Kängurun – Matematikens Hopp

Cadet 2011

Här följer först svar och lösningar, samt rättningsmall och redovisningsblanketter. Vi ger förslag på lösningsmetod. Därefter följer förslag till hur ni kan arbeta vidare med problemen.

Svar och lösningar

1 D: 1+2011
I storleksordning placeras alternativen $E < B < A = C < D$

2 B: 7,5 m
Eftersom övergångstället börjar och slutar med vita fält så finns det sju svarta fält, dvs totalt 15 fält. Gatans bredd är $15 \cdot 0{,}5\,\text{m} = 7{,}5\,\text{m}$.

3 C: 50
Nästa gång siffrorna dyker upp är klockan 21:01.

4 C: $12\,\text{cm}^2$
Mittenkvadratens area är $2 \cdot 6 = 12\,\text{cm}^2$.
Stora kvadratens area är $2 \cdot 12 = 24\,\text{cm}^2$.
Skillnad: $24 - 12 = 12\,\text{cm}^2$.

5 E: 21
På sidan med jämna nummer finns 6 hus: nr 2, 4, 6, 8, 10 och12. Då måste det finnas 11 hus på sidan med udda nummer: nr 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 och till sist nr 21.

6 A: 5 st

Den tredje dagen fångade katten Felix färre fiskar än de föregående dagarna, alltså mindre än hälften av de sammanlagda 12, dvs högst 5. Men det kunde inte heller vara färre än 5 för det skulle betyda färre än 4 den andra dagen och färre än 3 den första, alltså färre än 12 sammanlagt.

Alternativ lösningsmetod är att prova möjliga kombinationer:
12 fiskar på tre dagar med villkoren skulle kunna se ut så här:

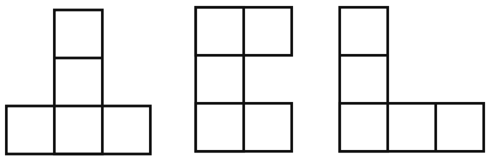
1	2	9	omöjligt
1	3	8	omöjligt
1	4	7	omöjligt
1	5	6	omöjligt
2	3	7	omöjligt
2	4	6	omöjligt
3	4	5	enda möjligheten

Tredje dagen fångas 5 fiskar.

7 B: 907

Största tresiffriga tal med siffersumman 8 är 800.
Minsta tresiffriga tal med siffersumman 8 är 107.
Addition av talen ger $800 + 107 = 907$.

8 C: 3 sätt

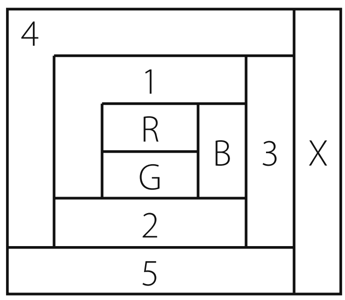


9 C: 1

$2011/201{,}1 = 10$ och $2{,}011/20{,}11 = 0{,}1$. Då får man $10 \cdot 0{,}1 = 1$.

10 A: röd

Område 1 måste vara S (svart) för området angränsar till R (röd), G (grön) och B (blå). Område 2 måste då vara R, 3 blir G, 4 blir B, 5 blir S och slutligen X blir R (röd).



11 C: 3g

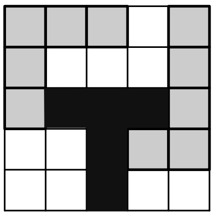
Maries alla pärlor väger $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ gram. De pärlor som hon använde till ringarna vägde $17 + 13 + 7 + 5 = 42$ gram. Pärlan som blev över väger $45 - 42 = 3$ g.

12 E: 14 och 10

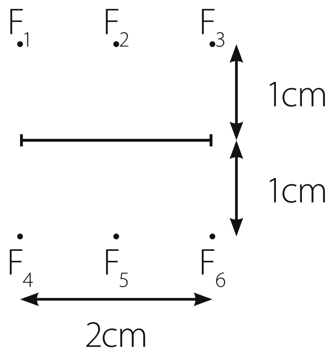
Medelvärdet av talen är 96/8=12. Ta bort två tal som tillsammans har medelvärdet 12. Det är 10 och 14.

13 B: 3 – 0
Den match de förlorade måste vara den match då de släppte in ett mål. Den oavgjorda matchen blev alltså mållös. Återstår 3 mål till den match de vann.

14 D
D är den enda bit som kan spärra för de övriga, och bilden visar det enda sättet där den gör det.

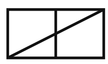


15 C: 6
F måste hamna på avstånd 1 cm från linjen genom D och E. De sex placeringarna är benämnda F_1–F_6 i bilden.

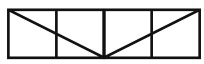


16 B: $a+b$
$a \cdot b < b$, $a+b > b$, $a/b < 1 < b$. Alltså är $a+b$ störst.

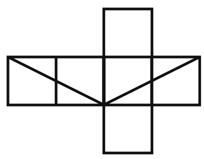
17 A
Utgå från kubens framsida och vik fram sidan till höger så den kommer i samma plan som framsidan. Då blir det så här:



Fortsätt med att vika fram både den vänstra sidan och baksidan (som vi tänker oss hänger ihop längs en gemensam kant). Då blir det så här:



Vik fram under- och ovansidan (som vi tänker oss hänger ihop med framsidan längs en gemensam kant).



Då får vi A (fast vriden 180°). Varken B, C eller E fungerar eftersom linjen delar kubens yta i två lika stora delar. D fungerar inte heller eftersom var och en av linjens fyra sträckor förbinder ett hörn med mitten på en kant vid samma sida.

18 B: 10

Magnus klickar i den ordning som figuren visar tills han råkar på en blå ruta. Blir någon av rutorna 1 till 6 blå, så kontrollerar han de (max 4) rutor som ligger intill den blåa. Blir ruta nr 7 blå så behöver han bara kontrollera 3 till och om först 8 blir blå så har han bara 2 intilliggande rutor att kontrollera. I alla tre fall räcker totalt 10 klick.

1		2	
	3		4
5		6	
	7		8

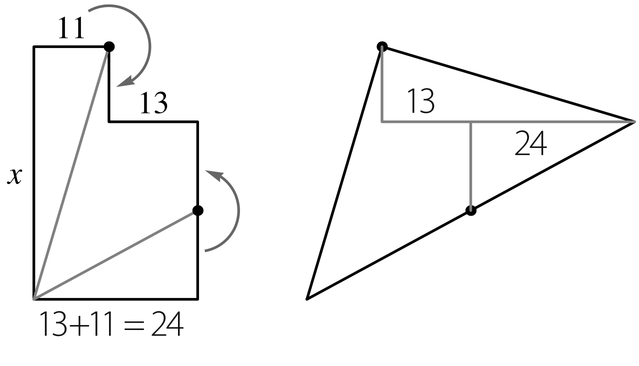
Om Magnus får klicka endast 9 gånger så misslyckas han om han har otur. Dela spelplanen i 4 st $2 \cdot 2$ kvadrater. När Magnus har klickat 7 gånger så finns minst en sådan kvadrat med minst 3 dolda rutor kvar. I den kvadraten kan de 2 blåa rutorna ligga och de kan ligga på 2 olika sätt så det är inte säkert att Magnus kan avslöja och öppna de med de 2 klick som han har kvar.

19 E: 4

Ett tal delbart med både 5 och 4 är delbart med 20, vilket innebär att Y måste vara 0. Siffersumman är då $2+4+X+8+0=14+X$. $14+X$ ska också vara delbart med 9. Minsta möjliga värde på $14+X$ som är delbart med 9 är 18. Nästa är 27. Men då blir X för stort, det ska ju vara ett ental. Allstå måste $14+X=18$, dvs $X=4$. $X+Y=4+0=4$.

20 B: 37

Figurens bas är 11+13=24. Sidan markerad med x blir i den högra figuren summan av basen och sträckan med längd 13.



21 B: Max

Tre avstånd är intressanta.
a = avståndet mellan Isak och Max
b = avståndet mellan Oskar och Max
c = avståndet mellan Isak och Oskar
Isak säger: $a > 2c$
Max säger: $b > 2a$
Oskar säger: $b > 2c$

Anta att Max och Isac talar sanning: $b > 2a$ och $a > 2c$ ger $b > a + a > a + 2c > a + c$ vilket strider mot triangelolikheten.
Anta att Max och Oscar talar sanning: $b > 2a$ och $b > 2c$ ger $b + b > 2a + 2c$ även det ger det omöjliga $b > a + c$.
Om Max talar sanning så är han alltså ensam om det men vi vet att minst två säger sanning. Alltså ljuger Max.

22 D: 144 cm^2

Rektanglarnas omkrets är tillsammans 120 cm. Nu sätter vi ihop bitarna igen till en kvadrat. Då omkretsen av rektanglarna räknades ut användes 10 sidor (6 horisontella och 4 vertikala) i nuvarande kvadrat, vissa sidor räknades två gånger. Alltså är varje sida i kvadraten $120/10 = 12$ cm. Arean av kvadraten blir $12 \cdot 12 = 144$ cm^2.

23. B: 2

Förkortning med $G \cdot A$ ger $$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} = \frac{K \cdot N \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E}$$

Den minsta möjliga kvoten får vi genom att sätta de minsta siffrorna för de bokstäver som förekommer i täljaren. Ju oftare desto mindre siffra, största talen ska stå i nämnaren.

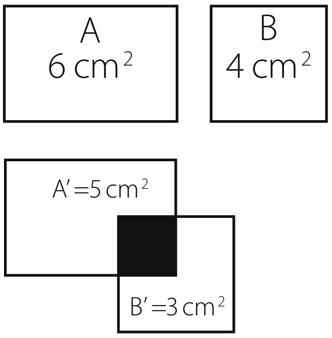
$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1}{8 \cdot 9} = \frac{5}{3}.$$

Så det minsta heltalsvärdet kan inte vara mindre än 2. Men 2 kan det vara:

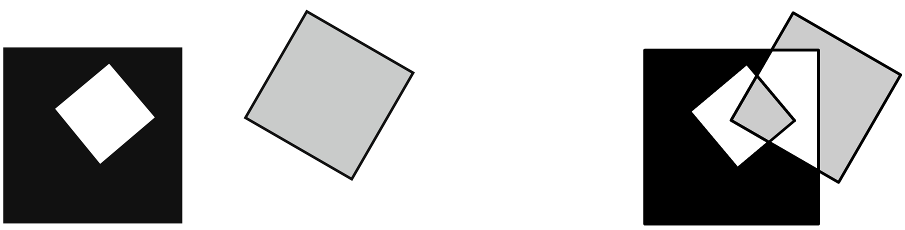
$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1}{8 \cdot 9} = 2$. G kan anta värdena 5 och 7, A är 4.

24 C: 12 cm^2

Om ett område med area A överlappar ett område med area B och de områden som sticker utanför den gemensamma delen har areor A' och B' så är skillnaden mellan A' och B' lika stor som mellan A och B, övertäckta områden tar lika mycket av både A och B. Alltså är A'–B'=A-B.



På samma sätt blir det för områdena i denna uppgift.



Det svarta området har arean $25 - 4 = 21$, det gråa 9. Differensen är 12.

Arbeta vidare med Cadet

Det finns många sätt att arbeta med Känguruproblemen. Problemen är kanske inte av samma karaktär som eleverna möter i läroboken. De är inga rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare och kan fungera som komplement till den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika representationsformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur det konkreta uttrycks i ord och med symboler.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem och arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning. Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och om strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala.

Ett sätt att använda problemen kan vara att eleverna i grupp resonerar sig fram till en lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra liknande problem?

Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Nedan har vi sorterat förslag under några rubriker. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker.

Många problemtyper återkommer från år till år, i olika skepnader och i olika varianter. Här hänvisar vi till några av dessa, men det finns fler. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Tal

Skriv upp uttrycket i C23 på tavlan och resonera om vad man kan göra med det. Vad betyder *förkortning*? Vad händer med uttryckets värde när man förkortar? Efter förkortning har vi uttrycket

$\frac{K \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E}$. Bokstäverna representerar olika ental, större än 0. Primtalsfaktorisera samtliga ental. Hur kan man använda primtalsfaktorisering för att förkorta uttrycket? Vilka övriga heltalsvärden kan uttrycket anta? Ett liknande problem är nr 20 på Cadet 2009 .

I C16 har vi två positiva tal, a och b, $a < 1$ och $b > 1$. Resonera om vad man kan säga om summan $a + b$, differenserna $a - b$ och $b - a$, produkten $a \cdot b$, kvoterna $\frac{a}{b}$ och $\frac{b}{a}$.

Fortsätt med Junior 21 som handlar om två tal större än 1 och ett bråks största värde. Likartade problem är nr 12 på Junior 2007 och nr 15 på Student 2008.

I samband med C5 passar det att diskutera vad som kännetecknar ett jämnt tal, ett udda tal. Var noga med terminologin. I årets tävling förekommer fler problem där jämna eller udda tal ingår. Benjamin 9 handlar om på varandra följande udda datum under 2000 – talet. Junior 16 behandlar på varandra följande tresiffriga naturliga tal som har minst en udda siffra. I Student 9 förekommer alla udda tal från 1 till 2011. Husnummer med udda tal förekom i Cadet nr 3 år 2009, kort med jämn summa i Cadet nr 10 år 2008, fyrsiffriga tal med udda siffror i Student nr 4 år 2010.

C7 och C19. Behandla *siffersumma*. Vad kan ett tals siffersumma ge för information om talet? Visa hur siffersumman är kopplad till delbarhet med 3 och 9. Ta upp andra delbarhetsregler. Student nr 9 handlar om udda tal som är multiplar av 3. Junior nr 6 handlar om fyrsiffriga tal med siffersumma 4, se även nästa stycke. Vilka delare har de talen?

Årtalsproblem
Varje år finns det flera problem som har anknytning till tävlingsåret. Låt eleverna arbeta med samtliga problem som finns med anknytning till 2011 under en lektion. Junior 6 handlar om fyrsiffriga tal som har siffersumman 4. Be eleverna göra en lista över de fyrsiffriga talen som har denna siffersumma. Vilka av dessa tal är primtal? Vilka delare har övriga tal? Ta upp begreppet siffersumma. Vad kan siffersumman ge för information om ett tals delare? I listan finns alla fyrsiffriga tal med siffrorna 2, 1, 1 och 0. Benjamin 12 handlar om dessa tal. En lämplig inledningsuppgift på ett sådant tema kan vara C1. Låt eleverna beräkna de fem värdena och ordna dem i storleksordning. Fortsätt därefter med C9 och diskutera hur man beräknar den. Ta sedan C3 och låt eleverna skriva ner alla tider då digitalklockan visar siffrorna 0, 1, 1, 2 i någon ordning. För ett liknande problem, se Ecolier nr 12, 2007. Därefter kan Benjamin 12 komma följt av Junior 6. Gå sedan till Student 9 och ta upp udda tal och multipel av 3. Avsluta med Student 19, ta upp vad som menas med en talföljd och låt eleverna beräkna de första talen i följden. Ett dokument med flera problem kring talet 2011 att arbeta vidare med finns att hämta på:
http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2011/arb_talet_2011.pdf

Geometri

C2 är en variant på en typ av uppgifter som finns med nästan varje år. I år handlar det om hur många vita respektive svarta streck övergångsstället består av. C10, 2010 var ett liknande problem där man satte samman långa kedjor av kortare kedjor med hjälp av länkar.

Med figuren i C4 som utgångspunkt kan man arbeta vidare på flera olika sätt. Genom konstruktionen uppkommer områden med olika geometrisk form. Hur många olika områden finns det i denna figur? Namnge formerna och ta upp likformighet och kongruens. Liknande problem är 233 och 234 i *Geometri och rumsuppfattning.*

Skugga den innersta kvadraten och de fyra yttre trianglarna. Hur stor del av figuren är skuggad? Ett liknande problem är 230 i *Geometri och rumsuppfattning*.

Fortsätt att konstruera fler kvadrater på samma sätt. Låt den minsta kvadraten har arean 1 och uttryck de övriga kvadraternas area i den första. Diskutera varför arean fördubblas. Det här är ett exempel på en talföljd. Definiera *talföljd*. Skriv ett uttryck för den *n*:te kvadratens area.

Vilken sidlängd har den minsta kvadraten om den har arean 1? Vilken sidlängd har nästa kvadrat i konstruktionen? Vilket är förhållandet mellan sidorna i två på varandra följande kvadrater? Bildar sidornas längder en talföljd? Vilken i så fall? Kan vi generalisera till en allmän formel? Ett liknande problem är 364 i *Geometri och rumsuppfattning*. Behandla längdskala och areaskala.

En mer avancerad konstruktion av områden som bygger på regelbundna månghörningar är nr 304 i *Geometri och rumsuppfattning*.

C8 handlar om att figuren ska få en symmetrilinje. Diskutera begreppet *symmetrilinje* och be eleverna ge exempel på geometriska figurer med en eller flera symmetrilinjer. Se även Cadet 1, 2010.

I C15 ska eleverna konstruera rätvinkliga trianglar utifrån några givna regler. Börja med att ta upp rätvinklig triangel och beräkning av en triangels area. Låt eleverna rita sträckan *DE* på ett blankt papper. Diskutera var man kan placera punkten *F* för att få en triangel med arean 1 cm^2. Vad gäller för dessa trianglar? Vilka av dessa trianglar blir rätvinkliga? Vilken form har de andra trianglarna? Låt eleverna fortsätta med Benjamin 17 som handlar om konstruktion av en parallellogram utifrån en triangel. Låt dem utgå från några av de ritade trianglarna. Hur stor area får parallellogrammen?

Nu kan det vara lämpligt att låta eleverna lösa Junior 2 som handlar om parallelltrapets. Be eleverna förklara skillnaden mellan en parallelltrapets och en parallellogram. I Student 8 finns det ännu en fyrhörning. Diskutera dess form och bestäm arean.

Diskutera hur man kan avgöra hur den utvikta kuben i C17 ser ut. Ge eleverna bilder av kuber. Låt dem utifrån övriga svarsalternativ markera en mörk linje på en kub. Därefter kan de klippa ut utvikningen och bygga ihop och jämföra om det stämmer. Liknande problem finns att hämta i *Geometri och rumsuppfattning* sid 67 – 74. Den mörka inritade linjen bildar en fyrhörning. Vilken omkrets har fyrhörningen? Vad händer om man sågar itu kuben utefter detta plan? Hur ser snittytan ut? Hur kan det se ut om man viker ut denna kropp? Låt eleverna göra en kub av papper utan botten och lock. Markera linjen, klipp ut och veckla ut. Därefter kan de få undersöka problem 7 i Student.

Ge eleverna de två figurerna i C20. Låt dem först markera *x*, 11 och 13 i den högra figuren. Är de osäkra kan de klippa isär den vänstra figuren och bygga ihop den till den högra. Vilken area har den konstruerade triangeln? Den konstruerade triangeln består av tre delar. Vilken area har respektive del?

Diskutera lösning av uppgiften C22. Ge eleverna figuren, låt dem klippa isär och bygga ihop till en kvadrat för att konkretisera vilka sidor som räknas dubbelt.

Efter de här två uppgifterna kan det vara lämpligt att låta eleverna lösa Student 11 där tre rektanglar ska sättas ihop till en större. Arbeta gärna konkret.

Gör en generell lösning av problem C24. Låt den stora kvadraten ha sidan a, mellankvadraten sidan b och den lilla kvadraten sidan c. Beteckna arean av det vita området i det övre högra hörnet med X. Då är den svarta arean $S = a^2 - c^2 - X$, den grå arean $G = b^2 - X$. Den sökta skillnaden är $S - G = a^2 - b^2 - c^2$. Ett liknande problem är 231 i *Geometri och rumsuppfattning*.

Logiska resonemang och problemlösningsstrategier

För att lösa C13 kan eleverna behöva någon form av tabell för att komma vidare i lösningen. Låt eleverna undersöka hur de olika svarsalternativen inte stämmer med förutsättningarna. Låt eleverna konstruera liknande problem till varandra. Undersök resultattabeller i tidningen.

C14 handlar om att spärra för att andra bitar ska kunna läggas ut på brickan. Resonera om hur brickan skulle kunna se ut om de andra alternativen skulle spärra för de andra. I både C14 och C18 kan eleverna arbeta konkret genom att placera ut föremål i ett rutnät när de diskuterar lösningar. Hur många av de tomma rutorna kan man täcka med hjälp av brickorna?

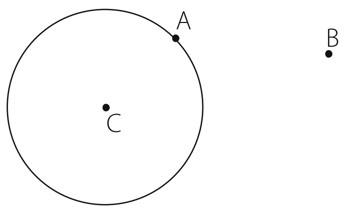
Eleverna kan vidare konstruera problem till varandra. Vad är det man måste tänka på? Hur ska man placera bitarna för att så många som möjligt ska få plats?

C18 Börja med att spela *Sänka skepp* som finns på ncm.gu.se/stravorna. Gå sedan över till C18. Resonera om lösningen och strategier för att klicka på skärmen. Inledningsvis kan det vara en idé att trycka på varannan ruta, varför? Hur många möjligheter finns det att placera ut två blå rutor så att de har gemensam sida? Endast tre rutor kan bli blå och de har alltid ett gemensamt hörn. Liknade problem är Junior 15.

C21 Problem med lögnare och sanningssägare förekommer ibland i Kängurun. Dessa ställer krav på resonemangsförmågan. Ett sätt att hantera sådana problem är att göra ett antagande och sedan undersöka vad det leder till. Till problem C21 finns både en logisk och en geometrisk aspekt. Att minst två av koltrastarna talar sanning ger fyra möjligheter, tre när en av dem ljuger och en när alla talar sanning. Ett systematiskt sätt att analysera problemet skulle vara att undersöka var och en av dessa fyra möjligheter för sig. Men, det finns genvägar t ex att Max och Isacs påståenden är oförenliga utesluter direkt två av dessa möjligheter.

Att man kan tillämpa triangelolikheten är ingen överraskning men man bör komma ihåg att för 3 punkter gäller 3 triangelolikheter. För avstånden gäller ytterligare ett samband, symmetrin. Det är ändå möjligt att glömma symmetrin när man måste tänka på flera saker samtidigt. Koltrastarna talar om sex avstånd uttryckta i termer "från – till". Först när man inser att det endast rör sig om tre olika blir problemet mer hanterligt.

En bild kan göra tankegången mera begriplig och övertygande som t ex i följande alternativlösning. Om B befinner sig mer än dubbelt så långt från C som A gör, och själv påstår att en av de övriga befinner sig mer än dubbelt så långt från honom som den andre, så ljuger han.



Om $|BC|>2\cdot|AC|$ så gäller det att $|AB|/|CB|$ ligger mellan 1/2 och 3/2 (och $|CB|/|AB|$ mellan 2/3 och 2).

– Om det är så som Isac säger så ljuger Max.

– Om det är så som Oskar säger så ljuger Max.

Minst en av de två (Isac och Oskar) talar sanning, alltså ljuger Max. I denna lösning åberopar man mer komplicerade, men synliga i figuren, samband. En mer noggrann bevisning skulle ändå stödja sig på triangelolikheten.

Låt elever välja två punkter för Isacs och Oskars bon och rita det område på planet där Max kan ha sitt bo om Oskar och Isac talar sanning. Låt dem beskriva motsvarande område i rummet.

Se även årets Benjamin 19 eller GyCadet 24 2010, GyCadet 14 2009 och Junior 21 2010.

Litteratur

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2008 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanen.