför att de hade en frivikt mer än jag och den var värd 7,50 euro. Utan frivikten skulle jag få betala ytterligare 7,50 och de 15 euro, dvs totalt 18 euro. Men de betalade bara 3 euro dvs en sjättedel, alltså för 10 kg av deras 60 kg. Det betyder att 2 frivikter motsvarar 50 kg, dvs en frivikt…, Nej nu måste jag plocka av mig alla metallföremål!”

Alternativ 2: Låt b vara bagagets vikt, x största tillåtna avgiftsfria bagagevikt, a avgiften per kg och p priset som man får betala. Det ger följande ekvation $(b-x)\cdot a = p$.

För herr och fru Olssons bagage gäller följande ekvation: $(60-2x)\cdot a = 3$. För herr Janssons bagage gäller ekvationen $(60-x)\cdot a = 10{,}50$. Ledvis division ger

$\frac{60-2x}{60-x} = \frac{3}{10,50}$ med lösning $x = 25$.

21 B: 2

Börja med att förkorta $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E} = \frac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}$.

Den minsta möjliga kvoten får vi genom att sätta de minsta siffrorna för de bokstäver som förekommer i täljaren, ju oftare desto mindre siffra, och de största i nämnaren:

$\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 1}{8\cdot 9} = \frac{5}{3}$. Det minsta heltalsvärdet kan inte vara mindre än 2, men 2 kan det vara: $\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 1\cdot 1}{8\cdot 9} = 2$.

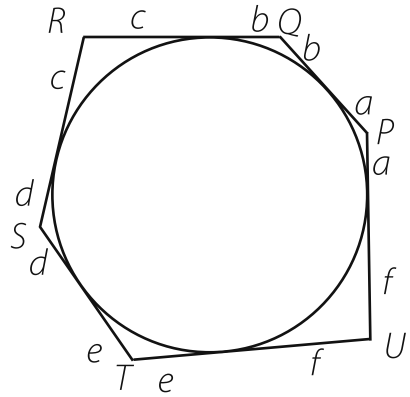
22 C: 19

Vi gör en tabell över antal möjliga pilar som kan träffa respektive fält och den erhållna summan. Det ger 19 olika poängresultat.

12	7	3	1	summa
3				36
	3			21
		3		9
			3	3
2	1			31
2		1		27
2			1	25
1	2			26
	2	1		17
	2		1	15
1		2		18
	1	2		13
		2	1	7
1			2	14
	1		2	9
		1	2	5
1	1	1		22
1	1		1	20
1		1	1	16
	1	1	1	11

23 D: 6

För två tangenter till en cirkel som möts i en punkt P gäller att avståndet från respektive tangeringspunkt till P är lika. I figuren är de lika avstånden markerade. Det ger följande ekvationer



$a+b=4$
$b+c=5$
$c+d=6$
$d+e=7$
$e+f=8$
$a+f=a+b-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+f)=$
$=4-5+6-7+8=6.$

24 C: 26

Ett möjligt sätt att fylla rutnätet är

7	14	16	8	4
21	24	2	26	10
3	12	22	20	25
6	9	18	15	5

Här är det största talet $n=26$ och det är omöjligt att fylla i tabellen med n mindre än 26 enligt givna regler därför att varje ruta har minst två grannar, men talen 1, 13, 17, 19 och 23 har inget tal som duger till en granne bland talen 1 till 25, och 11 har bara ett (talet 22). Inget av dessa 6 tal kan vara med i tabellen. Återstående $25-6=19$ tal räcker inte till för att fylla tabellen som har 20 rutor.

Arbeta vidare med Student 2011

Det finns många sätt att arbeta med Känguruproblemen. Problemen är kanske inte av samma karaktär som eleverna möter i läroboken. Det är sällan rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Vill man inte arbeta med en tävlingsklass samtliga problem kan man exempelvis välja ut problem som har något gemensamt från de olika tävlingsnivåerna. De kan också kompletteras med liknande problem från tidigare. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Årtalsproblem

Varje år finns det flera problem som har anknytning till tävlingsåret. Låt eleverna arbeta under en lektion med samtliga problem som finns med i år med anknytning till 2011. S5 handlar om fyrsiffriga tal som har siffersumman 4. Be eleverna göra en lista över de fyrsiffriga talen som har denna siffersumma. Vilka av dessa tal är primtal? Vilka delare har övriga tal? Ta upp begreppet siffersumma. Vad kan siffersumman ge för information om ett tals delare? I listan finns alla fyrsiffriga tal med siffrorna 2, 1, 1 och 0. Benjamin 12 handlar om de talen. En lämplig inledningsuppgift på ett sådant här tema kan vara Cadet 1. Låt eleverna beräkna de fem värdena och ordna dem i storleksordning. Fortsätt därefter med Cadet 9 och diskutera hur man beräknar den. Ta sedan Cadet 3 och låt eleverna skriva

ner alla tider då digitalklockan visar siffrorna 0, 1, 1, 2 i någon ordning. För ett liknande problem om digitalklocka se Junior nr 3 2006, Ecolier nr 12 2007. Därefter kan Benjamin 12 komma följt av Junior 6. Gå sedan till Student 9 och ta upp udda tal och multipel av 3. Avsluta med Student 19, ta upp vad som menas med en talföljd och låt eleverna beräkna de första talen i följden.
Se http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_talet_2011.pdf

Tal och algebra

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel, delbarhet, primtal och primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grund för arbete med tal i bråkform. För att lösa några av problemen krävs algebraiska färdigheter.

S3
$2^x = 15$ och $15^y = 32$ är exempel på potensekvationer. Ta upp lösning av olika typer av ekvationer. Arbeta med potenslagar och logaritmerlagar.
Se http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_potenser_2011.pdf

S12
Arbeta med ekvationssystem och lösningsmetoder. Vilka värden skulle summan kunna anta? Låt eleverna även lösa Junior 17. Liknande problem är Benjamin nr 10 2010, GyCadet nr 17 2010, Student nr 18 2009, GyCadet nr 2 2008, Student nr 1 2008 och Junior nr 11 2005.

S16
Diskutera lösningsstrategier. Vad ska man utnyttja i den här typen av uppgifter? Arbeta med begreppen konjugatregeln, multipel, primtalsfaktorisering och delbarhet. Ändra förutsättningarna.

S21
Skriv upp uttrycket på tavlan och resonera om vad man kan göra med det. Vad betyder förkortning? Vad händer med uttryckets värde när man förkortar? Efter förkortning har vi uttrycket:

$\frac{K \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E}$. Bokstäverna representerar olika ental större än 0. Primtalsfaktorisera samtliga ental. Hur kan man använda primtalsfaktorisering för att förkorta uttrycket? Vilka övriga heltalsvärden kan uttrycket anta? Ett liknande problem är nr 20 i Cadet 2009.

S19
Talföljder är eleverna bekanta med från Ma C, men det kan vara bra med repetition av begreppet. Låt eleverna beräkna de sex första elementen, det är en nyttig övning i att hantera beräkningar med bråk. Det vanliga sättet att arbeta med rekursiva talföljder är att man bestämmer några termer i början, undersöker dem, jämför, söker samband och mönster, försöker förklara sambanden, formulerar sambanden mera generellt, undersöker några termer till, ser om sambanden fortfarande gäller, försöker bevisa det matematiskt. Sedan använder man de upptäckta sambanden för att säga något om, och till slut bestämma värden av, termer långt fram i följden utan att för den skull behöva bestämma värden av alla termer däremellan.

I student 19 märker man att term nr 4 har samma värde som term nr 1, och eftersom varje term bestäms av enbart den rekursiva formeln och sin föregående, så vet vi att term nr 5 i så fall måste ha samma värde som nr 2, nr 6 samma som 3 osv. Alla värden upprepas med period 3 och då är det lätt att räkna ut att term nr 2011 (2011 har siffersumman 4) har samma värde som nr 4 och 1.

I det här sammanhanget kan man ta upp modulus-begreppet och diskutera rester, rekursionsformel och sluten formel.

Ta gärna upp bevis, t ex induktionsbevis. Uppgifter med talföljder från tidigare tävlingar är Student nr 11 2010, Junior nr 23 2010, Junior nr 9 2009, Student nr 24 2009, Student nr 19 och nr 22 2008, Junior nr 11 2005 samt Student nr 5 2004.

S24
Resonera om vilka tal som inte kan ingå i rutnätet för att bestämma minsta värde på n. Visa sedan att det är möjligt att fylla rutnätet.

Geometri

Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t ex att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

I samband med uppgifterna S4, S6, S7, S8, S11, S14, S18 och S23 kan det vara lämpligt att kontrollera elevernas kunskaper om geometriska begrepp. Be eleverna förklara vad som menas med linje, sträcka, skärningspunkt, parallellogram, parallelltrapets, månghörning (regelbundna och oregelbundna), likformighet och kongruens samt inskriven respektive omskriven cirkel.

S4
Arbeta vidare med skärningspunkter mellan linjer. Tidigare givna uppgifter med linjer och skärningspunkter finns i boken *Geometri och rumsuppfattning* s 42.

S6
Ta upp regelbundna månghörningar. Vilken är den minsta regelbundna månghörningen? Utgå från den och konstruera motsvarande figur som i uppgiften. Den kommer då att bestå av en liksidig triangel med sidan 1, tre kvadrater och tre trianglar. Vilken typ av månghörning bildas? Vilken area respektive omkrets har den? Utgå från en regelbunden fyrhörning och femhörning, gör motsvarande konstruktion och bestäm area och omkrets.

S23
Arbeta med cirkeln. Ta upp egenskaper hos en tangent till cirkeln. Låt eleverna visa att om två tangenter till en cirkel möts i en punkt P så är avståndet från respektive tangeringspunkt till punkten P lika. Vilken omkrets har hexagonen? Vilken area har den, om cirkeln har radien r? Visa följande samband: Kring en cirkel med radie r är en n-hörning omskriven. Om n-hörningen har area A och omkrets P så gäller $A = \frac{P \cdot r}{2}$. Problem med cirklar och tangenter finns i boken *Geometri och rumsuppfattning*, t ex 33, 34, 344, 381 och 382.

S14
Ta upp symmetrier i figuren, de inskrivna cirklarna.

S7
Låt eleverna rulla ihop ett papper till en cylinder, göra ett plant snitt, enligt figuren och veckla ut papperet. Vad har snitt ytan för form? Ett betydligt enklare problem är C17 på årets Cadet. Arbeta gärna vidare med båda uppgifterna.

S18
Uppgiften är lämplig för resonemang kring vinklar och vinkelsummor i trianglar.

Funktioner

S15
Resonera om andragradsfunktioner. Vilken betydelse har tecknet framför andragradstermen? Vilken/vilka funktioner kan grafen representera? Tidigare givna funktionsuppgifter är Student nr 16

2009, Student nr 23 2007 samt Student nr 21 2004.

Kombinatorik och sannolikhetslära

Diskutera begrepp som multiplikationsprincipen, permutationer, kombinationer, utfall, utfallsrum, likformig sannolikhetsfördelning, träddiagram och komplementhändelse.

S10

Resonera om hur stor risk det är att någon ska få bada den dagen för olika antal tärningar. Uppgifter med sannolikheter från tidigare tävlingar är Student nr 20 2010, Student nr 11 2007, Junior nr 24 2007 och Student nr 11 2006.

Logiskt resonemang

En stor del av årets uppgifter bygger på logiska resonemang inom olika matematiska fält. Här gäller det att utgå från givna förutsättningar och utifrån dem föra ett hållbart resonemang. Uppgifterna ges också goda möjligheter till både skriftlig och muntlig kommunikation.

S1

Resonera om vilka möjliga tal som kan skrivas in vid respektive punkt. Se även Benjamin nr 16.

S2

Resonera om vilken betydelse att byta plats ett udda respektive ett jämnt antal gånger innebär.

S13, S17

Resonera om innebörden av informationen i texten. Arbeta gärna vidare med liknande problem, t ex Cadet nr 21 2011, Benjamin nr 19 2011, Junior nr 10 2007, Student nr 20 2007, Student nr 10 och nr 13 2009 samt Student nr 8 2010.