Svar och lösningar

1: D 200 · 9
Alla de andra är udda. Undersök kombinationerna i multiplikationstabellen med avseende på jämna och udda tal. Hur kan man veta om resultatet av en multiplikation blir ett jämnt eller udda tal? Vilket grundläggande samband är det ett resultat av?

2: B I cirkeln och kvadraten, men inte i triangeln.
Här handlar det dels om att benämna de tre geometriska formerna och att kunna se att kängurun är i både cirkeln och kvadraten.

3: A I den vita asken.
Kolan ligger i den röda asken så chokladbiten måste ligga i den vita. Problemet kan lösas konkret och med en enkel bild.

4: C 3
Det finns flera sätt att få ett palindromtal, men alla kräver att vi tar bort åtminstone tre siffror: Vi kan få 12321, 13331, 13231.

5: D 8
Lös uppgiften konkret med klotsar eller markörer av något slag och gör en tabell över hur antalet ökar. Resonera om att det från början är 16 pojkar fler och att flickorna närmar sig pojkarnas antal med 2 i veckan, alltså tar det 8 veckor tills de blir lika många.

6: D 240 m
Halva brons längd ligger på flodens stränder. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$. 120 m är hälften av den totala längden som är 240 m.

7: C 46 dm
Om plattorna ligger kant mot kant är det lika långt mellan två mittpunkter som från kant till kant på en platta. Alltså 5 plattlängder och 4 plattbredder. Varför bara 4 bredder? $5 \cdot 6$ dm + $4 \cdot 4$ dm = 46 dm. Jämför med $10 \cdot 3$ dm + $8 \cdot 2$ dm.

8: E 65 cm^2
Den vita rektangeln, överlappningen, 80 cm^2 – 37 cm^2 = 43 cm^2.
108 cm^2 – 43 cm^2 = 65 cm^2.

9: D 6 cm
Figurernas omkrets är 36 cm. Triangelns sida är därför $\frac{36}{3}\text{cm} = 12\text{cm}$.
Rektangelns långsida är också 12 cm och därmed är kortsidan 6 cm.
12 cm + 6 cm = 18 cm, $2 \cdot 18$ cm = 36 cm.

10: B Katterna är hälften så många som hundarna.
Gör en tabell över ett antal katt-tassar och motsvarande hund nosar och se efter hur många katter respektive hundar det motsvarar. T ex så här:

katt-tassar	katter	hundnosar	hundar
4	1	2	2
8	2	4	4
12	3	6	6
16	4	8	8

Man kan också resonera sig fram: Eftersom en katt har fyra gånger så många tassar som hunden har nos så hade katterna varit lika många om antalet tassar varit fyra gånger så stort som antalet nosar. Nu är antalet tassar bara dubbelt så stort, dvs hälften så mycket. Problemet kan ge upphov till diskussion kring hur mycket hälften av hälften är etc.

11: D David
Tillsammans har de fyra pojkarna $1+2+3+4=10$ ”platspoäng”. Det är alltså Carlo som blev nummer 4, eftersom de andra tre tillsammans får 6. Då $4+2=6$ är det Boris som blev tvåa. Boris var bättre än Anders, så det kan inte vara Anders som vann. Det måste vara David.

12: C 6
Vi kan jämföra summorna i raderna och kolumnerna:

■ + □ + ■ = 11

■ + △ + ■ = 9 Alltså är □ 2 mer än △.

□ + □ + ■ = 10

□ + ■ + ■ = 11 Alltså är ■ 1 mer än □

Om vi byter ut □ i första raden får vi tre ■ =12, alltså är ■ =4

Sen kan vi lösa ut de andra figurerna: □=3, △ = 1. $4+3-1=6$

Ersätt figurerna med bokstäver: x, y och z och skriv ner samband, t ex:
$x+y+x=11$ och
$x+y+y=10$ innebär att $y=x-1$

$x+y+x=11$ och
$x+z+x=9$ innebär att $z=y-2$

Problemet lämpar sig bra för att låta eleverna bekanta sig med lösningar av ekvationssystem.

13: C 48 cm²

Det vita området består av fyra småkvadrater om vardera 4 cm², dvs 16 cm², och en stor kvadrat med sidan 6 cm, dvs 36 cm². Den stora vita kvadraten får man genom att tänka sig en förflyttning av de fyra likbenta trianglarna så att de möts i en gemensam mittpunkt. Detta kan förstås utföras konkret.
$16\,\text{cm}^2 + 36\,\text{cm}^2 = 52\,\text{cm}^2$. $100\,\text{cm}^2 - 52\,\text{cm}^2 = 48\,\text{cm}^2$.

14: C 45

Den största kub vi kan använda har sidan 10 cm, eftersom det är den största gemensamma faktorn i 30 och 50. Använder vi sådana kuber behöver vi $3 \times 3 \times 5$ st.
Gör en bild eller illustrera konkret.
Vi kan förstås använda kuber med sidan 5 och 1 cm också, men då går det åt flera.

15: C 48 cm²

Fyrhörningen kan delas i två rätvinkliga trianglar *ADB* och *DBC*.

Triangeln *ADB* har arean $\frac{11 \cdot 3}{2}$ cm² och triangeln *DBC* har arean $\frac{9 \cdot 7}{2}$ cm²,

tillsammans $31{,}5\,\text{cm}^2 + 16{,}5\,\text{cm}^2 = 48\,\text{cm}^2$.

16: D Kort nummer 2 ligger i ask B

Den totala summan på korten är 36, så summan i en ask ska vara 18. För att få summan 18 med tre kort kan vi inte använda korten 1 eller 2. Om vi tar kort 7 och kort 8 måste det tredje kortet vara 3, alltså ligger kort 2 i alla tänkbara fall i ask B.
Det finns olika sätt att få summan 18: $8 + 7 + 3$; $7 + 6 + 5$; $8 + 6 + 4$.
Undersök de andra alternativen också, inget av dem gäller *alltid*.

17: A A

I rutan mellan B och C i övre raden kan vi antingen skriva D eller A. Oavsett vad vi väljer kommer vi att få A i den markerade rutan.

18: A 5

Här finns det flera strategier att använda.
Resonera: Vi vet att det blir en 45 och en 36 över. Vi vet alltså att alla skostorlekar ligger inom detta intervall. För att få så få personer som möjligt utgår vi från att så många som möjligt att två storlekars skillnad, $36 + 38$, $38 + 40$, $40 + 42$, $42 + 44$ och $44 + 45$ eller: $45 + 43$, $43 + 42$, $41 + 39$, $39 + 37$ och $37 + 36$. Åtminstone en person har bara ett nummers skillnad (eftersom vi får över ett jämnt och ett udda nummer). Vi klarar att para ihop detta med 5 personer, vilket är det minsta alternativet.

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
36	37	38	39	40	41	42	43	44	*45*

19: C 17

För att summan av de tre talen på varje sidan ska bli densamma, måste talen vid hörnen runt mitten av kroppen vara desamma, dvs 5 och talen i topp- och bottenspetsen desamma, dvs 1. Pröva att sätta in andra tal – det går inte, vilket kan bli uppenbart om man provar.

20: D 20

Ifylld kommer tabellen se ut så här:

12	8
20	4
24	16
40	8
48	32
80	16
96	64

I tabellen framträder ett mönster med dubbleringar och halveringar.
Vad beror dessa på? Kalla de första talen *a* respetive *b*.

a	b
$a+b$	$a-b$
$(a+b)+(a-b)=2a$	$(a+b)-(a-b)=2b$
etc	

Sådana här överblickbara och lätt kontrollerbara samband är bra att använda som utgångspunkt för att visa styrkan i att använda generella uttryck.

21: C 3

2009 kan skrivas som $7 \cdot 7 \cdot 41$ vilket gör att de enda möjliga rektanglarna, dvs multiplikationer med två heltalsfaktorer, är $1 \cdot 2009$ (och $2009 \cdot 1$); $7 \cdot 287$ ($287 \cdot 7$) och $49 \cdot 41$ ($41 \cdot 49$), dvs 3 st. Alternativet 6 finns inte med, vi betraktar $1 \cdot 2009$ som samma rektangel som $2009 \cdot 1$.

För att finna dessa faktorer kan man resonera, pröva sig fram och använda uteslutningsmetoden.
2009 är inte delbart med 2, 3, 4, 5 eller 6. Det kan vi relativt enkelt konstatera. Det första tal vi behöver prova med är 7, och 7 är en faktor som ger 287 som den andra faktorn. Vi behöver då bara undersöka 287, där vi med samma resonemang kan utesluta 2, 3, 4, 5, och 6, så att 7 är det första vi behöver prova. 7 går fint och ger 41 som faktor. Nu har vi tre primtal och saken är klar.

Arbeta vidare med Benjamin

Vi hoppas att arbetet med lösningarna har givit upphov till många bra diskussioner och också intressanta frågor. Kanske har ni tillsammans utvecklat frågeställningarna och gått vidare med liknande problem.

Vi har i detta dokument samlat några förslag på hur man kan arbeta vidare med problemen. Dela också gärna med dig av era egna idéer, som du kan skicka till kanguru@ncm.gu.se eller på papper till Kängurun, NCM Göteborgs universitet, Box 160, 40530 Göteborg.

I samband med det gemensamma arbetet kan det vara lämpligt att uppmärksamma terminologin och passa på att lyfta fram vad de olika termerna innebär. Låt också eleverna själva få definiera olika begrepp. För definitioner hänvisar vi till den nyutkomna *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Många problem återkommer i olika skepnader år från år. Bland de gamla problemen finns också förslag till hur de kan utvecklas. Alla gamla problem och dessa förslag finns tillgängliga på Kängurusidan på ncm.gu.se och är helt fria att använda.

Tal

Några problem handlar om grundläggande talkunskaper, B 1, B 10, B 11, B 16.

Udda och jämna tal

B 1 behandlar udda och jämna tal. Betona att jämna tal är multiplar av 2. Vad får det för konsekvenser om ett tal är udda eller jämnt? Denna bakgrund kan man bygga vidare på för att utveckla elevernas förståelse för vilka entalssiffror som blir resultatet av olika multiplikationer. Sådan talkunskap är värdefull t ex när man ska pröva tals delbarhet.

Hälften och dubbelt

Problem 10 aktualiserar dubblering och halvering. Att dubblera och ta hälften har barn i den här åldern oftast inga problem med. Däremot kan språkliga formuleringar med ”hälften så många” uppfattas som problematiska och svåra att hantera om det är okänt vad det är hälften av. Ex: Kalle har sparat hälften så mycket som Siv och tillsammans har de sparat ihop 474 kr. Hur mycket har Kalle sparat? Siv? Låt eleverna själva formulera liknande problem, då ser de hur delarna förhåller sig till helheten. Variera också med andra delar, tredjedelar, fjärdedelar etc, så att det blir tydligt hur relationen ser ut. Illustrera konkret.

Successiv dubblering användes i gamla algoritmer för multiplikation, t ex i det som kallas egyptisk multiplikation och i den ryske bondens metod. Exempel $23 \cdot 64$

$$\begin{array}{rcrl}
1 \cdot 64 & = & 64 & \\
2 \cdot 64 & = & 128 & \\
4 \cdot 64 & = & 256 & \\
8 \cdot 64 & = & 512 & \\
16 \cdot 64 & = & 1024 & \qquad 23 = 16 + 4 + 2 + 1, \text{ så } 23 \cdot 64 = 1024 + 256 + 128 + 64 = 1472
\end{array}$$

Låt eleverna använda denna metod för att utföra multiplikationer.

Börja på 1 och dubblera successivt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ..... Den talföljden kommer eleverna att möta många gånger. Låt eleverna skriva talen som produkter av 2, och diskutera hur skrivsättet skulle kunna förenklas. Det kan vara ett lämpligt sammanhang för att introducera potensskrivning. Inte för att eleverna nu måste kunna det, utan för att de i ett sammanhang som de är engagerad i ser användningen. Nästa gång de ser det skrivsättet kanske de känner igen det. Det är bra att få möta procedurer, konventioner och begrepp innan man måste kunna dem.

Börja på 1 och halvera successivt $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ Jämför dubbleringen och halveringen.

Vad skulle vi få om vi adderade alla dessa delar: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$?

Okända tal

Att förbereda arbetet med ekvationslösning genom att ersätta tal med rutor eller figurer förekommer redan i de första skolåren. Det kan vi fortsätta med och göra parallellt med att använda bokstäver så att eleverna uppmärksammas på att det inte är bokstaven i sig som är det väsentliga. Många elever blir rädda så fort de ser ett x, men har inga problem med en ruta. Utgå från enkla ekvationssystem och ersätt inledningsvis bokstäverna med figurer och presentera dem på motsvarande sätt som i problem 12. Lägg sedan till några koefficienter. Ersätt sedan figurerna med bokstäver och presentera uttrycken så som vi vanligen skriver ett ekvationssystem.

I det här problemet finns det tre obekanta och fyra olika ekvationer, men det hade räckt med tre ekvationer. Pröva att ta bort någon av ekvationerna och lös problemet.

B 19 handlar också om att hitta ett okänt tal. Kalla de okända hörnen för a, b och c och lös ekvationssystemet.

Faktorisering, primtal

Problem 21 handlar om hur talet 2009 kan faktoriseras. Låt eleverna systematiskt faktorisera talen upp till t ex 150. Vilka faktorer behöver man pröva? Varför är det ingen idé att pröva med 2 om entalssiffran är 3? Med 5 om entalssiffran är 4 eller 7? Hur stora faktorer behöver man pröva? Varför räcker det med upp till 6 om talet är 35? Diskutera gemensamt efteråt vilka slutsatser man kan dra. Vad är det för speciellt med primtalen? Presentera Erathostenes såll för eleverna.

Undersök och diskutera några av de vanliga delbarhetsreglerna, t ex delbarhet med 2, 3, 4, 5, 9, och 10, 100, 1000.

Tals uppdelning

Problem B 11 och B 16 leder in på diskussioner om heltals uppdelning. B 11 handlar om att dela upp talet 6 som en summa av tre olika tal och talet 10 som en summa av $1+2+3+4$. Vilka tal kan vi dela upp på detta sätt? Undersök *triangeltalen*, de är grundläggande och eleverna kommer att möta dem i olika sammanhang framöver. I problem B 16 är det summan $1+2+3+4+5+6+7+8$ som vi arbetar med. Se också E 8.

Arbeta med att skriva tal som summor av olika ensiffriga tal, som summor av tre olika ensiffriga tal. Vilket är det största tal vi kan skriva som en summa av tre ensiffriga tal?

Mönster i talserier

I problem 20 ser vi ett intressant mönster. Att se efter mönster i talserier är ett lekfullt sätt att utveckla god taluppfattning.

Presentera talserier, t ex: 1, 2, 4, 7, 11 ... ; 0, 3, 8, 15, 24 ....; 1, 1, 2, 1, 3, 2, 5, 3, 8 ... Kan det finnas olika möjliga fortsättningar? Olika sätt att se som ger samma resultat? Låt eleverna göra egna serier att utmana varandra med. Be dem att själva skriva ner seriens regler innan de lämnar över till kamraten.

Venndiagram

Med utgångspunkt från problem 2 kan Venndiagram presenteras. Sådana arbetade man med under den tid som mängdläran hade en framskjuten roll inom matematikundervisningen, men Venndiagram är användbara och borde kunna användas mer för att t ex illustrera relationer inom och mellan olika mängder.

Undersök talen upp till ca 30 och sortera dem i kategorier: udda tal, tal delbara med 3 och tal delbara med 7. Gör tre ringar, med blyertspenna eller med snöre och märk dem med dessa egenskaper. Placera ut talen på rätt plats. Hur ska ringarna överlappa varandra? Eventuellt kommer man att få rita om sin bild eller flytta sina snören. Var ska man placera 14? 6? 21? Se också *Uppslaget* i Nämnaren 3, 2002.

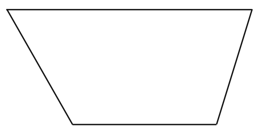
Geometri

Några grundläggande samband

Vi behöver ha vissa grundläggande faktakunskaper, t ex att en rektangel är en fyrhörning där alla vinklar är räta, och alltså motstående sidor parallella (vilket också innebär att en kvadrat är en rektangel). För att eleverna ska lära sig att urskilja det som är väsentligt bör vi tänka på att orientera figuren åt olika håll. En kvadrat kan stå på ett hörn, det förändrar inte vinklarnas storlek eller sidornas längder. En triangel måste inte stå på sin bas och en trubbvinklig triangel kan ha en höjd som ligger utanför figuren.

Undersök figuren i B 13 och hitta och namnge olika geometriska former. Beroende på hur områdena delas kan vi finna olika former, försök att hitta så många som möjligt. Hur kan vi fastställa att ett område är av en viss form, t ex en kvadrat, utan att mäta.

Låt eleverna arbeta med att definiera andra geometriska figurer de känner till. Uppmuntra dem att vara så precisa och utförliga som möjligt. Ställ frågor som hjälper eleverna att se de avgörande skillnaderna och likheterna mellan olika former, t ex varför är inte detta en rektangel?



För definitioner hänvisar vi till den nyutkomna *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

B 6 och B 7 rör mätning av sträckor. Ett liknande problem som B 7 fanns 2007, B 16. Centralt i dessa är mittpunkten.

Som vanligt handlar några problem om enkla formers area och omkrets B 8, B 9, B 13 och B 15. Ge eleverna en given omkrets och låt dem konstruera en figur med så stor och en med så liten area som möjligt. Gör motsvarande undersökning med en given area.

Grundläggande konstruktioner,

Triangelns area, som hälften av en rektangel, är en del av lösningen i B 15. Den kan undersökas på geobräde. Då kan formen på triangeln lätt varieras när den grundläggande relationen gjorts trolig. Låt eleverna skapa egna trianglar och sedan försöka beräkna arean. Be dem att motivera lösningen med andra argument än att ”det ser man”.

Två- och tredimensionella konstruktioner

Att kunna uppfatta de tre dimensionerna i en tvådimensionell bild, som i B 19, är förvånansvärt svårt för många elever. Det är en förmåga som måste bygga på konkreta erfarenheter och utvecklas med hjälp av samtal och att eleverna uppmärksammas på hur djupet vi kan se i verkligheten överförs till platta bilder. B 9 handlar om en tvådimensionell figur, som kallas ett torn. Vanligtvis är ett torn tredimensionellt. Hur skulle ett sådant torn kunna se ut? Diskutera kanter, sidoytor, antal hörn och beräkna byggets volym.

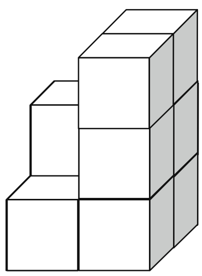
Att kunna bedöma hur många klossar som finns i ett bygge, B 14, är en viktig grund för volymbegreppet. Hjälp eleverna att utveckla påbyggbara strategier för att beräkna antalet, så att de systematiserar sina beräkningar radvis och kolumnvis. Att räkna antalet på ett ostrukturerat vis leder inte till förståelse för de grundläggande formlerna för area och volym. Den måste bygga på konkret erfarenhet av att systematiskt räkna antalet.

Låt eleverna bygga olika kroppar med kuber och rita dem från olika håll. Prata om vad man ser och hur det ser ut. En modell som kan användas är att bygga med multilink, olikfärgade kuber, och sen rita bygget från fyra håll: framifrån, bakifrån, från vänster och från höger. Varje bygge beskrivs alltså av fyra ritningar. Eleverna kan arbeta i par och sen byta ritningar med ett par kamrater, som får i uppgift att bygga efter ritningarna.

Att rita tredimensionellt är inte lätt och eleverna behöver få ledning och stöd för det. Använd gärna ett isometriskt prickpapper, som finns att hämta på ncm.gu.se/node/2281

Låt eleverna rita av något i omgivningen från ett annat perspektiv än de kan se, t ex huset ovanifrån. Använd tidningsbilder och låt dem rita motivet så som det skulle sett ut från ett annat håll. (Se Nämnaren 2, 1996. *Matematiken i bilden eller bilden i matematiken*).

Problem med klossbyggen har funnits i Kängurun varje år, i flera olika klasser. I årets omgång kan E 4 och S 9 vara intressanta att arbeta vidare med. I Milou finns också ett problem kring klossbygge. Det handlar om att tolka en speciell sorts ritning:



2	3
1	3

Problemlösningstrategier

Gör en bild och systematisera

Problem 3 löser man lättare med en enkel skiss över de tre askarna. Liknande problem har varit med många gånger, och de har ofta relativt hög lösningsprocent. Kanske beror det på att eleverna systematiserar sin lösning. Här handlar det också om att verkligen läsa och förstå informationen i uppgiften, och för många är det nödvändigt att organisera denna information på ett överskådligt sätt. Det blir för mycket att hålla i huvudet. En del elever har stora svårigheter med läsningen och de kan behöva arbeta extra mycket med den här typen av uppgifter, och få stöd för hur de ska hantera informationen. Arbeta gärna gemensamt med liknande problem och diskutera allteftersom hur informationen som ges ska hanteras.

För att lösa B5 kan flera olika strategier komma till användning: t ex göra en tabell, föra resonemang, sätta upp en ekvation. Genom att lösa problem på olika sätt och jämföra resultatet kan eleverna få djupare förståelse. Ekvationens tal och symboler kan återfinnas i tabellen, och det resonemang man för kan ses i tabellen och i symbolerna. Lyft fram dessa samband så att det blir tydligt att det inte är olika lösningar utan olika sätt att genomföra och beskriva lösningen.

B10 aktualiserar frågor om proportionalitet, relationen mellan tassar och nosar är densamma hela tiden. Vilket skulle förhållandet mellan katt-tassar och hundnosar vara om de andra alternativen vore korrekta? Ett liknande problem, men med en annan frågeställning är E14, som är en variant av det klassiska problemet med höns och får.

B17, B18 och B19 handlar alla om logiska resonemang. I B17 behöver man inte fylla i alla rutor för att komma fram till ett svar. Hur kan man resonera? En något svårare variant är J7.

I B19 kan man prova att flytta ettan till ett annat hörn. Byt plats på ettan och femman. Undersök under vilka förutsättningar som problemet är lösbart. Undersök en oktaeder på motsvarande sätt.

Litteratur

Hagland, K. (2007). Rita en bild. I *Nämnaren* 34(3), s 27–31.
Kiselmn, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* NCM, Göteborgs universitet.
McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal.* NCM, Göteborgs universitet.
Nämnarenartiklar publicerade 1990–2006 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade.
Alla tidigare Känguruproblem finns på *Kängurusidan*: ncm.gu.se/kanguru