Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2009

Svar och lösningar

1: C $(2+0)\cdot(0+9)$
Om siffersumman är delbar med 3 är talet delbart med 3. Det enda tal som uppfyller det villkoret är $(2+0)\cdot(0+9) = 18$.

2: E 100
1 % av 200 svarar mot 2 blå fiskar, som är 2 % av 100. Antal gula fiskar är $200 - 2 = 198$. För att ha 2 % blå fiskar måste antalet gula vara 98. Alltså måste man avlägsna 100 gula fiskar.

3: A 503
Antag att x personer besegrade John. Då besegrade John $3x$ personer. Det ger följande ekvationer $x + 1 + 3x = 2009 \Leftrightarrow x = 502$. John kom då på plats 503. Alternativt kan man tänka att det finns $2008 / 4 = 502$ löpare före John.

4: C 100

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot 1000 = 100$$

5: D 18072
Alla nior utom den sista följs av 2. Summan av dessa är $2008 \cdot 9 = 18072$

6: C 17

Kalla de tre övriga talen för a, b och c. Då gäller:

$1+5+a=1+a+b=5+a+c=1+5+b=a+b+c=5+b+c$

Första likheten ger $b = 5$. Sista likheten ger $a = 5$. Andra likheten ger $c = 1$.

Summan av de fem talen är 17.

Alternativt, symmetriskäl ger att hörntalen är 1, 5, 5, 5, 1.

7: B 3

$1^2 = 1$, $1^3 = 1$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, alltså tre tal. Potenser av 3 ökar snabbare än potenser av 2.

8: B $80 - 2\pi$

Eftersom de tre cirklarna skär av en yta som motsvarar en halvcirkel blir arean

$$80 - \frac{2^2 \cdot \pi}{2} = 80 - 2\pi$$

9: E 24

Låt x och y vara det femte respektive sjunde talet. Då gäller att $6 + x = 15 \Leftrightarrow x = 9$ och $y = 9 + 15 = 24$.

I ord, sjätte talet 15 är summan av det fjärde, 6, och det femte, som alltså är 9.

Det sjunde är summan av det femte och sjätte, $9 + 15 = 24$.

10: B 124°

Låt $2x$ och $2y$ vara de två övriga vinklarna i triangeln. Då gäller att

$2x + 2y = 180° - 68° \Leftrightarrow x + y = 56°$. Då är $v = 180° - 56° = 124°$

11: C Mary fick poängen 3 exakt tre gånger.

Om Marys medelpoäng efter 4 prov är 4, är hennes totalpoäng 16. C måste då vara falskt, för Mary kan inte uppnå 16 poäng på 4 prov om hon har fått exakt 3 poäng på 3 prov.

12: D 13

Anta att mannen som står först är sanningssägare, då är den andre lögnare, vilket ger en motsägelse. Alltså är den första mannen en lögnare. Då är den andre mannen en sanningssägare, nästa en lögnare osv. Det ger 13 lögnare i kön.

Alternativt resonemang: Varannan måste vara sanningssägare och varannan lögnare, för att de sista 24 ska kunna säga samma sak, dvs 12 lögnare och 12 sanningssägare av dessa. Det återstår att testa om den som står först är sanningssägare eller lögnare. Han ljuger, alltså finns det 13 lögnare.

13: C 7

$3 \square 5 = 3 \cdot 5 + 3 + 5 = 23$, $2 \square x = 2x + 2 + x = 3x + 2$

$3 \square 5 = 2 \square x \Leftrightarrow 23 = 3x + 2 \Leftrightarrow 21 = 3x \Leftrightarrow x = 7$

14: D 9

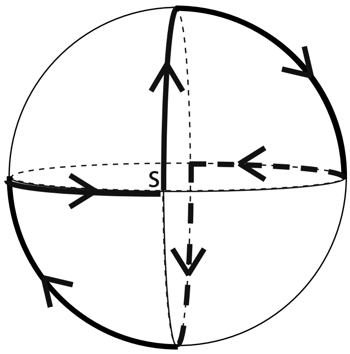
Talet 7 kan bara ha en enda granne, 1, och måste därför stå först eller sist. En sådan rad blir högst åtta tal lång, t ex 7, 1, 5, 10, 2, 6, 3, 9. Alla andra tal kan ha minst två grannar. Går det att göra en längre rad, där 7 inte ingår? Ja, det går att göra flera olika rader med nio tal, exempelvis 8, 4, 2, 10, 5, 1, 9, 3, 6.

15: C 39

$|\sqrt{n} - 10| < 1 \Leftrightarrow -1 < \sqrt{n} - 10 < 1 \Leftrightarrow 9 < \sqrt{n} < 11 \Leftrightarrow 81 < n < 121$, dvs 39 tal.
Alternativt, $n = 82, 83, 84, \ldots 120$. För $n = 81$ får vi $\sqrt{n} = 9$ och för $n = 121$ får vi $\sqrt{n} = 11$.

16: A 6

Anta att fjärilen landar mitt på den främre skärningspunkten och först kryper norrut till nästa skärningspunkt. Där vänder hon höger och kryper söderut till nästa skärningspunkt. Där vänder hon vänster och kryper på bakre delen av ringen. Nästa gång vänder hon höger, dvs söderut, därefter vänster och kryper uppåt. Nästa gång är det höger och hon kryper nu utefter ringen som leder till utgångspunkten, dvs 6 kvartscirklar.



17: D C eller D

I översta raden används A och B, i andra raden C och D, i tredje raden B och A. I fjärde raden C och D och det är möjligt att markera den skuggade rutan med någon av dessa två.

18: C $1 + \sqrt{2}$

Beteckna kvadratens sida med s, den mindre cirkelns radie med r och den större cirkelns radie med R. Då gäller $r + R = s$.
Pythagoras sats ger att $2s^2 = (2R)^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{2}R$
Då är $r + R = \sqrt{2}R \Leftrightarrow R = \frac{r}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)r$.

19: C $c < b < a$

$a = 2^{25}$, $b = 8^8 = 2^{24}$ alltså är $b < a$

$$c = 3^{11} = 2^{11} \cdot \left(\frac{3^{11}}{2^{11}}\right) = 2^{11} \cdot 1{,}5^{11} < 2^{11} \cdot 2^{11} = 2^{22} < b.$$

20:C 64

Vi kan dela upp det i två fall:
1: Om första siffran är två, så är även siffra på plats 3, 5, 7 och 9 en tvåa. På de andra fem platserna har vi två möjligheter, nämligen 1 eller 3, multiplikationsprincipen ger $2^5 = 32$ tal.

2: Om första siffran inte är två, så förekommer den på plats 2, 4, 6, 8 och 10. På de andra fem platser har vi två möjligheter, nämligen 1 eller 3, multiplikationsprincipen ger $2^5 = 32$ tal.
Sammanlagt finns 64 tal som uppfyller villkoret.

21:B 763

Faktoruppdelning av 2009 ger att rätblocket har måtten $7 \times 7 \times 41$. Han behöver då $2 \cdot 49 + 4 \cdot 7 \cdot 41 = 1246$ klistermärken. Det blir 763 märken över.

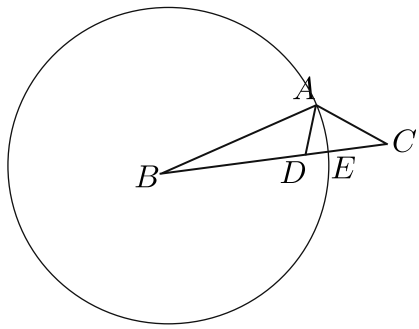
22:B 14

Delsummorna i kolumner och rader är 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 och 7. Antalet brickor räknas två gånger (i kolumn och rad) och blir som minst hälften av summan av talen ovan, dvs 14. Det kan vi få t ex om brickorna i raderna är 1, 2, 4, 7 och brickorna i kolumnerna är 0, 3, 5 och 6.

	I			1
	II			2
		II	II	4
		III	IIII	7
0	3	5	6	14

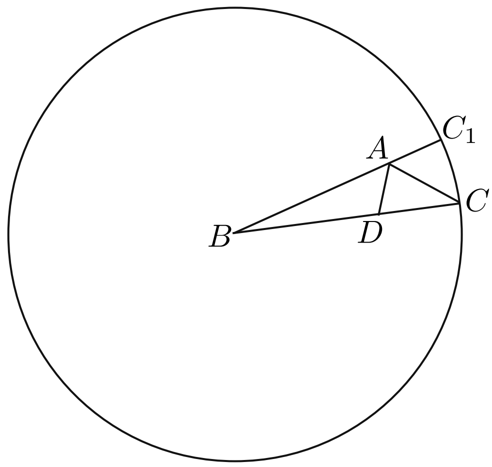
23: C 2

Dra en cirkel genom A med medelpunkt B som skär BC i E. Då är den sökta sträckan EC. $BC - AB$ är detsamma som $BC - BE$, eftersom EB och AB är lika långa (radien i cirkeln). Betrakta triangeln ABE. Den är likbent med basvinklarna 80° eftersom AB och EB är radier i cirkeln. Eftersom AD är en bisektris är $\angle BAD = 60°$.



Det ger att $\angle ADE = 80°$. Alltså är triangeln DAE likbent och AE är 2. Betrakta nu triangeln AEC. $\angle ACE$ är 40° och $\angle AEC = 100°$. Det ger att $\angle EAC = 40°$. Triangeln är likbent och $EC = AE = 2$.

Alternativ lösning:
Rita en cirkel med centrum i hörnet B och radie BC. Förläng BA till punkten C_1 på cirkelns periferi. Då är $BC_1 = BC$ och den sökta sträckan är AC_1. $\angle DAC = 60°$ eftersom AD är bisektris.
$\angle ADC = 80°$ och $\angle C_1AC = 60°$
Triangeln BCC_1 är likbent och $\angle BCC_1 = \angle BC_1C = 80°$.
Då är $\angle ACC_1 = 40°$.
Trianglarna ADC och AC_1C är kongruenta och $AC_1 = AD = 2$.



24: B 8

Utveckling med konjugatregeln ger

$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (n^2 - 1) =$
$(2 - 1)(2 + 1)(3 - 1)(3 + 1)(4 - 1)(4 + 1) \cdot \ldots \cdot (n - 1)(n + 1) \Rightarrow$
$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 9 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 =$
$= (1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7)^2$, dvs för $n = 8$

Arbeta vidare med Junior

Flertalet av problemen anknyter till begrepp som tas upp i de nationella kurserna. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare och inte se tävlingstillfället som något avbrott i den ordinarie undervisningen. Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp.

Aritmetik

Här behandlas problem J 1, J 2, J 3, J 4, J 5, J 7, J 9, J 11, J 14, J 15, J 19, J 24.

Användningen av de hela talen kan sägas tillhöra den innersta kärnan av aritmetiken. Hur man angriper ett problem kring dem är en viktig färdighet att lära sig och att utveckla. Viktiga begrepp att arbeta med här är faktor, multipel av, delbarhet, primtal och primtalsfaktorisering.

Udda och jämna tal

Många problem behandlar grundläggande räknefärdigheter. I J 5 nämns udda tal. Det kan vara lämpligt att repetera egenskaper hos *udda* och *jämna* tal. Anknyt gärna till CGy 1 och 3 (Cadet för gymnasiet, uppgift nr 1 och 3). Utnyttja algebra genom att skriva uttryck för ett jämnt tal, $2k$, och ett udda tal $2k + 1$, där k betecknar ett heltal. Får man ett jämnt eller udda tal om man adderar två udda tal, två jämna tal eller ett udda och ett jämnt tal? Bevisa påståendena algebraiskt. Motsvarande, om man istället multiplicerar två udda tal, två jämna tal eller ett udda och ett jämnt tal?

Delbarhet

I J 1 förekommer begreppet *delbart* och J 14 fokuserar på tal delbara med varandra.

Alla jämna tal är en multipel av 2. Det är ett alternativt uttryck för att ett tal är delbart med 2.

Diskutera delbarhetsregler för talen 3, 4, 5, 6, 8, 9 och 10.

Delbarhet med 3 undersöks enklast genom att talets *siffersumma* beräknas.

Visa att påståendet ”Ett heltal är delbart med tre om och endast om talets siffersumma är delbar med 3” är sant.

Vilka tal är 2009 multipel av? Svaret på den frågan kan man få genom att *primtalsfaktorisera*.

Repetera primtal. Koppla till S 3 (Student, uppgift nr 3).

Potenser

I J 7 nämns tal i kvadrat respektive kubik, i J 15 kvadratrot, i J 19 förekommer potenser och i J 24 efterfrågas ett heltal i kvadrat. Här finns fyra problem som har en hel del gemensamt. Diskutera igenom lösningarna.

Diskutera kvadraten respektive kubiken på negativa och positiva heltal.

För vilka heltal gäller att talet i kvadrat är större än talet i kubik?

Vad kännetecknar ett tal i kvadrat?

Vilken slutsiffra kan ett tal i kvadrat ha?

Vad menas med kvadratroten ur ett tal?

Repetera potenslagarna.

Hur kan man jämföra tal i potens som har lika baser eller olika baser?

Ta upp konjugat- och kvadreringsreglerna och hur de kan underlätta beräkningar.

Bråkform

J 2 innehåller procent och J 4 tal i bråkform.

Hur definieras ett tal i bråkform? Vilken betydelse har täljaren respektive nämnaren? Repetera räkneoperationer med tal i bråkform. Vad är procent? Uttryck tal i procent- och bråkform.

Ändra antalet fiskar i akvariet men behåll procentandelen. Ändra procentandelen men behåll antalet fiskar.

Talföljd

Vad menas med en talföljd? Be eleverna beskriva elementen i talföljden i problem J 9, dels med en sluten formel, dels med en rekursionsformel för elementet a_n. Jämför med Fibonaccis talföljd. Ta upp aritmetisk respektive geometrisk talföljd och deras summor.

Medelvärde

J 11 tar upp medelvärde. Diskutera hur Marys resultat för de fyra proven kan se ut för att ge medelpoäng 4. Hur stor är sannolikheten att medelvärdet är 4 efter 4 prov?

Vilka medelvärden är möjliga för Mary att uppnå efter 5 prov?

Ett liknande problem från 2008 var J 12.

Geometri

Här behandlas problem J 8, J 10, J 16, J 18, J 21, J 23.

I geometriska problem är det viktigt att analysera lösningen och motivera tankegången. Rita gärna tydliga figurer. Arbeta med lösningarna till de geometriska problemen som finns med på årets Junior.

Geometriska former och deras konstruktion

Triangelns och cirkelns grundläggande egenskaper utnyttjas i J 8. Gå igenom dem. Låt eleverna visa att de har förstått lösningen av problemet. Går det att bestämma cirklarnas största möjliga radie? Spelar triangelns form någon roll?

I J10 är tre *bisektriser* inritade. Vad menas med en bisektris? De tre bisektriserna skär varandra i en punkt. Den punkten är medelpunkt för en cirkel som har ett speciellt läge i förhållande till triangeln. Låt eleverna undersöka cirkelns läge i förhållande till triangeln. Ta även upp begreppen median, mittpunktsnormal och höjd.

Arbeta konkret med J 16 för att öka förståelsen för tredimensionella rörelser. En något enklare rörelse i tre dimensioner finns i problem CGy 9.

Geometri och algebra

Algebra är ett bra redskap för att lösa geometriska problem. I en tydlig figur införs de beteckningar som behövs. Genom att åberopa kända satser kan lösningen växa fram.

I J 18 frågas efter förhållandet mellan cirklarnas radier. Bestäm även förhållandet mellan cirklarnas omkrets och area. Hur många gånger längre är kvadratens sida än den lilla cirkelns radie? Hur stor del av kvadraten utgör de fyra kvartscirklarna? I uppgiften nämns *tangent*. Vad menas med en tangent till en cirkel? Jämför även med S 9.

Arbeta med lösningen till J 23. Börja med att rita triangeln och markera det som är givet. Be eleverna fokusera på det som efterfrågas. Med vägledning bör någon komma på att konstruera en cirkel. Resonemang kring vinklar och likbenta trianglar bör leda fram till att det finns två trianglar som är kongruenta. Diskutera begreppen likformighet och kongruens.

Operationer med former

I problem J 21 har vi ett rätblock bestående av 2009 enhetskuber. Diskutera vilka mått rätblocket har. Hur många enhetskvadrater finns det på varje sidoyta? Diskutera hur många enhetskuber som måste tas bort respektive läggas till för att få en kub.

Algebra

Här behandlas problem J 3, J 6, J 13.

Många av problemen kan man lösa med hjälp av svarsalternativen utan att använda algebra, t ex genom att pröva sig fram. Låt därför eleverna arbeta med problemen utan svarsalternativ och visa hur algebra leder fram till entydiga lösningar.

Ekvationer

Arbeta i uppgifterna J 3 och J 6 med ekvationer. Konkretisera genom att rita bilder där variablerna införs. Ändra frågeställningen i J 3 och låt eleverna bilda nya ekvationer.

I J 6 kan formen på kroppen diskuteras. Koppla även till geometri.

Uttryck

I J 13 införs en ny räkneoperation genom ett uttryck. Arbeta vidare med räkneoperationen genom att utföra flera beräkningar. Är den kommutativ, associativ? Talen 0 och 1 har en speciell betydelse i addition och multiplikation. Vilken? Finns det något motsvarande tal i den här räkneoperationen?

Logik

Här behandlas J 12 och J 22.

J 12 handlar om sanningssägare och lögnare. Hur skall man ändra i frågeställningen för att få de andra svarsalternativen?

Låt eleverna arbeta konkret med J 22, t ex genom att placera ut brickor/stickor i ett rutnät. Hur ska man resonera för att visa att man inte kan placera ut färre brickor? Börja gärna med ett 2×2 rutnät och fortsätt med större rutnät för att finna ett mönster. Hur många brickor kan placeras ut i ett $n \times n$ rutnät? Är det samma resonemang då n är jämnt respektive udda?

Kombinatorik

Problemen J 17 och J 20 behandlas här.

I J 17 ska ett rutnät fyllas med bokstäver. Ett sätt att hitta möjliga bokstäver för den skuggade rutan är att fylla i rutnätet. Ett annat sätt är att resonera om det antal möjligheter som finns för rutorna. Vilka rutor kan bara fyllas med en bestämd bokstav? Vilka rutor kan fyllas med mer än en bokstav? På hur många olika sätt kan man fylla rutnätet? Jämför även CGy 7.

Diskutera med eleverna hur man löser J 20. Vilka siffror kan stå bredvid varandra? Vad menas med *multiplikationsprincipen*? Måste det 10-siffriga talet bestå av alla tre siffrorna?

Hur många av talen består av bara två siffror?

Hur många 10-siffriga tal finns det som endast består av siffrorna 1, 2 och 3?

Hur många 10-siffriga tal blir det om siffrorna 0, 1 och 2 används med samma frågeställning.