Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2011

Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Därefter följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problem i klassen.

Svar och lösningar

1 B: 7,5 m
Eftersom övergångstället börjar och slutar med vita fält så finns det sju svarta fält d v s totalt 15 fält. Gatans bredd är $15 \cdot 0{,}5\,\text{m} = 7{,}5\,\text{m}$.

2 C: $26\,\text{cm}^2$
Eftersom X och Y är mittpunkter så kan parallelltrapetset omformas till en rektangel med arean $2 \cdot 13\,\text{cm}^2 = 26\,\text{cm}^2$.

3 D: $R < Q < P$
Vi tillämpar följande 2 regler:
Om $a < b$ och $c > 0$ så är $a \cdot c < b \cdot c$ samt $c \cdot a < c \cdot b$.
Om $a < d$ och $b < e$ och $c < f$ så $a + b + c < d + e + f$.
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 < 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 < 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$.
Ett annat sätt är att beräkna: $P = 38$, $Q = 29$ och $R = 20$ alltså $R < Q < P$.

4 A: 1
Eftersom summan av talen vid varje sträckas ändpunkter är densamma måste talen vid punkter som har en gemensam granne vara lika. Med andra ord punkter med tvåstegsavstånd har samma tal. Av detta följer att punkter med jämnt avstånd har samma tal. Punkten markerad med ”x” har avstånd 6 till en punkt med 1.

5 C: $9\,cm^2$
Mosaikens bredd är $360\,cm^2 / 24\,cm = 15\,cm$. Då har varje platta, bredden $15\,cm / 5 = 3\,cm$ och en plattas area är $3^2\,cm^2 = 9\,cm^2$.

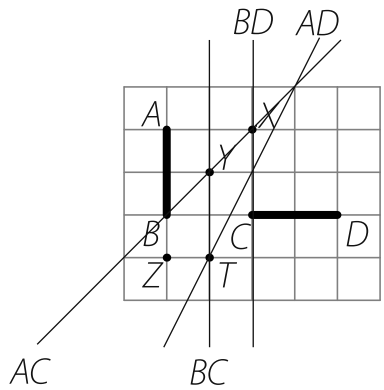
6 D: 9:e
De fyrsiffriga talen med siffersumman 4 skrivna i fallande ordning är: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002, 1300, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1030, 1021, 1012, 1003.

7 C: bara X och T
Beteckna ändpunkterna på den lodräta sträckan med A respektive B och på den vågräta sträckan C respektive D. När AB avbildas på CD finns två möjligheter:

Fall 1: A avbildas på C och B på D. Då gäller för rotationscentrum P att $AP = CP$, dvs P ligger på mittpunktsnormalen till AC och att $BP = DP$, dvs P ligger på mittpunktsnormalen till BD. Rotationscentrum är skärningspunkten för de två normalerna, dvs punkten X.

Fall 2: A avbildas på D och C på B. Då är rotationscentrum skärningspunkterna för mittpunktsnormalerna till AD och BC, d v s punkten T.

Även om rotationer går åt motsatt riktning och CD avbildas på AB gäller samma mittpunktsnormaler och samma rotationscentra.



8 C: 12
Eftersom sexhörningen har sidan 1, så är även kvadraternas sidor 1 och i varje triangel är två av sidorna 1. Den regelbundna sexhörningens hörnvinkel är 120°, alltså har trianglarna vinkeln $360° - 120° - 2 \cdot 90° = 60°$ mellan de lika sidorna. Alltså är trianglarna liksidiga. Figurens omkrets består av 12 kanter, vardera med längden 1.

9 E: 6
Låt den nedersta tärningens undre och övre sida ha a respektive b prickar, den mellersta tärningens undre och övre sida c respektive d prickar och den översta tärningens undre och övre sida e respektive f prickar. Då gäller följande samband: $a + b = 7, b + c = 5, c + d = 7, d + e = 5$ och $e + f = 7$. Förenkling leder fram till att $f = 2 + d$ och $d = 2 + b$, dvs $f = 4 + b$. Då är $b = 2$ och $f = 6$.

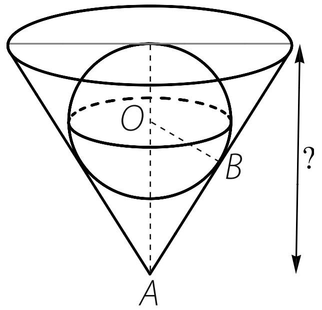
10 B: exakt 4 lördagar
En månad kan ha 28 till 31 dagar. Om en månad har 5 måndagar, 5 tisdagar och 5 onsdagar så börjar månaden på en måndag och har 31 dagar. Då slutade den föregående månaden på en söndag och eftersom den bara innehöll 4 söndagar så måste även den ha börjat på en måndag. Den innehåller alltså bara 28 dagar och den månaden är februari. Då är månaden med 31 dagar, mars, och månaden som kommer därefter är april som har 30 dagar. April kommer att börja på en torsdag och sluta på en fredag. Det ger att påståendet exakt fyra lördagar är sant.

11 B: Fernando, Sebastian, Michael
Michael och Fernando bytte plats 9 gånger ger att Fernando är före Michael i mål. Fernando och Sebastian bytte plats 10 gånger ger att Fernando är före Sebastian i mål. Michael och Sebastian bytte plats 11 gånger ger att Sebastian är före Michael. Det ger ordningen Fernando, Sebastian, Michael.

12 A: 1005
$9^n + 9^n + 9^n = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}$ ger $2n + 1 = 2011$, alltså $n = 1005$.

13 B: 512
Den lilla kubens volym $V_1 = a^3$ och den stora kubens volym $V_s = (a + 1)^3$
$V_s - V_1 = 3a(a+1) + 1 = 217$ ger $a = 8$. Han hällde över 512 liter.

14 C: 45 cm
Dra konens höjd och radien från kulans mittpunkt till konens mantel. Då är triangeln OAB en halv liksidig triangel och OA är 30 cm. Alltså är konens höjd 45 cm.



15 D: 5

A	B	C	D	2
E	F	G	H	0
I	J	K	L	1
M	N	O	P	1
2	0	1	1	

Om A är röd så måste C, D, I och M vara svarta och alla övriga röda. (en möjlighet).

Om A är svart så är en av C eller D samt en av I eller M svart ($2 \cdot 2$ möjligheter).

I det andra fallet ska också ett av fälten K, L, O eller P vara svart men det väljs inte, utan beror på de 2 första valen. Övriga ska vara röda. Det finns alltså 5 olika sätt.

16 D: 111
En hundratalsserie som börjar på en udda siffra ger 100 tal, t ex 300 – 399. Före den finns ytterligare 11 tal med minst en udda siffra, nämligen 289 – 299.

17 D: 12
Beteckna talen i de tomma rutorna med a, b, c och d. Då gäller att $1+a+b+2=10$ och $2+c+d+3=10$. Förenkling ger $a+b=7$ och $c+d=5$. Det ger att $a+b+c+d=12$.

18 C: Claes
Två raka gator kan korsa varandra högst en gång. Det finns bara en krokig gata i byn så minst en av de 2 gator där Ann och Bo bor är rak. Men den korsar Claes gata 2 gånger Claes gata måste alltså vara krokig.

19 C: 225
Varje påklistrad kvadrat har diagonalen 5 cm och följdaktligen arean 12,5 cm^2. På varje sida finns det 3 hela kvadrater. Kuben har sex sidor och den täckta arean är $6 \cdot 3 \cdot 12{,}5\,cm^2 = 225\,cm^2$.

20 C: 168
Låt talet vara *abcde*, där $a=b+c+d+e$. Vi kan börja med att konstatera att 0 måste ingå i talet eftersom den minsta summa med fyra olika tal, alla skilda från 0 är 10. Det lägsta värdet talet a kan anta är 6 eftersom $6=1+2+3+0$. Det finns $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ tal med första siffran 6. Första siffra 7 ger $7=1+2+4+0$ och 24 möjligheter. Första siffran 8 ger $8=1+2+5+0$ eller $8=1+3+4+0$, dvs $2\cdot24$ möjligheter. Första siffran 9 ger $9=1+2+6+0$, $9=1+3+5+0$ eller $9=2+3+4+0$, dvs $3\cdot24$ möjligheter. Det ger totalt 168 ”intressanta” tal.

21 B: $\dfrac{x}{y-1}$
Bråket i svarsalternativ B kan uttryckas på 3 sätt, $x/(y-1)$, $2x/(2y-2)$ eller $3x/(3y-3)$. Vart och ett av de övriga alternativen har samma täljare som en av dessa 3 men större nämnare.

22 D: 3
Av symmetriskäl kan vi anta att $x \ge y$. Det minsta naturliga tal som likheten kan gälla för är 4.
$y=4$ ger $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}$ med lösningen $x=12$. Paren $(12,4)$ och $(4,12)$ uppfyller likheten.
$y=5$ ger $x=\dfrac{15}{2}$ (ej naturligt tal), $y=6$ ger $x=6$ så $(6,6)$ är en lösning. $y>6$ ger $x<y$. Tre talpar uppfyller alltså likheten.

23 C: $\frac{1}{2}r^2$

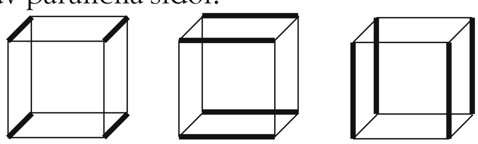
Anta att den lilla cirkelns radie är r_1. Pythagoras sats ger $r_1^2 = \frac{r^2}{2}$. Arean av det skuggade området är arean av halvcirkeln med radie r_1 $\left(\frac{\pi r_1^2}{2}\right)$ minskad med arean av cirkelsegmentet. Cirkelsegmentets area är arean av en kvartscirkel med radie r $\left(\frac{\pi r^2}{4}\right)$ minskad med arean av en rätvinklig likbent triangel med kateter r $\left(\frac{r^2}{2}\right)$.
Det ger

$$\frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{r^2}{2}.$$

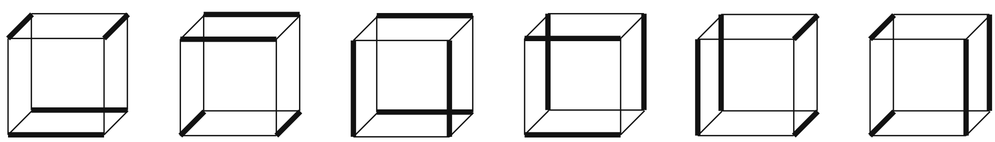
En rent geometrisk lösning:
Triangeln SXY är likbent och enligt randvinkelsatsen rätvinklig. Den utgör hälften av en kvadrat inskriven i den mindre cirkeln och en fjärdedel av en kvadrat inskriven i den större cirkeln. Proportionen mellan inskrivna kvadraternas och därmed även cirklarnas areor är 1:2. Kvartcirkeln SXY har samma area som den vänstra halvcirkeln av den mindre cirkeln. Drar vi bort den gemensamma delen av dessa två figurer (ett cirkelsegment) så återstår det skuggade området å ena sidan och triangeln SXY å den andra, de har lika stora areor och triangelns area är $\frac{r^2}{2}$.

24 C: 9
Kubens kanter har 3 riktningar därför måste minst 2 i mängden av 4 kanter vara parallella (Dirichlets lådprincip). Om 2 parallella kanter tillhör samma sida så finns det 2 möjligheter: A, alla 4 kanter är parallella och B, 2 kanter är sinsemellan parallella och 2 till dem vinkelräta kanter är sinsemellan parallella. Om de 2 först valda inte tillhör samma sida så måste de övriga 2 vara parallella till dem, alltså vi får fall A igen. Det finns alltså bara två typer av mängder av 4 kanter i en kub utan gemensamma hörn: A och B. I en kub finns det tre mängder av typ A: en för varje riktning samt sex av typ B: två för varje par av parallella sidor.

Typ A:



Typ B:



Arbeta vidare med Junior 2011

Det finns många sätt att arbeta med Känguruproblemen. Problemen är kanske inte av samma karaktär som eleverna möter i läroboken. De är sällan rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har man inte haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Ett sätt kan ju vara att arbeta med en tävlings samtliga problem men man kan även välja ut problem som har något gemensamt från de olika tävlingsnivåerna. De kan också kompletteras med liknande problem från tidigare år. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Årtalsproblem

Varje år finns det flera problem som har anknytning till tävlingsåret. Låt eleverna under en lektion arbeta med samtliga problem som finns med i år med anknytning till 2011. J6 handlar om fyrsiffriga tal som har siffersumman 4. Be eleverna göra en lista över de fyrsiffriga talen som har denna siffersumma. Vilka av dessa tal är primtal? Vilka delare har övriga tal? Ta upp begreppet siffersumma. Vad kan siffersumman ge för information om ett tals delare? I listan finns alla fyrsiffriga tal med siffrorna 2, 1, 1 och 0. Benjamin 12 handlar om de talen. En lämplig inledningsuppgift på ett sådant här tema kan vara Cadet 1. Låt eleverna beräkna de fem värdena och ordna dem i storleksordning. Fortsätt därefter med Cadet 9 och diskutera hur man beräknar den. Ta sedan Cadet 3 och låt eleverna skriva ner alla tider

då digitalklockan visar siffrorna 0, 1, 1, 2 i någon ordning. För ett liknande problem om digitalklocka se Junior nr 3 2006 och Ecolier nr 12 2007. Därefter kan Benjamin 12 komma följt av Junior 6. Gå sedan till Student 9 och diskutera udda tal och multipel av 3. Avsluta med Student 19, förklara vad som menas med en talföljd och låt eleverna beräkna de första talen i följden.
Se även http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_talet_2011.pdf

Tal och algebra

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal såsom faktor, multipel, delbarhet, primtal och primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grund för arbete med tal i bråkform.

J3

De här uttrycken innehåller endast tre termer, men hur stor blir respektive summa om man fortsätter att lägga till termer efter samma mönster? Definiera talföljder.

Utgå från uttrycket R. Hur ser följande två termer ut? Hur ser den allmänna termen ut? Hur skriver man summan om den består av n termer? $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$? Visa hur man kan skriva den med summatecken, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$. Arbeta med att ta fram en allmän formel för summan, alternativt ge eleverna formeln $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Diskutera hur man kan tolka formeln och hur man kan bevisa den. Behandla bevismetoder. Skriv uttryck med n termer även för P och Q. Vilken formel kan summan i P ersättas med? En formel för summan

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ är $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

J9

Tärningsproblem är trevliga att arbeta med. Kontrollera vad eleverna vet om en vanlig sexsidig tärning. Det här problemet finns även med på Benjamin nr 20, men med bild, vilket kan underlätta lösandet. Ge eleverna bilden eller be dem själva rita den för att underlätta lösandet. En inledande fråga till eleverna kan vara: Hur många prickar är det sammanlagt på de 14 sidor som är synliga? I samband med det här problemet kan man ta upp andra tärningsproblem som har förekommit under åren. I årets problem vet man summan av prickarna på de två sidor som möts. Förra året på Benjamin nr 14 skulle man i stället bestämma den summan. Det har funnits problem där man utifrån tärningskonstruktioner ska avgöra summan av prickar på de sidor som inte är synliga. Ge eleverna bilderna från t ex årets Ecolier 18, nr 1 i Junior 2007. I Student nr 18, 2008 är det inte standardtärningar men frågeställningen är den samma. I Junior nr 21, 2005 rullas en tärning och man är intresserad av antal ögon i slutläget.
Se även http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_tarningar_2011.pdf

J10

Hur är det med elevernas kunskaper om antal dagar i respektive månad? Känner de till ramsan ”30 dagar har november, april, juni och september, 28 en allen, alla de övriga 31”? Den stämmer om det inte är skottår, då har februari 29 dagar. Resonera om antal olika veckodagar i en månad med 28, 30 respektive 31 dagar.

Ge eleverna en tabell och be dem markera innevarande månad.

Må	Ti	On	To	Fr	Lö	Sö

Hur många dagar finns det av respektive veckodag? Vad kan man då påstå om antal veckodagar i föregående respektive efterföljande månad? Lös även Benjamin nr 18. Liknande problem nr 19 Benjamin 2006, nr 12 GyCadet 2006, nr 15 Benjamin 2004, nr 11 GyCadet 2004 och nr 15 Cadet 2002.

En fortsättning kan vara att välja ut en $3 \cdot 3$ kvadrat med datum, t ex:

8	9	10
15	16	17
22	23	24

och bestämma summan av talen i mittenkolumnen, i mittenraden, i den ena diagonalen samt i den andra diagonalen och jämföra resultaten. Gäller detta alltid?

J12
Erfarenhet från tidigare tävlingar där problem med potenser har funnits med är att lösningsfrekvens är låg. Ta upp potenslagarna. Låt eleverna pröva på Student nr 3. Liknande problem är Junior nr 19 2009, Student nr 17 2008, Junior nr 13 och 21 från 2007, Student nr 16 2007, Student nr 8 2006 och Student nr 23 2005. Se även http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_potenser_2011.pdf

J16
Hur många talföljder finns det som uppfyller villkoret? Ändra förutsättningarna till minst två udda siffror. Hur många tresiffriga tal finns det i en sådan följd?

J17
På hur många olika sätt kan man fylla i de tomma rutorna om talen måste vara positiva? Går det att bestämma talen i de tomma rutorna så att radsummorna respektive kolumnsummorna är lika med diagonalsummorna? Jämför även Student nr 12.

Liknande problem Benjamin nr 10 2010, GyCadet nr 17 2010, Student nr 18 2009, GyCadet nr 2 2008, Student nr 1 2008 och Junior nr 11 2005.

J20
Resonera om ett ”intressant tal”. Hur ser det ut? Hur många siffror kan ett ”intressant tal” innehålla som minst, som mest? Hur många tresiffriga, fyrsiffriga, sexsiffriga ”intressanta tal” finns det?

J21
För vilka värden på y är bråken inte definierade? Storleksordna bråken. Ett sätt att jämföra bråkens värde är att parvis beräkna kvoten mellan bråken. Arbeta med rationella uttryck. Liknande problem är Student nr 1, 2005.

J22
Diskutera med eleverna varför heltal mindre än 4 inte kan satisfiera ekvationen.
Arbeta vidare med stambråk, dvs bråk med täljaren 1. Lösningen till ekvationen är alla möjliga sätt att uttrycka $\frac{1}{3}$ som summan av två bråk med täljare 1. Undersök antal sätt att uttrycka $\frac{1}{n}$, där n är ett positivt heltal, som en summa av minst två stambråk.

Geometri
Flera av problemen på Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur markerar man t ex att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

I samband med uppgifterna J2, J5, J8, J13, J14, J19 och J23 kan det vara lämpligt att kontrollera elevernas kunskaper om geometriska begrepp. Be eleverna förklara vad som menas med linje, sträcka, skärningspunkt, parallelltrapets, regelbunden sexhörning, kon, likformighet och kongruens.

J7
Ta upp avbildningsformerna spegling, parallellförskjutning och rotation. Några uppgifter som tar upp rotation och spegling är nr 128 och 149 i boken *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem.*

J8
Ta upp regelbundna månghörningar. Vilken är den minsta regelbundna månghörningen? Utgå från den och konstruera motsvarande figur som i uppgiften. Den kommer då att bestå av en liksidig triangel med sidan 1, tre kvadrater och tre trianglar. Vilken typ av månghörning bildas? Vilken area respektive omkrets har den? Utgå från en regelbunden fyrhörning och femhörning, gör motsvarande konstruktion och bestäm area och omkrets.

J14
Diskutera lösningen och ta upp en halv liksidig triangel. Bestäm konens radie och sida. Beräkna kulans och konens volym. Hur stor del av konens volym upptas av kulan?

J18
Arbeta vidare med skärningspunkter mellan linjer. Tidigare givna uppgifter med linjer och skärningspunkter finns i *Geometri och rumsuppfattning* s 42.

J19
Betrakta en sida. Vilken form har de vita figurer som bildas? Vilken omkrets och vilken area har en sådan vit figur?

J23
Diskutera lösningsmetoder. Behandla randvinkelsatsen.

Logiskt resonemang
En stor del av årets uppgifter bygger på logiska resonemang inom olika matematiska fält. Här gäller det att utgå från givna förutsättningar och utifrån dem föra ett hållbart resonemang. Uppgifterna ges också goda möjligheter till både skriftlig och muntlig kommunikation.

J4
Resonera med eleverna om vilka tal som kan skrivas i punkterna på vardera sida om 4 respektive 1. Ett liknande problem är Benjamin nr 16.

J11
Resonera om vilken betydelse att byta plats ett udda respektive ett jämnt antal gånger innebär.

J15
Ett sätt att lösa problemet är att utföra färgläggningen samtidigt som man resonerar om antal möjligheter. Ett liknande problem är Junior nr 8 2007 och Student nr 7 2009.

J24
Låt eleverna rita kuber och utifrån resonemang markera de fyra kanter som uppfyller villkoret.