Kängurun – Matematikens hopp

Ecolier 2011

Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också lösningsförslag. Därefter följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problem i klassen.

Svar och lösningar

1: C onsdag Åtta bokstäver ger en vecka + en dag.

2: C 9 kg $(12+8)+26=20+(17+?)$, $26=17+9$.

3: B Efter höger, uppåt, vänster, neråt är kängurun tillbaka i samma ruta, sen ett hopp till höger igen.

4: E fem timmar
en och en halv timme + tre och en halv timme.

5: B Triangeln

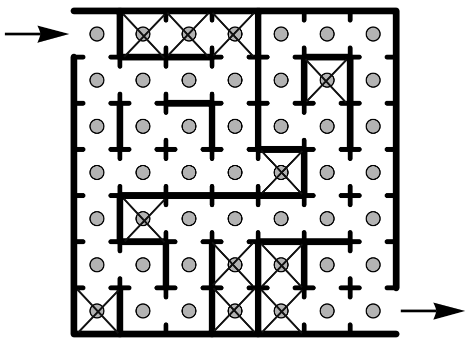
6: C Stjärnan C har arean 12 rutor.

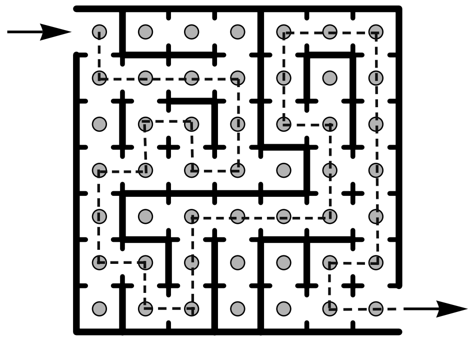
7: A 17 kr En kaka kostar 5 kr och en bulle kostar 12 kr.

8: E

9: B 21 När mormor delar tårtorna får hon $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ bitar.

10: C 37





Kim ska undvika vissa rutor, markerade med X i bild 1.
Längsta vägen, se bild 2.

11: B 6 Fem kartonger med 12 ägg i varje + en kartong med 6 ägg.

12: B 60 Den minsta summa som Lisa kan ha är $13 \cdot 5\,\text{kr} = 65\,\text{kr}$.

13: D

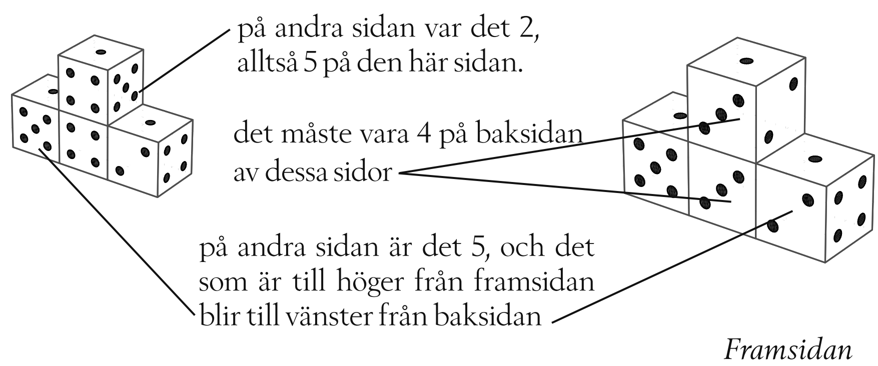
14: D 5 — David måste ha 4 och Emil 1. Arvid som ska ha dubbelt så många som Bo och tre gånger så många som Carlos måste ha 6. Det leder till att Bo har 3 och Carlos 2. Återstår 5 till Farid.
Eller:
Vi kan också resonera kring talet 5, som varken är dubbelt, tre eller fyra gånger så mycket som något annat. Ingen annan än Farid kan ha fått fem då $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$ och $4 \cdot 5$ alla är mera än 6.

15: C Disa, Sofia, Pia, Maja
Arbeta baklänges.

16: E 16 — Talet 5 måste placeras så att det inte adderas med 8, eftersom $8 + 5 = 13$, alltså i hörnet mellan 7 och 6. Sen är det bara att fylla upp till 13: $5 + 6 + 2$; $5 + 7 + 1$; $8 + 2 + 3$; $8 + 1 + 4$.
Eller:
Ett alternativt sätt att resonera, som dock kanske är lite svårare för elever i dessa åldrar: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Fyra sidor med 13 ger summan 52, alltså 16 för mycket. Detta måste vara summan av hörntalen, då dessa räknas två gånger.

17: A 3 — Om hon hade givit ett fel svar hade hon fått $10 + 9 - 1 = 18$ poäng, två felsvar ger $10 + 8 - 2 = 16$, tre felsvar $10 + 7 - 3 = 14$.
Alla rätt hade givit 20 poäng, varje fel leder till 2 poäng mindre, dels den förlorade pluspoängen och dels minuspoängen.
Eller:
Hon fick 4 poäng för 4 rätta svar. De övriga 6 fick hon ingenting för, därför att de var lika många rätt som fel, alltså tre rätt och tre fel.

18: C — Topptärningen ser vi från andra sidan, alltså ser vi 5 på sidan, dvs som på C. Det utesluter A, B, D och E.



Arbeta vidare med Ecolier 2011

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika representationsformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur det konkreta uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och om strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. Några exempel från årets Ecolier: *diagonal*, *kvadrat*, *triangel*, *cirkel*, *symmetrisk*, *symmetrilinje*, *spegling*, *rotation*, *rad och kolumn*, *summa*, *multiplikation*. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under några rubriker. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade.

Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Logiskt resonemang och problemlösningsstrategier

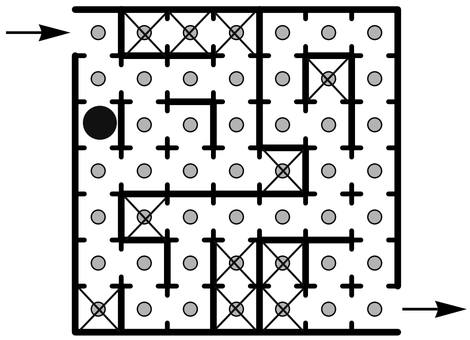
Uppgift 7, kaka och bulle, är ett flerstegsproblem som för äldre elever och vuxna är en rutinuppgift. Men för elever i dessa åldrar är det oftast ett riktigt problem, dvs eleverna har ingen färdig metod att ta till. Denna typ av problem passar bra att bearbeta stegvis gemensamt. Vad vet vi? Vad frågas det efter? Vad måste vi ta reda på? Sen kan eleverna göra liknande problem till varandra så att de också får träna på att lösa dem. Med tiden blir de då rutinuppgifter och inte problem. Variera svårigheten med hjälp av antal ingående varor och med priset.

Läs gärna artikeln *Ryska matematiska skolproblem* av Ulf Persson och André Toom i Nämnaren 2006, nr 1.

Se också Benjamin 2006, 4 och Ecolier 2003, 19.

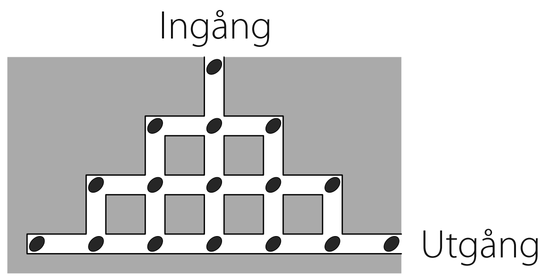
Labyrinten i problem 10 ger troligen upphov till många diskussioner. Hur kan man resonera? Diskutera vilka rutor som Kim inte ska besöka.

Varför ska han inte besöka några rutor markerade med kryss? Varför inte den med cirkel?



Även Benjamin 8 i år är ett labyrintproblem:

Hamstern Fridolin går i ett tunnelsystem. Det ligger 16 pumpafrön i tunnlarna, så som bilden visar. Fridolin får inte passera samma korsning mer en gång. Vilket är det största antal frön han kan komma åt?



A: 12 B: 13 C: 14
D: 15 E: 16

Se också E 2010, 2.

Problem 15, bänken. Här gäller det att finna ett sätt att angripa problemet och att hantera informationen på ett strukturerat vis. Det är förmågor som är bra att ha med sig. Arbeta gärna konkret med problemet. Visa att det går bra att arbeta baklänges för att komma fram till lösningen. Liknande problem kan också behandla tal, eller pengar om man vill vara mer konkret.

Leon ger sin syster 5 kr och sin bror 5 kr. Sen köper han en glass för 15 kr. Därefter har han 8 kr kvar. Hur mycket hade han från början?

Denna situation kan behandlas laborativt och med symboler. Utifrån det kan vi resonera om samband mellan addition och subtraktion.

Se också C 2005, 17; E 2007, 14; B 2007, 13; E 2008, 3; B 2008, 19 & E 2010, 17, som alla kräver att man strukturerar information.

Även *problem 17, frågesporten,* handlar främst om att hitta en lösningsmetod. Variera problemet med olika poängtal. Diskutera varför det alltid blir ett jämnt tal med dessa regler.

Många problem kan utvecklas och diskuteras vidare med avseende på sitt innehåll. Vi kan både fördjupa matematiken och göra kopplingar mellan olika områden och mellan matematiken och omvärlden.

Tid

Problem 4, Simons resa, behandlar klockan. Att räkna tid framåt och bakåt är något som de flesta behöver träna mycket på och det är en vardagskunskap som alla behöver. Använd dagliga händelser, t ex:

> Vi började för en och en halv timme sen, om två timmar är det slöjd. Hur lång tid är det från det vi börjar till slöjden börjar?

Låt eleverna resonera kring hur tiden kan beräknas som en addition av den tid som förflutit och den tid som återstår. Anknyt till frågeställningar av typen: Hur lång tid är det kvar tills ni fyller 18 år?

Resonera om tid på olika platser på jorden. Kanske är någon i klassen på resa eller har några elever släkt på andra håll i världen. Vad är klockan där? Vad innebär det att de är 5 timmar före oss eller att de är 11 timmar efter oss?

Diskutera att tidsenheterna inte är ett decimalsystem och vad det får för konsekvenser.

Se också E 2002, 14; E 2008, 8; E 2010, 6, 15 och 16.

Tal

Problem 1, skyltmålningen, behandlar dels tid, antal dagar i en vecka, men också tal, $8 = 7 + 1$. Jämför med att när klockan är 13 säger vi oftast att klockan är 1. Visa eleverna hur det hänger ihop, så att de kan förstå varför 21 också är 9.

Problem 2, stenvågen, kan användas som illustration till enkel ekvationslösning: $26 + 8 + 12 = 20 + 17 + x$ Diskutera hur man kan jämföra sidorna i likheten och ta bort det som är lika. Gör flera liknande problem och låt eleverna konstruera problem till varandra.

Undersök vilka likheter vi kan få om vi använder alla stenar, alltså även de i alternativen.

Problemet kan också användas för att illustrera huvudräkningsstrategier. Om vi ser på hela uttrycket ser vi att $12 + 8 = 20$. Att kunna hantera tal på ett flexibelt sätt är en aspekt av god taluppfattning.

Tårtorna i problem 9 kan illustrera bråk. Varje tårta delas i 12 lika stora delar. Diskutera betydelsen av att bitarna är *lika stora* för att vi ska kunna tala om tolftedelar, eller tjugofjärdedelar. Resonera om att varje bit är en tolftedel av en tårta men också en tjugofjärdedel av mormors tårtbuffé.

Spelar det någon roll för problemets lösning att bitarna är lika stora?

Hjälp eleverna att upptäcka att om de först delar med 4 och sedan med 3 är det detsamma som att dela med $4 \cdot 3 = 12$. Rita gärna ett träddiagram.

Se också C 2010, 8.

Problem 11, ägghandlaren, och *12, Lisas mynt*, behandlar multiplar av 6 respektive 5.

Undersök entalssiffrorna i sexans tabell. Varför är det inga udda tal?

Se på entalsmönstret i femmans tabell. Varför ser det ut som det gör? Varför är varannan en nolla?

Att undersöka mönstret i tabellerna är ett bra sätt att öka förståelsen för talen och säkerheten att arbeta med dem.

Utifrån problemen kan eleverna få undersöka vilka möjligheter som finns. Hur många ägg kan handlaren packa om han vill ha fulla kartonger? Hur skulle han på bästa sätt packa de olika antalen som finns i alternativen?

Vilka olika summor kan Lisa ha i fickan? Om Lisa har 13 mynt av obestämd sort – vilka summor skulle hon kunna ha?

Se också B 2001, 11.

Även *problem 14, pojkarna slår tärning*, behandlar multiplikation. Att dubbla är en metod som barn ofta kan ta till sig tidigt. En historisk multiplikationsalgoritm, egyptisk multiplikation, bygger på dubbling:

$1 \cdot 12 = 12$
$2 \cdot 12 = 24$
$4 \cdot 12 = 48$
$8 \cdot 12 = 96$
$16 \cdot 12 = 192$

$24 \cdot 12 = ?$	$24 = 16 + 8$	$24 \cdot 12 = 192 + 96 = 288$
$13 \cdot 12 = ?$	$13 = 8 + 4 + 1$	$13 \cdot 12 = 96 + 48 + 12 = 156$

Gör fler exempel. Undersök och diskutera varför metoden fungerar. Det kan ge en djupare förståelse för multiplikation. Metoden utnyttjar den distributiva lagen.

För att lösa problemet måste eleverna ta till sig skriven information. Det är en stor svårighet för många elever och vi behöver arbeta systematiskt för att eleverna ska kunna utveckla den förmågan. I Kängurutävlingen har vi haft många problem med relativt mycket text som passar bra att använda.
E 2002, 18; E 2003, 16; E 2006, 17; B 2008, 19; B 2009, 11.

För att lösa *problem 16, åtta tal i kvadrat*, kan vi förstås prova oss fram. Men genom att resonera behöver vi inte prova alla kombinationer. När 5 är utsatt, och det finns bara en möjlighet för femmans placering, löser sig resten. Gör flera liknande problem och låt eleverna resonera på motsvarande sätt. De kan sen försöka konstruera liknande talproblem till varandra. Pröva också med att sätta tal i en triangel och att utöka antalet ringar.

På årets Junior finns ett problem som säkert kan roa intresserade elever, nr 17.

Niklas vill skriva ett heltal i varje ruta så att summan av talen i varje 2×2-kvadrat blir 10. Fem tal är redan ditskrivna. Vilken blir summan av de fyra saknade talen?

1		0
	2	
4		3

A: 9 B: 10 C: 11 D: 12 E: 13

Ett dokument med samlade problem kring talet 2011 finns att hämta på ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_talet_2011.pdf .

Se också E 2003, 5; E 2004, 5; B 2010, 10.

Geometri

Som vanligt handlar flera problem om geometri. Det är naturligtvis allra lättast att lösa dem konkret, men syftet med problemen är inte att hitta det korrekta svaret i första hand. Det konkreta arbetet ska hjälpa eleverna att få förståelse. Därför är det också viktigt att samtala om det konkreta arbetet och lyfta fram de samband som ska illustreras. Under tävlingen har eleverna löst problemen utan hjälpmedel. I efterarbetet kan eleverna jämföra hur de tänkt, dvs deras föreställning, med en konkret representation. Att tolka en tredimensionell bild exempelvis är inte lätt och många måste få flera möjligheter att jämföra bild och verklighet för att utveckla den förmågan.

Problem 3, kängurun på brädet, kan leda till diskussion om ett varv. Fyra förflyttningar tar kängurun tillbaka till utgångspunkten. Undersök 8, 12, 16 etc förflyttningar på samma sätt. Hur många förflyttningar behövs för att Kängurun ska hamna i rutan till höger, förutom 5 som i problemet?

Låt eleverna skriva beskrivningar till varandra så att kängurun hamnar i andra rutor, börja med svarsalternativen. Låt gärna eleverna konstruera en egen notation som går enklare att skriva.

Låt dem också beskriva olika vägar både utifrån sett och från kängurun's perspektiv. Gör motsvarande övningar med kartor över närområdet och uppgiften kan vara att beskriva för någon hur man ska ta sig till olika platser.

Se också B 2007, 6; B 2010, 9.

Problem 5, Marias figurer, behandlar grundläggande geometriska objekt. Diskutera egenskaper hos dessa, se på antal sidor och antal hörn, på vinklar och symmetrier. Dela figurerna på olika sätt och resonera om storleken. Gör liknande övningar med andra figurer och med t ex bara trianglar av olika slag.

Sortera geometriska objekt, t ex månghörningar. Med en bild eller diagram kan man klargöra samband och illustrera att alla kvadrater är rektanglar, kvadraten är en delmängd av rektanglar, och att rektanglar är parallellogrammer etc.

Se också E 2009, 2; B 2003, 15; B 2009, 9.

Om vi delar en kvadrat längs diagonalen får vi två lika stora trianglar. Låt eleverna resonera om och argumentera för att det verkligen är så. Detta samband utnyttjas sedan i *problem 6, arean*. Undersök omkretsen på figurerna. Låt eleverna resonera sig fram till att sträckorna som går längs med en ruta inte kan vara lika långa som de som går diagonalt. Gör fler undersökningar av relationen mellan omkrets och area. Utgå från en bestämd omkrets låt eleverna konstruera figurer med olika area.

Se också E 2001, 3 och 18; E 2002, 6; E 2006, 9.

Problem 8, bokstäver i rutor, handlar om symmetri. Resonera om vilka rutor som täcker vilka bokstäver. Undersök symmetrier i bokstäver, på byggnader och i naturen. Låt eleverna rita olika symmetriska mönster, både i rutmönster och på vitt papper. De kan också rita en halv bild och låta någon kamrat komplettera den så att den blir symmetrisk.

Nämnaren 2011: 1 behandlar symmetri. Där finns flera exempel på hur man kan arbeta med symmetri i klassrummet. Se också E 2001, 1; E 2010, 3 B 2010, 2; och C 2010, 1. C 2007, 9.

I *problem 13, Alis mönster,* ska vi göra en tessellering. Diskutera vilka geometriska former som mönstret är uppbyggt av. Förstora figurerna och klipp ut. Låt eleverna undersöka tesselleringen konkret. Kan man fortsätta att bygga på Alis mönster så att det täcker en större yta? Arbeta mer med tessellering med olika former.

Kanhända är det några elever som uppfattar Alis mönster tredimensionellt, som ett bygge med fyra kuber. Utgå i så fall från det och diskutera hur vi uppfattar tvådimensionella bilder tredimensionellt. Jämför hur föremål ser ut i verkligheten och på bilder. Vi ser att bollen är ett klot på bilden, fastän det egentligen är en cirkel vi ser etc.

Se också E 2008, 10; E 2010, 1; B 2003, 15; B 2004, 5.

För att lösa *problem 18, tärningsbygget,* måste vi både tänka på hur en tärning är konstruerad och göra mentala operationer med bygget. Vi måste föreställa oss hur det ser ut från andra sidan. När eleverna nu har försökt att göra det i huvudet kan de bygga upp det konkret och se att det stämmer. Varför blir höger vänster?

Låt dem sedan bygga upp olika tärningshögar och rita av dem. Kamraterna kan sedan fundera ut hur det ser ut från andra sidan.

Se också aktiviteten *Rika tärningar* som finns på Nämnarens webbplats, ncm.gu.se/namnaren, under artikelregister, sök på ”Rika tärningar”. Ett lite svårare tärningsproblem finns på årets Benjamin, nummer 20. Ett dokument med samlade problem kring tärningar finns att hämta på ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_tarningar_2011.pdf

Se också E 2007, 9; E 2009, 15; B 2001, 20; B 2010, 14 och 18.

Här har vi givit några förslag till arbete kring uppgifterna. Vi hoppas att dessa ska stimulera till andra aktiviteter och andra problem. Elevernas frågor kan ge upphov till fördjupning och nya problem.
Gå gärna igenom elevernas svarsblanketter och notera inte bara vilka uppgifter de klarat respektive inte klarat. Elevernas felsvar kan ge intressant information och kan ligga till grund för vidare aktivitet i klassen.

Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. &Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2008 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanen.