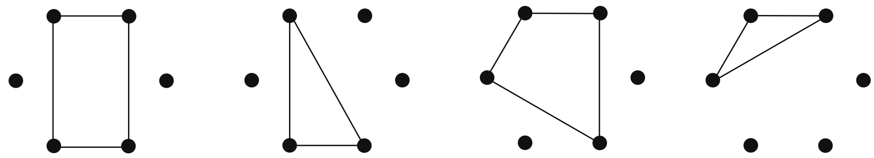
Svar och lösningar

1 C: 2 En vågrät och en lodrät symmetrilinje genom kvadratens mittpunkt.

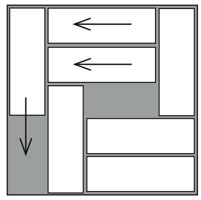
2 D: 4 $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, alltså finns det $2^2 = 4$ boxar i bottenlagret.

3 E: $6a + 8b$ Sidorna är $a + a + a = 3a$ och $b + 2b + b = 4b$. Omkretsen blir $2(3a + 4b)$.

4 C: kvadrat Exempel på hur formerna kan konstrueras:



5 B: 3 Man skjuter den vänstra nedåt och de två översta åt vänster och får plats för en till bredvid den stående längst till höger.



6 B: 6 Alla vita eller alla grå, det ger 2 sätt. Tre grå och en vit eller tre vita och en grå, det ger 2 sätt. Två vita och två grå, samma färg diagonalt eller samma färg intill varandra, det ger 2 sätt.

7 E: 45 Det mittersta av de tre minsta talen måste vara $33/3 = 11$. De tre minsta talen är 10, 11 och 12. Då är de övriga talen 13, 14, 15 och 16. Summan av de tre största är $14 + 15 + 16 = 45$.
Algebraisk lösning:
Låt x vara det mittersta talet. Då är de tre minsta talen:
$x - 3 + x - 2 + x - 1 = 33$, $x - 6 = 33$, $x = 13$ och summan av de tre största är $14 + 15 + 16 = 45$.

8 E: 30 Den minsta gemensamma multipeln till 3, 5 och 6 är 30.

9 A: 1 Arean av rektangel $ABCD$ är $6 \cdot 10 = 60$ och arean av kvadraten $PQRS$ är $6 \cdot 6 = 36$. Det skuggade området $XYRS$ har arean $60/2 = 30$.
Arean av rektangel $PQRS$ är då $36 - 30 = 6$.
Eftersom $PQ = 6$ blir $PX = 1$.

10 D: 45 För att sätta samman tre kedjor behövs två sammanfogningar.
En sammanfogning tar då $18/2 = 9$ minuter. För att sätta samman sex kedjor behövs fem sammanfogningar som då tar $5 \cdot 9 = 45$ minuter.

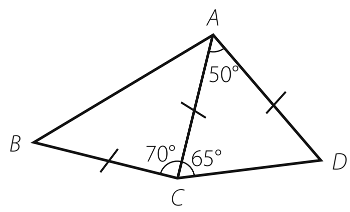
11 D: 25 Den största summan av tre olika ensiffriga tal är $7 + 8 + 9 = 24$.
$10 = 2 + 3 + 5$, $15 = 4 + 5 + 6$, $23 = 6 + 8 + 9$.

12 C: 19

Vi kan först konstatera att antal blå (b) brickor kan vara 1, 2, 3 eller 4.
Om $b = 1$ så är de vita (v) 11 och de röda (r) 38, motsäger förutsättningarna.
Om $b = 2$ så är $v = 22$ och $r = 26$, motsäger också förutsättningarna.
Om $b = 3$ så är $v = 33$ och $r = 14$, det ger $v - r = 19$.
Om $b = 4$ så är $v = 44$ och $r = 2$, motsäger förutsättningar.
Alternativ lösning:
Givet: $v = 11b$ (1), $v + b + r = 50$ (2) och $b < r < v$ (3).
(1) och (2) ger att $r = 50 - 12b$ (4). Alltså kan b vara 1, 2, 3, 4.
(1) – (4) ger $v - r = 23b - 50$. Det ger att b bara kan vara 3 eller 4.
$b = 4$ ger $v = 44$ och $r = 2$ och (3) är inte uppfyllt.
Alltså $b = 3$, $v = 33$ och $r = 14$, (3) är uppfyllt och $v - r = 19$.

13 B: 55°

I triangeln ACD får vi vinkeln
$ADC = 180° - (65° + 50°) = 65°$.
Triangeln är alltså likbent och det
blir även triangeln ABC.
Vinkeln $ABC = (180° - 70°) / 2 = 55°$.

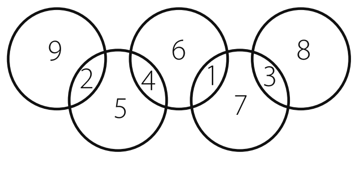


14 C: 19

För varje snitt ökar vi antal vedträn med 1. Har vi bara en stock kan vi med 53 snitt få 54 vedträn. Det behövs alltså ytterligare $72 - 54 = 18$ stockar, dvs totalt 19 för att få 72 vedträn.
Algebraisk lösning: Låt n vara antal stockar.
För varje gång vi sågar i en stock ökar antal vedträn med 1.
Låt s_i vara antal snitt i stock i, då ger stock i, $s_i + 1$ vedträn.
Vi får då $s_1 + 1 + s_2 + 1 + \ldots + s_n + 1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_n + n$ vedträn,
$53 + n = 72$, $n = 19$.

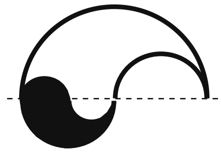
15 B: 6

Vi ser att 8 och 9 måste stå i de yttersta ringarna eftersom 9 bara kan kombineras med talet 2, och att 8 därmed måste kombineras med talet 3.



Återstår talen 1, 4, 5, 6 och 7.
Sen resonerar vi vidare och ser vilka tal som kan kombineras med 2 respektive 3 och tillsammans med ytterligare ett tal bli 11.
Resonemanget ger att det endast finns en lösning, samt dess spegling.
Alternativt resonemang:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, men de fem cirklarna ska innehålla tal med sammanlagd summa $5 \cdot 11 = 55$, dvs 10 mer. Det är möjligt eftersom talen i snittområdena räknas två gånger. Alltså ska summan av de fyra talen i snittområdena vara 10. De tal som ska stå där är då 1, 2, 3 och 4. Summan av talen i de tre övre cirklarna i figuren ska vara $3 \cdot 11 = 33$ och summan i de två nedre områdena blir därför $45 - 33 = 12$.
Inget av dessa två områden kan innehålla talet 6, eftersom talen ska vara olika. Talet 6 ska alltså stå i ett av de tre områdena överst men kan inte stå i något av de yttre eftersom 6 + (högst 4) < 11.
Alltså står talet 6 i den mittersta cirkeln.

16 B: $\frac{1}{4}$



Den skuggade arean motsvarar arean för en halvcirkel med radien 4. Hela figurens area motsvarar arean för en halvcirkel med radien 8. Förhållandet mellan deras inbördes radier är 1:2 och eftersom areaskalan är längdskalan i kvadrat är förhållandet mellan deras areor 1:4.

17 C: 16

Ur tabellen kan vi se att man behöver 4 höns för att få 1 gås.
Då behöver man 6 höns för att få 3 tuppar, dvs 2 höns för att få 1 tupp.
För att få 1 kalkon behövs det $5 \cdot 2$ höns = 10 höns.
Det ger $(4+2+10) = 16$ höns för att få en gås, en kalkon och en tupp.
Han växlar 12 höns till 3 gäss, sen 2 gäss + 4 höns till 6 tuppar och sen 5 tuppar till en kalkon.
Algebraisk lösning:
Med beteckningarna k (kalkon), t (tupp), g (gås) och h (höns) kan följande tre samband ställas upp: $k=5t$ (1), $g+2h=3t$ (2), $4h=g$ (3).
(2) och (3) ger $6h=3t \Leftrightarrow t=2h$ som insatt i (1) ger $k=10h$.
$k+g+t=16h$.

18 B: 5

Om det på alla 18 kort står 4 så blir summan 72, om det på alla 18 kort står 5 blir summan 90. Det enda talet mellan 72 och 90 som är delbar med 17 är 85. Om vi utgår från 90 så måste fem av korten ersättas med ett kort med 4.
Algebraisk lösning: Låt x vara antal kort där det står 4, $0 \leq x \leq 18$.
Antalet kort där det står 5 är då $18-x$.
Då gäller att $4x+5(18-x)=17k$ där k är något heltal.
$90-x=17k$ ger den enda positiva heltalslösningen $x=5$.

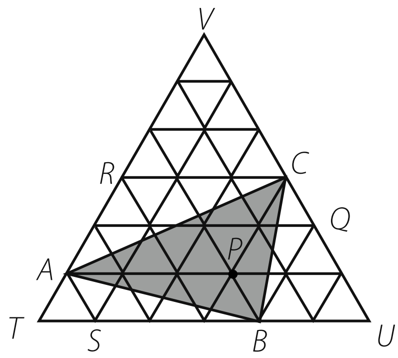
19 B: 8

En $2\times2\times2$ kub är byggd av 8 små kuber som möts i mitten i ett gemensamt hörn, alltså behövs det åtta olika färger för att bygga den enligt Josefs regel. En $3\times3\times3$ kub innehåller (flera) $2\times2\times2$ kuber, så Josef kan inte göra sin kub av småkuber med färre än 8 färger.
Men med 8 färger kan han klara det så här:
I en $3\times3\times3$ kub finns det 4 sorters småkuber: 8 hörnkuber, 1 mittenkub mitt i den stora kuben, 6 sidokuber (en mitt på varje sida) och 12 kantkuber (en mitt på varje kant). De 6 sidokuberna delar vi i 3 par av motstående kuber (de som ligger vid motstående sidor). (forts)
De 12 kantkuberna delar vi i 3 kvartetter av parallellkuber (de som ligger vid parallella kanter). Om Josef låter samtliga hörnkuber ha en färg (1) , mittenkuben en annan färg (2), varje par av motstående kuber nya färger (3, 4 och 5) och varje kvartett av kantkuber ytterligare nya färger (6, 7 och 8) så har han lyckats. Dvs, totalt 8 färger.
Lösning 2:
Dela kuben i tre lager. Börja färglägga det mittersta lagret.
Mittkuben i detta lager har färg 1. I lagret kan alla fyra hörnkuberna ha samma färg 2, de återstående kantkuberna måste ha två nya färger (färg 3 och färg 4). Det övre och det undre lagret kan vara identiska då

de saknar angränsande hörn. Vi betraktar nu det övre lagret.
Mittkuben måste ha en ny färg 5, då den gränsar till mittlagrets samtliga färger. Hörnkuberna i det övre lagret måste också ha en ny färg 6.
Kantkuberna behöver också ha två nya färger, 7 och 8.
Dvs totalt 8 olika färger.

20 A: 11 cm²

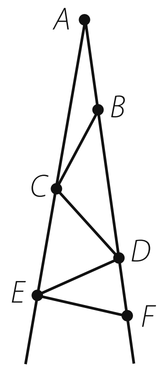
Med hjälp av punkten *P* kan vi skapa parallellogrammerna *RCPA*, *CQBP* och *APBS*.
Varje parallellogram är till hälften skuggad. Den skuggade delen är
$12/2 + 4/2 + 6/2 = 11$



Alternativ lösning:
Triangeln *ABT* har 4 gånger så stor area som triangeln *AST*, dvs en enhetstriangel, eftersom den har lika stor höjd men 4 gånger så lång bas.
Motsvarande gäller för triangeln *CUB*, som har tre gånger så stor höjd och två gånger så lång bas. Triangeln *AVC* har på motsvarande sätt 5 gånger så stor höjd och 3 gånger så lång bas.
Då får vi arean av triangeln *ABC* som $36 - (4 + 6 + 15) = 11$.

21 D: 13

Trianglarna *ABC*, *BCD*, osv är alla likbenta.
Om de lika stora vinklarna i den första triangeln är v grader, så kommer de lika stora vinklarna i de följande trianglarna att vara $2v$, $3v$, $4v$, ... För varje triangel ökar alltså de lika vinklarna med v grader.
Vi kan fortsätta att konstruera trianglar på detta sätt så länge $kv \leq 90°$, där k är antal trianglar.
Eftersom $v = 7°$ ger olikheten att $k = 12$ och antal sträckor blir 13.



Arbeta vidare med Cadet

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. Eleverna har vid själva tävlingstillfället med olika metoder och i olika grad klarat problemen.

Problemen är kanske inte av samma karaktär som eleverna möter i läroboken. De är inga rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare och inte se tävlingstillfället som något som avbryter den ordinarie undervisningen. I samband med genomgång kan det passa bra att först låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008)

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
Vilka nya frågor kan problemet väcka?
Lärde vi oss något nytt av problemet?

– Gå igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt.

– Avsluta med att låta eleverna konstruera egna liknande problem. Det är ett sätt att se om de har förstått det som varit centralt i problemet.

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet är det lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar.

Tal

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel av, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grund för arbete med tal i bråkform.

Många problem behandlar grundläggande räknefärdigheter.
– Får man ett jämnt eller udda tal om man adderar två udda tal, två jämna tal, ett udda och ett jämnt tal? Vad gäller för multiplikation av två udda tal, två jämna tal, ett udda och ett jämnt tal?

Ett sätt att arbeta med taluppfattning att genomföra enkla bevis.
– Bevisa att alla primtal >2 är udda. Här får man träning på notation, att argumentera med matematikens hjälp och att arbeta med hela tal.
– Bevisa att produkten av två primtal >2 alltid är udda.
Delbarhet kan också undersökas med enkla bevis.
– Bevisa att alla heltal som har en nolla på slutet är delbart med 10. Detta kan tyckas vara självklart, men hur framför man sina argument med matematikens hjälp? ”Så är det ju bara!” är inte så övertygande, oavsett vilken debatt man deltar i. Begreppet motsatsbevis kan vara bra att förklara här.

Heltalsumma

Uppgifter 7, 11 och 15.
Vilket är det minsta tal som man kan skriva som en summa av tre olika ensiffriga tal, fyra olika ensiffriga tal osv. Vilket är det största? Att se tal som summor av ensiffriga tal är något som man har användning i Kakuro. Vi kan även fortsätta att betrakta summor av de positiva heltalen och inte bara nöja oss med de ensiffriga. De tal som vi får om vi beräknar summorna 1, 1+2, 1+2+3, …, 1+2+3+…+ n kallas triangeltal. Låt eleverna resonera om den beteckningen.

Låt dem även försöka bevisa $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ både geometriskt och algebraiskt.

Undersök summor av de udda positiva heltalen, dvs 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5,…,
1 + 3 + 5 +…+ (2k+1). På Benjamin 12, Junior 7 och Student 1 finns problem som behandlar denna summa i ett fall. Gör även motsvarande undersökning av summor av de jämna positiva heltalen. Låt eleverna resonera, göra påståenden och bevisa dem.

Cadet 7 handlar om på varandra följande tal, konsekutiva tal. Här följer exempel på andra frågeställningar som kan användas i det fortsatta arbetet:

– Vad blir summan av fem på varandra följande tal om det i mitten är 15?
– Vad blir summan av fem på varandra följande udda tal om det i mitten är 15?
– Vad blir summan av fem på varandra följande tal delbara med tre om det i mitten är 15?
– Vad blir summan av 25 på varandra följande tal delbara med 6 om det i mitten är 3210?

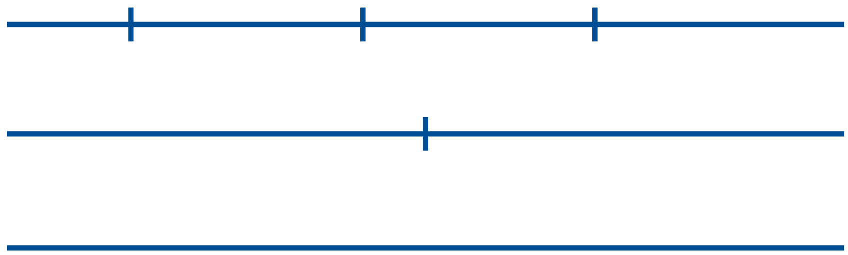
Andra problem som behandlar summor är Ecolier 12, Junior 3 och Junior 5.

I uppgift 15 ska talen 1–9 placeras in i cirklarna så att summan av talen i varje cirkel är 11. Resonera om olika sätt att lösa problemet. Gör samma problem men låt summan i varje cirkel vara först 13 och låt sedan summan anta andra värden.

Problem 14 handlar egentligen om uppdelning av heltal.

1.a) Rita ett antal raka sträckor, lika eller olika långa. Dela av sträckorna med små streck. En del av sträckan mellan två streck eller mellan ett streck och en av sträckans ändpunkter kallar vi en bit. En sträcka utan streck räknas också som en bit.

b) Rita en tabell och fyll i det du ser i exemplet.



Antal sträckor	Antal streck	Antal bitar
3	4	7

c) Upprepa a och b för olika antal sträckor, streck och bitar. Glöm inte att fylla i resultatet i tabellen.

d) Försök hitta ett samband med hjälp av det du skrivit i tabellen. Kan du förklara varför det samband du funnit alltid gäller, oavsett vilket antalet sträckor, streck och bitar är?

2. Låt antalet sträckor, antalet streck och antalet bitar vara som i exemplet i tabellen. Kan sträckorna ha delats in på något annat sätt än det som visas i exemplet? Försök i så fall komma på alla möjligheter.

3. Tänk dig nu att man bara vet att det blev 6 bitar. Vilket kan antalet sträckor och antalet streck ha varit då? Försök komma på alla möjligheter!

4. När du gjort uppgift 3 vet du hur många möjligheter det finns om det blev 6 bitar. Gör en systematisk undersökning! Hur många olika möjligheter finns det om det blev 1 bit, 2 bitar, 3 bitar, och så vidare. Det problem du jobbat med i uppgifterna 3 och 4 handlar om att se varje positivt heltal som en summa av positiva termer på så många olika sätt som möjligt.

Delbar och multipel

Delbar och multipel är två begrepp som många elever har svårt med. I problem 8 ska morfar dela en kaka, så att varje barnbarn får lika mycket kaka. Hur många bitar får varje barn, hur stor del av kakan om det kommer 3, 5 eller 6 barnbarn. Ändra antal barnbarn. I problem 18 ska en summa vara delbar med 17. Undersök vilka summor som skulle kunna förekomma och vilka tal de är delbara med.

Geometri

Som vanligt handlar flera problem om geometri. Det är naturligtvis allra lättast att lösa dem konkret, men syftet med problemen är inte att hitta det korrekta svaret i första hand. Det konkreta arbetet ska hjälpa eleverna att få förståelse. Därför är det också viktigt att samtala om det konkreta arbetet och lyfta fram de samband som ska illustreras. Under tävlingen har eleverna löst problemen utan hjälpmedel. I efterarbetet kan eleverna jämföra hur de tänkt, dvs deras föreställning, med en konkret representation. Att tolka en tredimensionell bild exempelvis är inte lätt och många måste få flera möjligheter att jämföra bild och verklighet för att utveckla den förmågan.

Symmetri behandlas i problem 1. Resonera om varför det bara finns två symmetrilinjer. Låt eleverna ersätta kängururna med andra figurer så att det bildas fler symmetrilinjer. Undersök symmetrier i verkligheten, i naturen och på byggnader och i olika geometriska figurer.

I problem 4 förekommer också symmetri. Hur många symmetriaxlar finns det i en sexhörning? Vad kännetecknar en regelbunden sexhörning? Diskutera generella egenskaper såsom antal diagonaler och vinkelsumma hos regelbundna månghörningar. Låt eleverna rita in alla möjliga lägen för de olika figurerna. Låt eleverna även lösa Junior 6.

I problem 20 kan man också ta upp begreppet symmetrilinjer. Hur många finns det i en liksidig triangel? Vilken sida och höjd har den stora liksidiga triangeln och de små liksidiga trianglarna? Vad händer med det skuggade områdets area om punkten B får glida utefter triangelsidan?

Problem 3 kan användas i två syften, för att resonera om omkrets och area men även för att bygga upp förståelse för algebran. Det kan vara lämpligt att först låta *a* och *b* representeras av tal. Hur lång blir då sidan 2*b*? Hur ser ett aritmetiskt uttryck för omkretsen ut? Går det att konstruera andra områden med samma omkrets men med större area, mindre area? I nästa steg kan eleverna låta *b* representeras av ett tal och bestämma vilket värde *a* får för en given omkrets. Skriv upp den erhållna ekvationen och lös den. Slutför med att skriva upp algebraiska uttryck för omkrets och area.

Problem 9 handlar om två fyrhörningar med speciella egenskaper. Be eleverna definiera rektangel respektive kvadrat. Ändra förutsättningarna, t ex att det skuggade området har en tredjedel eller en fjärdedel så stor area. Vilket förhållande gäller mellan det skuggade områdets omkrets och omkretsen av rektangel *ABCD*?

I problem 8 ska morfar baka en kaka. Vilken form kan kakan ha och hur ska den delas om alla ska få lika stor bit?

I samband med problem 18 kan det vara lämpligt att repetera cirkelns omkrets och area. Vilken area respektive omkrets har hela området? Låt eleverna även pröva på Junior 13 och Student 12.

Problem 13 och 21 handlar om likbenta trianglar och vinklar. Be eleverna beskriva en likbent triangel. Låt eleverna med hjälp av passare konstruera sträckorna *AB*, *BC*, *CD* osv i problem 21. Vad händer med antal sträckor om man ändrar vinkeln vid *A*, t ex om $A = 8°$? Hur stor är vinkeln vid A om man kan rita 6 sträckor? Låt eleverna även pröva på Junior 9 och 11 samt Student 6.

Problemlösningsstrategier

I några problem är det främst en generell problemlösningsförmåga som efterfrågas. Att tolka problemet, plocka ut väsentlig information, finna en passande metod och bedöma resultatet.

I problem 6 handlar det om att finna alla sätt och också att veta att alla sätt är funna. Här gäller det att vara systematisk. Ändra antal kvadrater, t ex 3 × 3 och undersök antal sätt. Ändra villkoret så att de fyra kvadraterna i problemexemplet betraktas som olika. I Benjamin 5 finns ett liknande problem, färgläggning av en blomma med 5 blomblad. Utveckla frågeställningen till att kvadrater som gränsar till varandra ska ha olika färg. Gränsar innebär att de har minst ett hörn gemensamt. Hur många olika färger behövs? Undersök 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, …, $n \times n$-kvadrater. Diskutera fyrfärgsproblemet.

Att läsa

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation.*

Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

NämnarenTema (1997) *Algebra för alla*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. &Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar publicerade 1990–2007 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, ncm.gu.se/namnaren. Du finner dem via artikeldatabasen. Under ArkivN finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken Månadens problem.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens mål.