Kängurun – Matematikens Hopp

Student 2009

Svar och lösningar

1: E 100

Antal blå fiskar: 1 % av 200 är 2.
Antal gula fiskar är $200 - 2 = 198$.
För att ha 2 % blå fiskar måste antalet gula vara 98. Alltså måste man avlägsna 100 gula fiskar.

2: A $\sqrt{2} - \sqrt{1}$

Genom att veta ungefär vad kvadratroten ur de första naturliga talen är, kan man inse att $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ störst. För att bevisa det algebraiskt kan följande metod fungera: Förläng uttrycken så att konjugatregeln kan tillämpas. Då fås följande tal

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

Eftersom summan i nämnaren blir större och större så blir kvoterna mindre och mindre, alltså är $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ störst.

3: B 1

$n^2 + n = n(n+1)$ är en produkt av två på varandra följande tal vilket är jämnt. Det enda jämna primtalet är 2 och det fås då n är 1, dvs det finns 1 sådant heltal.

4: D 18 072

2008 nior följs av siffran 2. Summan av dessa nior är $2008 \cdot 9 = 18072$.

5: C 17

Kalla de tre övriga talen för a, b och c (med c mittemot hörnet markerat med 1). Då gäller

$1+5+a=1+a+b=5+a+c=1+5+b=a+b+c=5+b+c$

Första likheten ger $b=5$. Sista likheten ger $a=5$. Andra likheten ger $c=1$. Summan av de fem talen är 17.

Alternativt, symmetriskäl ger att hörntalen är 1, 5, 5, 5, 1.

6: D 7

Liz har nio strumpor varav tre trasiga. Det sämsta alternativet är att Liz har en trasig socka i varje färg och att hon har plockat upp sex sockor, en trasig och en hel i varje färg. Den sjunde sockan ger då garanterat ett helt par.

7: D C eller D

I översta raden används A och B, i andra raden C och D, i tredje raden B och A. I fjärde raden C och D och det är möjligt att den skuggade rutan har någon av dessa.

8: D 13

Konstruktionen ger att $\triangle$APQ är kongruent med $\triangle$ABC, $\triangle$BRS är kongruent med $\triangle$BAC och att $\triangle$CUT är kongruent med $\triangle$CAB. Dra genom A en linje parallell med CB, genom B en linje parallell med CA och genom C en linje parallell med AB. Det uppkommer då 9 trianglar som alla är kongruenta med $\triangle$ABC. Hela hexagonen består av 13 trianglar vardera med area 1.

9: E $(1-\sqrt{2})^2$

Radien i den stora cirkeln är 1. Diagonalen i kvadraten är $\sqrt{2}$. Radien i den lilla cirkeln är r. Då är $1+r+\sqrt{2}\,r=\sqrt{2}$. Förenkling ger att $r=(1-\sqrt{2})^2$.

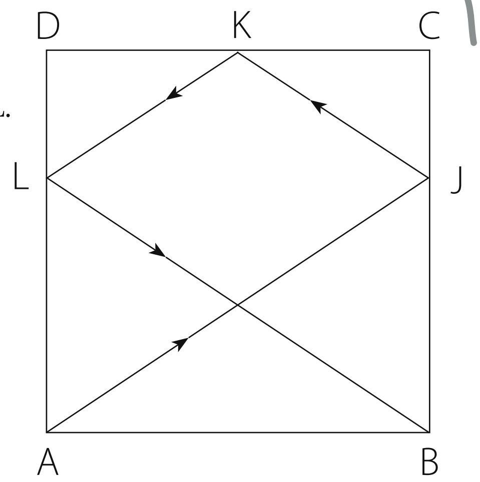
10:B 1001

Ställ kängururna i en lång rad, då står det först 8 mörka och sedan en ljus, en mörk, en ljus, osv. Den sista i raden är en ljus känguru. Det ger att antalet ljusa kängurur är 1001. Den känguru som har nr 1001 bland de ljusa har nr 2009 bland både mörka och ljusa.

11: B $2\sqrt{13}$

Kalla de övriga två hörnen för C respektive D och punkterna där bollen träffar kanterna för J, K, och L. Då är Δ ABJ likformig med Δ KCJ i förhållande 2:1 (K mittpunkt på CD).
Det ger att BJ är $\frac{4}{3}$ och JC är $\frac{2}{3}$.
Pythagoras sats ger att AJ är $\frac{2\sqrt{13}}{3}$ och JK är $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Den sammanlagda längden är $2\sqrt{13}$.



12: B 9

Börja exempelvis med det översta skiktet och placera ut tre svarta kuber så att de blockerar samtliga rader i båda riktningarna. Välj i nästa skikt tre kuber som blockerar riktningar som inte är blockerade, samma för det tredje skiktet, det ger totalt 9 kuber. I figuren till höger representerar 1:orna det översta skiktet, 2:orna andra skiktet osv.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

13: D 13

Anta att den mannen som står först är sanningssägare, då är den andra lögnare, vilket ger en motsägelse. Alltså är den första mannen en lögnare. Då är den andra mannen en sanningssägare, nästa en lögnare osv. Det ger 13 lögnare i kön.

14: C 64

Vi kan dela upp det i två fall, första siffran är en tvåa eller är inte en tvåa.

1) Om första siffran är två, så är även siffran på plats 3, 5, 7 och 9 en tvåa. På de andra fem platserna har vi två möjligheter, nämligen 1 eller 3, multiplikationsprincipen ger $2^5 = 32$ tal.

2) Om första siffran inte är två, så förekommer den på plats 2, 4, 6, 8 och 10. På de andra fem platserna har vi två möjligheter, nämligen 1 eller 3, multiplikationsprincipen ger $2^5 = 32$ tal.

Sammanlagt finns 64 tal som uppfyller villkoret.

15: B $6 + \pi$

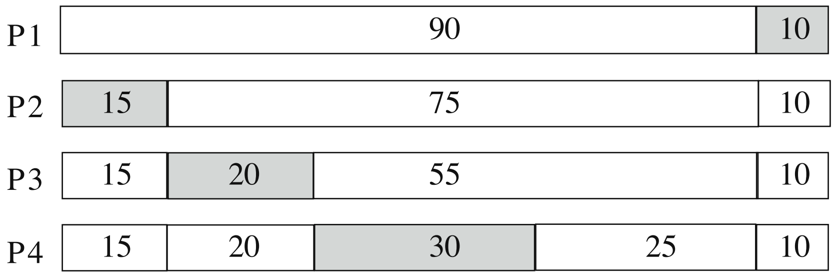
Cirkelns periferi delar varje triangelsida i tre lika stora delar, vardera med längd 1. Varje cirkelbåge motsvarar vinkeln 60°. Det ger den sammanlagda omkretsen $6 + \pi$.

16: B $g(x-2) = -f(x)$

Graf g är först en förskjutning av graf f två steg åt vänster och därefter en spegling i x-axeln, det $g(x-2) = -f(x)$.

17: D 25

Vi söker det minsta möjliga antal som löste alla fyra problemen. Vi åskådliggör grafiskt för varje problem antalet elever som har löst det korrekt respektive fel. För att få minsta antal måste de som löser nästkommande problem fel finnas bland dem som har löst de föregående problemen korrekt. De elever som har löst problemet fel finns i den gråa rutan.



Minsta möjliga antal fås när de gråa rutorna inte innehåller några gemensamma elever, alltså 25.

18: D 55

Beteckna talen i de tomma rutorna som figuren visar.
Då gäller följande:
$a + e = c + 47$
$a + d = 63 + g$
Ledvis addition ger
$2a + e + d = 110 + c + g$
Men $c + g = d + e$
$2a = 110$
$a = 55$

a	b	c
d	e	47
f	63	g

19: D 4 min 48 sek

På 8 min har A sprungit $\frac{8}{3}$ varv. Då måste B ha sprungit $\frac{5}{3}$ varv på samma tid. Det ger att 1 varv tar $\frac{24}{5}$ min = 4 min 48 sek för B.

20: E 5

Om två heltal har samma slutsiffra har även talens kvadrater denna slutsiffra. Betrakta slutsiffran i de 10 första kvadrattalen, det ger $1-4+9-6+5-6+9-4+1-0=5$. Vi har 201 sådana sekvenser, varannan med slutsiffran 5, varannan med slutsiffran -5. Alltså har hela summan slutsiffran 5.

21: B 9

Låt minsta antal problem som behövs vara n. Då kan vi få följande lösningsstatistik, där varje par anger antal möjliga kombinationer av rätt lösta och felaktigt lösta uppgifter:

$(n+, 0-)$	1 tävlande
$((n-1)+, 0-), ((n-1)+, 1-)$	2 tävlande
$((n-2)+, 0-), ((n-2)+, 1-), ((n-2)+, 2-)$	3 tävlande
…	
$(1+, 0-), (1+, 1-), ..., (1+, (n-1)-)$	n tävlande
$(0+, 0-), (0+1-), ..., (0+, (n-1)-), (0+, n-)$	$n+1$ tävlande

Totalt deltog 55 elever. Det ger $1+2+...+(n+1)=55$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 55 \Leftrightarrow (n+2)(n+1) = 110 = 11 - 10 \Rightarrow n = 9$$

22: A $8 + 2\sqrt{2}$

Eftersom JN är en bisektris så är $\angle$ MJN = $\angle$KJN = 45°. Markera punkten P på sidan JK så att $\angle$ JPN är rät. Då är triangeln JPN likbent. Låt JP = PN = x. Beteckna punkten där den streckade linjen från N skär KL med Q och punkten där den streckade linjen från N skär ML med R. Då är triangeln MNR likformig med triangel NKQ. Det ger $\frac{x}{8} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$. Då är LM $= 2\sqrt{2} + 8$

23: C 33

Börja med att räkna modulus 3, då får vi 1, -1, 0, 1, -1, 0, …, 1, -1, 0, dvs, 33 st ”1”, 33 st ”-1” och 33 st ”0”. Påstående (3) ger att alla tal delbara med 3, dvs 33 st ”0” måste vara i varsin grupp. Det ger 33 grupper. Lägg i 31 av grupperna en ”1” och i den 32:a gruppen två stycken ”1”. I den 33:e gruppen läggs alla -1.

24: B 1

$a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ för $n \geq 0$ ger

$a_2 = a_0 + a_1^2 = 1 + 4 = 5 \equiv_7 -2$

$a_3 = a_1 + a_2^2 \equiv_7 2 + (-2)^2 = 6 \equiv_7 -1$

$a_4 = a_2 + a_3^2 \equiv_7 -2 + (-1)^2 = -1$

$a_5 = a_3 + a_4^2 \equiv_7 -1 + (-1)^2 = 0$

$a_6 = a_4 + a_5^2 \equiv_7 -1 + 0 = -1$

$a_7 = a_5 + a_6^2 \equiv_7 0 + (-1)^2 = 1$

$a_8 = a_6 + a_7^2 \equiv_7 -1 + 1^2 = 0$

$a_9 = a_7 + a_8^2 \equiv_7 1 + 0 = 1$

$a_{10} = a_8 + a_9^2 \equiv_7 0 + 1 = 1$

$a_{11} = a_9 + a_{10}^2 \equiv_7 1 + 1^2 = 2$

$a_{12} = a_{10} + a_{11}^2 \equiv_7 1 + 2^2 = 5 \equiv_7 -2$

Efter tio steg är vi tillbaka, det betyder att resten när a_{2009} divideras med 7 är densamma som för a_9.

Arbeta vidare med Student

Flertalet av problemen anknyter till begrepp som tas upp i de nationella kurserna. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare och inte se tävlingstillfället något som avbryter den ordinarie undervisningen. Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp.

Aritmetik

Här behandlas problem S 1, S 2, S 3, S 4, S 19, S 20, S 23, S 24.

Udda och jämna tal, primtal

Många problem behandlar grundläggande räknefärdigheter. I S 4 talas om udda tal. Det kan vara lämpligt att repetera egenskaper hos *udda* och *jämna* tal. Utnyttja algebra genom att skriva uttryck för ett jämnt tal, $2k$, och ett udda tal $2k+1$, där k betecknar ett heltal. Får man ett jämnt eller udda tal om man adderar två udda tal, två jämna tal, ett udda och ett jämnt tal? Bevisa algebraiskt. Motsvarande om man istället multiplicerar två udda tal, två jämna tal, ett udda och ett jämnt tal.
I samband med udda och jämna tal, ta även upp primtal. Anknyt till uppgift S3. Repetera faktorisering. Ta gärna fram uppgift S7 från 2008 som också handlar om primtal.

Potenser

I S 2 jämförs differenser mellan kvadratrötter och i S 20 har man kvadrater på de 2009 första positiva heltalen.

Vad kännetecknar ett tal i kvadrat? Vilken slutsiffra kan ett tal i kvadrat ha? Vilken slutsiffra har $1^2+2^2+\ldots+2009^2$? Undersök slutsiffran på potenser av heltal, t.ex. potens 3, potens 4.

Upprepa frågeställningen för dessa potenser.

Vad menas med kvadratroten ur ett tal? Repetera räkneregler med kvadratrötter. Ta upp konjugatregeln. Repetera potenslagarna.

Bråkform

I S 1 förekommer procent. Ändra antalet fiskar i akvariet men behåll procentandelen. Ändra procentandelen men behåll antalet fiskar. I S 19 kan det vara bra att använda tal i bråkform. Hur definieras ett tal i bråkform? Vilken betydelse har täljaren respektive nämnaren? Repetera räkneoperationer med tal i bråkform.

Talföljd

Vad menas med en talföljd? Elementen i uppgift S 24 kan bara bestämmas om man känner de två föregående elementen. Vad kallas en sådan formel? Vad kallas en formel där man direkt kan bestämma elementet a_n? Jämför med uppgift J 9 (Junior uppgift 9). Ta upp aritmetisk respektive geometrisk talföljd och deras summor.

Delbarhet, rester och modulus

Repetera begreppen delbarhet och multipel. En utgångspunkt kan vara att diskutera uppgift J1. Fyra av svarsalternativen är inte en multipel av 3. Vilken rest får man då vid division med 3? Ta upp positiv respektive negativ rest. Låt a och b vara två heltal. Om b är en delare i a, gäller att $a=k\cdot b$, där k är heltal. Om b inte är en delare i a, gäller att $a=k\cdot b+r$, där k och r är heltal och r betecknar resten. Vilka värden kan r anta? Vilka räkneregler gäller för rester? Inför modulusbegreppet och visa hur det underlättar beräkningar i uppgifterna S 23 och S 24.

Geometri

Här behandlas problem S 8, S 9, S 11, S 12, S 15, S 22.

I geometriska problem är det viktigt att arbeta med lösningen och motivera tankegången. Rita gärna tydliga figurer. Arbeta igärna genom lösningarna till de geometriska problemen som finns med på årets Student.

Geometri och algebra

Algebra är ett bra redskap för att lösa geometriska problem. I en tydlig figur införs de beteckningar som behövs. Genom att åberopa t ex kända satser kan lösningen växa fram.

Lösningarna i S 8 och S 11 bygger på likformighet och kongruens. Jämför i S 8 vinklarna i de olika områdena. Vilka är lika stora och varför? Vilken area har de övriga områdena?

Under vilken vinkel träffar bollen sidorna i uppgift S 11?

Diskutera lösningen till S 9. Vad kan man säga om förhållandet mellan arean av den stora och den lilla cirkeln. Anta att man innanför kvadraten skuggar kvartscirkeln och den lilla cirkeln. Hur stor del är då skuggad? Se även J 18.

Arbeta med lösningen av S 22. Vad menas med en *bisektris*? Be eleverna motivera likformigheten. Hur lång är sidan KL? Vilken area har rektangeln? Vilken area har triangeln JKN? Hur stora är vinklarna i triangeln KLM?

Operationer med former

För att få en förståelse av kuberna i S 12 kan det vara lämpligt att arbeta konkret. Hur många svarta kuber måste placeras ut om kuben istället har måtten $4 \times 4 \times 4$? Vad gäller för en kub med måtten $n \times n \times n$?

Geometriska konstruktioner

I S15 förekommer en liksidig triangel och en cirkel. Var ligger tyngdpunkten i en triangel? Bestäm tyngdpunkten för olika typer av trianglar. Repetera begreppen bisektris, höjd, median och mittpunktsnormal för en triangel. Vad gäller för dessa fyra linjer i en liksidig triangel? Vad menas med omskriven cirkel till en triangel? Hur konstruerar man den? Vad menas med en inskriven cirkel till en triangel? Hur konstruerar man den? Vilken radie har den inskrivna cirkeln till en liksidig triangel? Vilken radie har den omskrivna cirkeln till en liksidig triangel? Hur stor del av den liksidiga triangeln är täckt av cirkeln i S15?

Algebra

Här behandlas S 5, S 16, S 18 och S 21.

Många av problemen kan man lösa med hjälp av svarsalternativen utan att använda algebra, t ex genom att pröva sig fram. Låt därför eleverna arbeta med problemen utan svarsalternativ och visa hur algebra leder fram till entydiga lösningar.

Ekvationer

Arbeta i S 5, S 18 och S 21 med ekvationer.

Diskutera formen på kroppen och koppla till geometri i S 5.

Diskutera med eleverna om det finns en entydig lösning i S 18.

Resonera om S 21. Ha samma förutsättningar men ändra antalet elever. Hur är antalet ”minsta problem” kopplat till antal elever?

Funktioner
S16 behandlar funktioner och grafer. Diskutera förskjutning av grafer, nollställen och grafer som är konkava uppåt respektive konkava neråt, funktioner som är avtagande respektive växande. Hur ligger graferna gentemot varandra för de övriga svarsalternativen? Rita graferna om de andra svarsalternativen skulle vara korrekta.

Logik
Här behandlas problem S13och S17.

I S13 ska man resonera om sanningssägare och lögnare. Hur skall man ändra i frågeställningen för att få de andra svarsalternativen?

Resonera kring problemet i S17. Vilket är det största möjliga antal tävlande som kan ha löst alla fyra problemen? Hur många har inte löst några problem? Hur många kan ha löst ett problem?

Kombinatorik
Här behandlas problem S6, S7 och S14.
I S6 plockar Liz strumpor ur en låda. Hur många måste hon ta upp för att vara säker på att få ett par av samma färg? Hur stor är sannolikheten att få ett par av samma färg om hon tar upp två strumpor på måfå? Diskutera med återläggning och utan återläggning.

I S7 ska ett rutnät fyllas med bokstäver. Ett sätt att hitta möjliga bokstäver för den skuggade rutan är att fylla i rutnätet. Ett annat sätt är att resonera om det antal möjligheter som finns för rutorna. Vilka rutor kan bara fyllas med en bestämd bokstav? I vilka rutor har vi fler än en möjlighet? På hur många olika sätt kan man fylla rutnätet? Jämför även CGy7.

Diskutera med eleverna hur man löser S14. Vilka siffror kan stå bredvid varandra? Vad menas med *multiplikationsprincipen*? Måste det 10-siffriga talet bestå av alla tre siffrorna?