# Kängurun – Matematikens Hopp

## Cadet 2010

Här följer svar och lösningar, samt rättningsmall och redovisningsblanketter. Vi ger förslag till lösningsmetod. Bland eleverna i klassen finns säkert andra lösningsmetoder representerade. I det fortsatta arbetet med problemen kan dessa diskuteras och jämföras.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru/
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 27 april.

Resultaten är värdefulla för oss i vårt fortsatta arbete med att utveckla Känguruproblemen. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att åtminstone fylla i redovisningsblankett A. I år underlättar vi arbetet genom att inte dela upp redovisningen på flickor och pojkar. Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på nätet.

Så snart du redovisat klassens resultat får du förslag på hur man kan arbeta vidare med problemen. Bland dem som gör en fullständig redovisning, både blankett A och B, lottar vi ut bokpaket.

# Svar och lösningar

1 C: 2

En vågrät och en lodrät symmetrilinje genom kvadratens mittpunkt.

2 D: 4

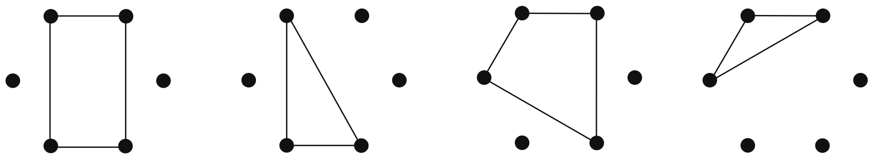
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, alltså finns det $2^2 = 4$ boxar i bottenlagret.

3 E: $6a + 8b$

Sidorna är $a + a + a = 3a$ och $b + 2b + b = 4b$. Omkretsen blir $2(3a + 4b)$.

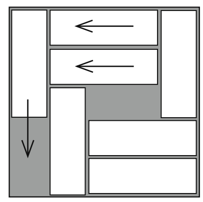
4 C: kvadrat

Exempel på hur formerna kan konstrueras:



5 B: 3

Man skjuter den vänstra nedåt och de två översta åt vänster och får plats för en till bredvid den stående längst till höger.



6 B: 6

Alla vita eller alla grå, det ger 2 sätt. Tre grå och en vit eller tre vita och en grå, det ger 2 sätt. Två vita och två grå, samma färg diagonalt eller samma färg intill varandra, det ger 2 sätt.

7 E: 45

Det mittersta av de tre minsta talen måste vara $33/3 = 11$. De tre minsta talen är 10, 11 och 12. Då är de övriga talen 13, 14, 15 och 16. Summan av de tre största är $14 + 15 + 16 = 45$.
Algebraisk lösning:
Låt $x$ vara det mittersta talet. Då är de tre minsta talen:
$x - 3 + x - 2 + x - 1 = 33$, $x - 6 = 33$, $x = 13$ och summan av de tre största är $14 + 15 + 16 = 45$.

8 E: 30

Den minsta gemensamma multipeln till 3, 5 och 6 är 30.

9 A: 1

Arean av rektangel $ABCD$ är $6 \cdot 10 = 60$ och arean av kvadraten $PQRS$ är $6 \cdot 6 = 36$. Det skuggade området $XYRS$ har arean $60/2 = 30$.
Arean av rektangel $PQRS$ är då $36 - 30 = 6$.
Eftersom $PQ = 6$ blir $PX = 1$.

10 D: 45

För att sätta samman tre kedjor behövs två sammanfogningar.
En sammanfogning tar då $18/2 = 9$ minuter. För att sätta samman sex kedjor behövs fem sammanfogningar som då tar $5 \cdot 9 = 45$ minuter.

11 D: 25

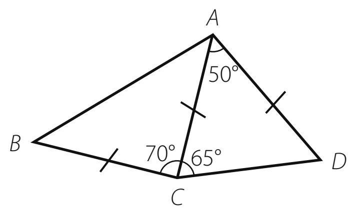
Den största summan av tre olika ensiffriga tal är $7 + 8 + 9 = 24$.
$10 = 2 + 3 + 5$, $15 = 4 + 5 + 6$, $23 = 6 + 8 + 9$.

**12 C: 19**

Vi kan först konstatera att antal blå ($b$) brickor kan vara 1, 2, 3 eller 4.
Om $b = 1$ så är de vita ($v$) 11 och de röda ($r$) 38, motsäger förutsättningarna.
Om $b = 2$ så är $v = 22$ och $r = 26$, motsäger också förutsättningarna.
Om $b = 3$ så är $v = 33$ och $r = 14$, det ger $v - r = 19$.
Om $b = 4$ så är $v = 44$ och $r = 2$, motsäger förutsättningar.
Alternativ lösning:
Givet: $v = 11b$ (1), $v + b + r = 50$ (2) och $b < r < v$ (3).
(1) och (2) ger att $r = 50 - 12b$ (4). Alltså kan $b$ vara 1, 2, 3, 4.
(1) – (4) ger $v - r = 23b - 50$. Det ger att $b$ bara kan vara 3 eller 4.
$b = 4$ ger $v = 44$ och $r = 2$ och (3) är inte uppfyllt.
Alltså $b = 3$, $v = 33$ och $r = 14$, (3) är uppfyllt och $v - r = 19$.

**13 B: 55°**

I triangeln $ACD$ får vi vinkeln
$ADC = 180° - (65° + 50°) = 65°$.
Triangeln är alltså likbent och det
blir även triangeln $ABC$.
Vinkeln $ABC = (180° - 70°) / 2 = 55°$.

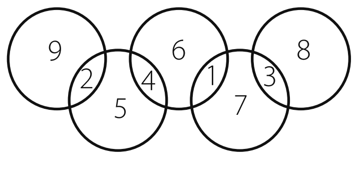



**14 C: 19**

För varje snitt ökar vi antal vedträn med 1. Har vi bara en stock kan vi med 53 snitt få 54 vedträn. Det behövs alltså ytterligare $72 - 54 = 18$ stockar, dvs totalt 19 för att få 72 vedträn.
Algebraisk lösning: Låt $n$ vara antal stockar.
För varje gång vi sågar i en stock ökar antal vedträn med 1.
Låt $s_i$ vara antal snitt i stock $i$, då ger stock $i$, $s_i + 1$ vedträn.
Vi får då $s_1 + 1 + s_2 + 1 + \ldots + s_n + 1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_n + n$ vedträn,
$53 + n = 72$, $n = 19$.

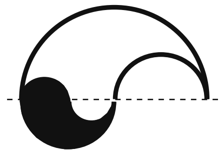
**15 B: 6**

Vi ser att 8 och 9 måste stå i de yttersta ringarna eftersom 9 bara kan kombineras med talet 2, och att 8 därmed måste kombineras med talet 3.




Återstår talen 1, 4, 5, 6 och 7.
Sen resonerar vi vidare och ser vilka tal som kan kombineras med 2 respektive 3 och tillsammans med ytterligare ett tal bli 11.
Resonemanget ger att det endast finns en lösning, samt dess spegling.
Alternativt resonemang:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, men de fem cirklarna ska innehålla tal med sammanlagd summa $5 \cdot 11 = 55$, dvs 10 mer. Det är möjligt eftersom talen i snittområdena räknas två gånger. Alltså ska summan av de fyra talen i snittområdena vara 10. De tal som ska stå där är då 1, 2, 3 och 4. Summan av talen i de tre övre cirklarna i figuren ska vara $3 \cdot 11 = 33$ och summan i de två nedre områdena blir därför $45 - 33 = 12$.
Inget av dessa två områden kan innehålla talet 6, eftersom talen ska vara olika. Talet 6 ska alltså stå i ett av de tre områdena överst men kan inte stå i något av de yttre eftersom 6 + (högst 4) < 11.
Alltså står talet 6 i den mittersta cirkeln.

16 B: $\frac{1}{4}$



Den skuggade arean motsvarar arean för en halvcirkel med radien 4. Hela figurens area motsvarar arean för en halvcirkel med radien 8. Förhållandet mellan deras inbördes radier är 1:2 och eftersom areaskalan är längdskalan i kvadrat är förhållandet mellan deras areor 1:4.

17 C: 16

Ur tabellen kan vi se att man behöver 4 höns för att få 1 gås.
Då behöver man 6 höns för att få 3 tuppar, dvs 2 höns för att få 1 tupp.
För att få 1 kalkon behövs det $5 \cdot 2$ höns = 10 höns.
Det ger $(4+2+10)=16$ höns för att få en gås, en kalkon och en tupp.
Han växlar 12 höns till 3 gäss, sen 2 gäss + 4 höns till 6 tuppar och sen 5 tuppar till en kalkon.
Algebraisk lösning:
Med beteckningarna $k$ (kalkon), $t$ (tupp), $g$ (gås) och $h$ (höns) kan följande tre samband ställas upp: $k=5t$ (1), $g+2h=3t$ (2), $4h=g$ (3).
(2) och (3) ger $6h=3t \Leftrightarrow t=2h$ som insatt i (1) ger $k=10h$.
$k+g+t=16h$.

18 B: 5

Om det på alla 18 kort står 4 så blir summan 72, om det på alla 18 kort står 5 blir summan 90. Det enda talet mellan 72 och 90 som är delbar med 17 är 85. Om vi utgår från 90 så måste fem av korten ersättas med ett kort med 4.
Algebraisk lösning: Låt $x$ vara antal kort där det står 4, $0 \leq x \leq 18$.
Antalet kort där det står 5 är då $18-x$.
Då gäller att $4x+5(18-x)=17k$ där $k$ är något heltal.
$90-x=17k$ ger den enda positiva heltalslösningen $x=5$.

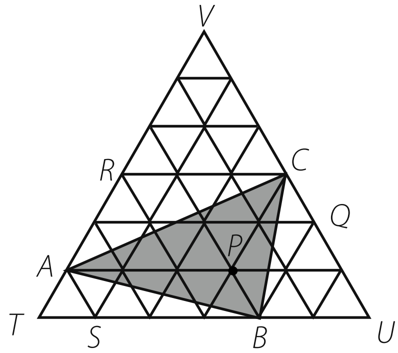
19 B: 8

En $2 \times 2 \times 2$ kub är byggd av 8 små kuber som möts i mitten i ett gemensamt hörn, alltså behövs det åtta olika färger för att bygga den enligt Josefs regel. En $3 \times 3 \times 3$ kub innehåller (flera) $2 \times 2 \times 2$ kuber, så Josef kan inte göra sin kub av småkuber med färre än 8 färger.
Men med 8 färger kan han klara det så här:
I en $3 \times 3 \times 3$ kub finns det 4 sorters småkuber: 8 hörnkuber, 1 mittenkub mitt i den stora kuben, 6 sidokuber (en mitt på varje sida) och 12 kantkuber (en mitt på varje kant). De 6 sidokuberna delar vi i 3 par av motstående kuber (de som ligger vid motstående sidor). (forts)
De 12 kantkuberna delar vi i 3 kvartetter av parallellkuber (de som ligger vid parallella kanter). Om Josef låter samtliga hörnkuber ha en färg (1) , mittenkuben en annan färg (2), varje par av motstående kuber nya färger (3, 4 och 5) och varje kvartett av kantkuber ytterligare nya färger (6, 7 och 8) så har han lyckats. Dvs, totalt 8 färger.
Lösning 2:
Dela kuben i tre lager. Börja färglägga det mittersta lagret.
Mittkuben i detta lager har färg 1. I lagret kan alla fyra hörnkuberna ha samma färg 2, de återstående kantkuberna måste ha två nya färger (färg 3 och färg 4). Det övre och det undre lagret kan vara identiska då

de saknar angränsande hörn. Vi betraktar nu det övre lagret.
Mittkuben måste ha en ny färg 5, då den gränsar till mittlagrets samtliga färger. Hörnkuberna i det övre lagret måste också ha en ny färg 6.
Kantkuberna behöver också ha två nya färger, 7 och 8.
Dvs totalt 8 olika färger.

20 A: 11 $cm^2$

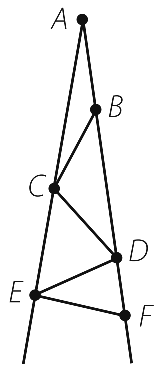
Med hjälp av punkten $P$ kan vi skapa parallellogrammerna $RCPA$, $CQBP$ och $APBS$.
Varje parallellogram är till hälften skuggad. Den skuggade delen är $12/2 + 4/2 + 6/2 = 11$




Alternativ lösning:
Triangeln $ABT$ har 4 gånger så stor area som triangeln $AST$, dvs en enhetstriangel, eftersom den har lika stor höjd men 4 gånger så lång bas.
Motsvarande gäller för triangeln $CUB$, som har tre gånger så stor höjd och två gånger så lång bas. Triangeln $AVC$ har på motsvarande sätt 5 gånger så stor höjd och 3 gånger så lång bas.
Då får vi arean av triangeln $ABC$ som $36 - (4 + 6 + 15) = 11$.

21 D: 13

Trianglarna $ABC$, $BCD$, osv är alla likbenta.
Om de lika stora vinklarna i den första triangeln är $v$ grader, så kommer de lika stora vinklarna i de följande trianglarna att vara $2v$, $3v$, $4v$, ... För varje triangel ökar alltså de lika vinklarna med $v$ grader.
Vi kan fortsätta att konstruera trianglar på detta sätt så länge $kv \leq 90°$, där $k$ är antal trianglar.
Eftersom $v = 7°$ ger olikheten att $k = 12$ och antal sträckor blir 13.



# Rättningsmall

| Uppgift | A | B | C | D | E | Poäng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | C | | | 3 |
| 2 | | | | D | | 3 |
| 3 | | | | | E | 3 |
| 4 | | | C | | | 3 |
| 5 | | B | | | | 3 |
| 6 | | B | | | | 3 |
| 7 | | | | | E | 3 |
| 8 | | | | | E | 4 |
| 9 | A | | | | | 4 |
| 10 | | | | D | | 4 |
| 11 | | | | D | | 4 |
| 12 | | | C | | | 4 |
| 13 | | B | | | | 4 |
| 14 | | | C | | | 4 |
| 15 | | B | | | | 5 |
| 16 | | B | | | | 5 |
| 17 | | | C | | | 5 |
| 18 | | B | | | | 5 |
| 19 | | B | | | | 5 |
| 20 | A | | | | | 5 |
| 21 | | | | D | | 5 |
| | | | | | SUMMA | 84 |

# Redovisningsblankett A

Redovisning av resultat sker på webbadress ncm.gu.se/kanguru/. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Senaste datum för redovisning av resultat är 27april.

Namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje årskurs

| Åk | Namn | Poäng |
|---|---|---|
| 8 | | |
| | | |
| 9 | | |
| | | |

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

| Antal elever med | åk 8 | åk 9 |
|---|---|---|
| 70 – 84 poäng | | |
| 50 – 69 poäng | | |
| 34 – 49 poäng | | |
| 22 – 33 poäng | | |
| 10 – 21 poäng | | |
| 0 – 9 poäng | | |
| **Totalt antal deltagare** | | |

# Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

| | **Antal elever som svarat rätt på uppgiften** | |
|---|---|---|
| **Uppgift nr** | åk 8 | åk 9 |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |
| 21 | | |