Svar och lösningar

1: D $200 \cdot 9$
Ett tal är jämnt om entalssiffran är jämn. Det enda talet som uppfyller det villkoret är $200 \cdot 9 = 1800$

2: C 18 cm
Stjärnans yttre består av 12 lika långa sidor med sammanlagd omkrets 36. Varje liksidig triangel har då sidan $36/12 = 3$. Omkretsen av det skuggade området är då $6 \cdot 3 = 18$ cm.

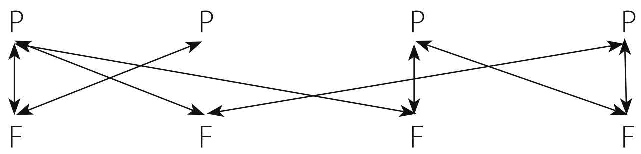
Alternativ lösning: Det skuggade området har hälften så många sidor som det större, då blir omkretsen $36/2 = 18$

3: B 20

Det finns $\dfrac{53-15}{2} + 1 = 20$ hus med udda nummer.

4: C 2
Pojkarna hade sammanlagt dansat 8 danser. Då måste även flickorna ha dansat 8 danser och den fjärde flickan svarar därför 2.
$3+2+2+1 = 2+2+2+x$

Bild över hur de har dansat:



5: D $\dfrac{1}{900}$
Arean är $\dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{25} = \dfrac{1}{900}$

Alternativ lösning: Var och en av de 9 kvadraterna delas in i 100 kvadrater av den lilla svartas storlek. Den stora kvadraten består då av 900 små svarta kvadrater.

6: B Hälften av antalet hundar
En hund och en katt ger en hundnos och fyra kattassar, dvs tassarna är fyra gånger så många som nosarna. Om vi då tar två hundar och en katt har vi två hundnosar och fyra kattassar. Dubbelt så många hundar innebär hälften så många katter.

Alternativ lösning: Anta att det finns x katter och y hundar. Då gäller att katterna har $4x$ tassar och hundarna $2y$ nosar.

Det antalet är lika, dvs $4x = 2y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{2}$ antalet katter är hälften av antal hundar.

7: A A

Den tomma rutan i översta raden kan ha märkning A eller D. Oavsett vilken av dessa två som används kommer de två rutorna längst till höger i nästa rad ha B A. Det ger för rutorna under dem i tredje raden C D och i fjärde raden B A. Den skuggade rutan får då märkning A.

Rutorna i de båda fallen:

A	B	A	C	D
D	C	D	B	A
A	B	A	C	D
D	C	D	B	A

A	B	D	C	D
D	C	A	B	A
A	B	D	C	D
D	C	A	B	A

8: D 18

Primtalsfaktorisering av $100 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Faktorisering av 100 i fyra olika heltal ger $100 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10$, summan av faktorerna blir 18.

9: C 6

Eftersom man vänder höger varannan gång, vänster varannan gång är man tillbaka efter ha passerat 6 kanter.

Konkret lösning: Om du har exempelvis ett suddgummi i form av ett rätblock kan du markera ett starthörn och följa kanterna. Två olika vägar ger båda 6 sidor.

10: C 5

Hissen tar 12 vuxna eller 20 barn, det betyder att 3 vuxna motsvaras av 5 barn. Om vi har 3 vuxna mindre får det alltså plats 5 barn. Tillsammans med 9 vuxna kan därför 5 barn åka i hissen.

11: C 45°

I en trubbvinklig triangel måste 120°-vinkeln ingå och i den spetsvinkliga triangeln 80°-vinkeln. 10°-vinkeln kan inte finnas i den spetsvinkliga för då blir denna triangel rätvinklig. Alltså är den tredje vinkeln i den spetsvinkliga triangeln $180° - 80° - 55° = 45°$.

Alternativ lösning: 120°-vinkeln och 80°-vinkeln måste vara i olika trianglar eftersom vinkelsumman i en triangel är 180°. 10°-vinkeln kan inte vara i samma triangel som 80°-vinkeln, för då blir den tredje vinkeln i denna triangel $180° - 80° - 10° = 90°$, vi får en rätvinklig triangel. Alltså är 120° och 10° i samma triangel. Den tredje vinkeln i denna triangel blir då $180° - 120° - 10° = 50°$. 55°-vinkeln är alltså i samma triangel som 80°, vilket ger denna triangels tredje vinkel $180° - 80° - 55° = 45°$.

12: B 3

$1^2 = 1$, $1^3 = 1$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, alltså tre tal.

Alternativ lösning: Gör en tabell över kvadrater och kubiker för de första heltalen:

n	n^2	n^3	samma antal siffror för n^2 och n^3?
1	1	1	Ja
2	4	8	Ja
3	9	27	Nej
4	16	64	Ja
5	25	125	Nej
6	36	216	Nej
7	49	343	Nej
8	64	512	Nej
9	81	729	Nej
10	100	1000	Nej, skillnaderna ökar dessutom …

13: A A

Vi söker minsta gemensamma nämnare till bråken $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{3}$. Den är 60 och vi får $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$, $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$ och $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$. Då finns $\frac{1}{4}$ på alternativ A.

14: D 13

Anta att mannen som står först är sanningssägare, då är den andra en lögnare, vilket ger en motsägelse. Alltså är den första mannen en lögnare. Då är den andra mannen en sanningssägare, nästa en lögnare osv. Det ger 13 lögnare i kön.

Alternativt resonemang: Varannan måste vara sanningssägare och varannan lögnare, för att de sista 24 ska kunna säga samma sak, dvs 12 lögnare och 12 sanningssägare av dessa. Det återstår att testa om den som står först är sanningssägare eller lögnare. Han ljuger, alltså finns det 13 lögnare.

15: C 54°

Eftersom triangeln PQS är likbent så är $\angle PQS = \angle PSQ = 84°$. Eftersom även triangeln PSR är likbent så ger yttervinkelsatsen att $\angle SPR = \angle SRP = 42°$. Alltså är $\angle QPR = 12° + 42° = 54°$.

16: C 64

Vi kan dela upp det i två fall, första siffran är en tvåa eller är inte en tvåa.
1) Om första siffran är två, så är även siffra på plats 3, 5, 7 och 9 en tvåa. På de andra fem platserna har vi två möjligheter, nämligen 1 eller 3, multiplikationsprincipen ger $2^5 = 32$ tal.
2) Om första siffran inte är två, så förekommer den på plats 2, 4, 6, 8 och 10. På de andra fem platserna har vi två möjligheter, nämligen 1 eller 3, multiplikationsprincipen ger $2^5 = 32$ tal.
Sammanlagt finns 64 tal som uppfyller villkoret.

17: D 92

Vi skriver upp antal enhetskvadrater som finns i de tre figurerna för att finna ett mönster:

(1) $3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 1^2 = 15 + 6 - 1 = 20 = 4 \cdot 5$
(2) $4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 2^2 = 24 + 8 - 4 = 28 = 4 \cdot 7$
(3) $5 \cdot 7 + 2 \cdot 5 - 3^2 = 35 + 10 - 9 = 36 = 4 \cdot 9$
...
(10) $12 \cdot 14 + 2 \cdot 12 - 10^2 = 168 + 24 - 100 = 92 = 4 \cdot 23$

18: A $\frac{1}{4}$

Genom att flytta om de skuggade delarna kan man inse att $\frac{1}{4}$ av kvadraten är skuggad.

Hur då? Ett förslag är att flytta de skuggade ”tårtbitarna” in i den mindre kvadraten som då blir full. Ett annat sätt är att dra diagonalerna i den stora kvadraten som hjälplinjer och sedan flytta mindre bitar.

19: C 17

Kalla de tre övriga talen för a, b och c. Rita in dem i figuren. Då gäller $1+5+a=1+a+b=5+a+c=1+5+b=a+b+c=5+b+c$. Första likheten ger $b=5$. Sista likheten ger $a=5$. Andra likheten ger $c=1$. Summan av de fem talen är 17. Alternativt, symmetriskäl ger att hörntalen är 1, 5, 5, 5, 1.

20: A 1

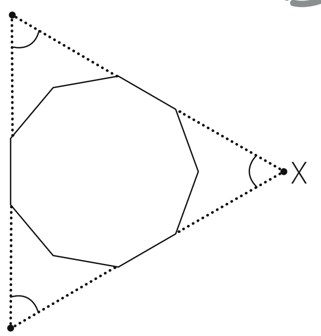
Likheten innehåller 10 olika siffror, alltså måste 0 vara med. Resultatet på vänster respektive höger sida måste vara 0 och det blir det bara om $T=0$ då T är den enda bokstav som förekommer både i vänstersidans täljare och högersidan. Nämnaren får inte innehålla en nolla, division med noll är ogiltig. Alltså kan produkten $\mathrm{T \cdot H \cdot R \cdot E \cdot E}$ endast anta ett värde.

21: D 9

Romeo kan som mest ha skrivit 9 tal, t ex följande sekvens 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5 och 10.

Alternativ lösning: Talet 7 kan bara ha en enda granne, 1, och måste därför stå i slutet av en rad. En sådan rad blir högst åtta tal lång, t ex 7, 1, 5, 10, 2, 6, 3, 9. Alla andra tal kan ha minst två grannar. Går det att göra en längre rad, där 7 inte ingår? Ja, det går att göra flera olika rader med nio tal, exempelvis 8, 4, 2, 10, 5, 1, 9, 3, 6.

22: E 60°



Grafisk lösning: Man kan förlänga fler sidor i 9-hörningen enligt figuren här intill och få en likbent triangel, vars vinklar vardera är 60°.

Vinkelsumman i en niohörning är $7 \cdot 180°$. Eftersom niohörningen är regelbunden så är varje vinkel 140°. En vinkel 140° bildar tillsammans med 220° ett helt varv. Yttervinkel till 140° är 40°. Detta ger för fyrhörningen som innehåller X att $X = 360° - 220° - 2 \cdot 40° = 60°$.

Alternativ lösning: Vinkelsumman i 9-hörningen är $(9-2) \cdot 180° = 7 \cdot 180°$. De 9 vinklarna är lika stora, $7 \cdot \frac{180°}{9} = 140°$. Figuren som bildas av 9-hörningen tillsammans med de förlängda sidorna som möter vinkeln X är en 7-hörning. Vinkelsumman i en 7-hörning är $(7-2) \cdot 180° = 5 \cdot 180° = 900°$. Sex av vinklarna i denna 7-hörning är 140°. Den återstående vinkeln X är $900° - 5 \cdot 140° = 60°$.

23: B 45

Låter vi sidan vara 45 får vi en kvadrat som innehåller $45^2 = 2025$ enhetskvadrater vilket är 16 fler än vi ska ha. Delar vi in kvadraten med sidan 45 i 2007 stycken 1×1 kvadrater och 2 stycken 3×3 kvadrater så har vi sammanlagt 2009 kvadrater vars sida har heltalslängd.

Alternativ lösning. Kvadraten kan som minst vara $\sqrt{2009}$. Men $\sqrt{2009}$ är inte ett heltal, så längden måste minst vara närmast större heltal som är 45. Är det möjligt att dela in en sådan kvadrat i 2009 mindre kvadrater? Om vi tänker oss enbart 1×1-kvadrater så blir dessa 16 för många. Om vi tar några större kvadrater så täcker vi samma area med färre kvadrater. Fyra 1×1-kvadrater som blir en 2×2-kvadrat minskar antalet kvadrater med 3, men talet 16 är inte jämnt delbart med 3. Nio 1×1-kvadrater som blir en 3×3-kvadrat minskar antalet kvadrater med 8, och här är lösningen: 2 st 3×3-kvadrater och 2007 1×1-kvadrater täcker ytan 45×45 och är 2009 st.

24: D 40 cm^2

Kvadratens area är 36 cm^2. Anta att triangelns area är x. Då gäller ekvationen $\frac{3}{5} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 36$ som ger $x = 40$ cm^2.

Arbeta vidare med Cadet för gymnasiet

Aritmetik

Användningen av de hela talen kan sägas tillhöra den innersta kärnan av matematiken. Hur man angriper ett problem kring dem är en viktig färdighet att lära sig och att utveckla. Viktiga begrepp att arbeta med här är faktor, multipel av, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisera.

Många problem behandlar grundläggande räknefärdigheter.

- Får man ett jämnt eller udda tal om man adderar två udda tal, två jämna tal, ett udda och ett jämnt tal? Vad gäller för multiplikation av två udda tal, två jämna tal, ett udda och ett jämnt tal?

Ett sätt att arbeta med taluppfattning är genom enkla bevis.

- Bevisa att alla primtal >2 är udda. Här får man träning på notation, att argumentera med matematikens hjälp och att arbeta med hela tal.
- Bevisa att produkten av två primtal >2 alltid är udda.

Delbarhet är ett annat fält som också kan undersökas med enkla bevis.

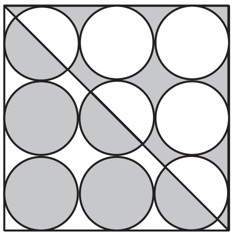
- Bevisa att alla heltal som har en nolla på slutet är delbart med 10. Detta kan tyckas vara självklart, men hur framför man sina argument med matematikens hjälp? ”Så är det ju bara!” är inte så övertygande, oavsett vilken debatt man deltar i. Begreppet motsatsbevis kan vara bra att förklara här.
- För vilka heltal gäller att talet i kvadrat är större än talet i kubik? Här gäller det att veta vad orden kvadrat och kubik innebär, samt att ha kunskap om vad som händer med negativa tal när de multipliceras med varandra.
- Problem 8 handlar om faktorisering av talet 100. På hur många olika sätt kan man faktorisera talet 100?
- Problem 20 i tävlingen innehåller multiplikation med noll. För denna uppgift kan det vara viktigt att gemensamt diskutera lösningen. Måste noll vara med bland talen? Varför kan inte O stå för nollan?

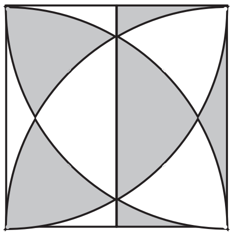
Bråk

- Hur definieras ett bråk? Vilken betydelse har täljaren respektive nämnaren? Jämför procent och bråk. Repetera räkneoperationer med bråk.
- Lös ekvationer med okänd i nämnaren: $\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$ och liknande enkla ekvationer. Kan man visualisera dessa ekvationer för bättre förståelse?
- Problem 13 erbjuder många möjligheter att arbeta vidare: hur stort är avståndet mellan varje streck i figuren? Vilka bråk motsvarar de andra alternativen? Var skulle $\frac{2}{5}$ ligga i förhållande till $\frac{1}{5}$ och $\frac{1}{3}$?

Geometri

I geometriska problem är det viktigt att arbeta med lösningen och tydligt motivera tankegången. Rita gärna tydliga figurer. En fråga som ofta dyker upp i kängurusammanhang är ”Hur stor del av figuren utgör det skuggade området?”. Lösningarna kan vara av två slag eller en kombination av dessa två. Den ena löser man genom att flytta delområden som är svåra att beräkna arean på så att de bildar ett större område som lättare går att beräkna.



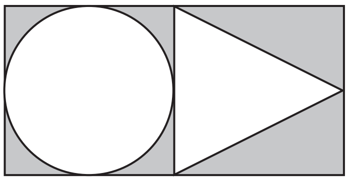


– Hur stor del av kvadraten utgör det skuggade området?

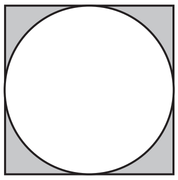
Här blir det uppenbart vilken lösningsmetod om passar bäst. Kan eleverna konstruera egna problemfigurer av detta slag?

Den andra typen av lösning är beräkning av areor av kända former såsom cirkeln, rektangeln etc. Här måste man avgöra vilka beräkningsbara delar området består av.

– Om kvadratens omkrets är 36, hur lång är då omkretsen på det skuggade området i den högra figuren ovan?



– Hur stor är det skuggade områdets area? Triangelns bas och höjd är lika stora.



– Hur stor är omkretsen av det skuggade området? Mindre än cirkelns och kvadratens sammanlagda omkretser? Större än ...? Samma som ...?

Vissa känguruproblem handlar om att betrakta tredimensionella figurer. Finns det laborativt material att tillgå på er skola? Kanske rentav en matematikverkstad? Låt elever laborera med grundläggande geometriska former som kuber, rätblock, klot, kon etc. Be dem dokumentera sina laborationer genom att skissa det de arbetar med, en träning i att gå mellan verklighet och papper.

Utveckling och följdrågor till geometriproblem i Cadet för gymnasiet:

2: Vad kallas den skuggade figuren? Vilka olika figurer kan du finna i figuren? Vilka figurer kan du skapa av de 12 trianglarna om alla ska användas? Vilka areor och omkretser har dessa?

5: Hur stora är de olika kvadraterna? Hur många olika sorters kvadrater finns det? Diskutera area och omkrets för varje ingående kvadrat. Detta kan att kopplas till en diskussion om längdskala – areaskala.

9: Gör en representation av vägen. Med vilken regel för vägval kommer man snabbast tillbaka? Se Junior 16 för en liknande uppgift att arbeta med.

11: När bildar tre sträckor en triangel? Hur kan man konstruera de båda trianglarna i uppgiften? Man kan få många olika storlekar vilket kan leda till diskussion om likformighet.

15: Här är det extra viktigt att gå igenom lösningen för att erbjuda träning på att motivera sin lösningen. Vilka argument använder du dig av?

17: Försök att bygga upp en formel med utgångspunkt i det geometriska mönstret?

18: Definiera de olika ingående figurerna. Hur stora är vinklarna i de skuggade cirkelsektorerna?

22: Behandla regelbundna månghörningar. Vad är deras vinkelsummor? Generalisera *n*-hörningens vinkelsumma.

24: Avbilda problemet. Hur kan triangeln och kvadraten vara placerade i de båda fallen?

Mönster och logik

En svårighet i problemlösning är att överföra en given problemtext till ett sammanhang som eleverna kan hantera med sina kunskaper. Kan de också gå åt andra hållet? Kan eleverna konstruera ett problem till en bestämd lösning, som ”Sonja har hälsat på 12 personer på festen”?

I uppgift 7 ska ett rutnät fyllas med bokstäver. Ett sätt att hitta möjliga bokstäver för den sökta rutan är att fylla i rutnätet. Ett annat sätt är att resonera om antal möjligheter det finns för rutorna. Vilka rutor kan bara fyllas med en bestämd bokstav? I vilka rutor finns det flera möjligheter? På hur många olika sätt kan man fylla rutnätet? Junior 17 är ett liknande problem.

Problem 16 kan följas upp med: Vilka siffror kan stå bredvid varandra? Måste det 10-siffriga talet bestå av alla tre siffror? Vad menas med *multiplikationsprincipen*? Hur många av talen består av bara två siffror? Hur många 10-siffriga tal blir det om siffrorna 0, 1 och 2 används med samma frågeställning?