Svar och arbeta vidare med Student 2008

Det finns många intressanta idéer i årets Känguruaktiviteter. Problemen kan inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag att arbeta vidare med.

Känguruproblemen kan lösas av alla elever t ex genom att laborera eller genom att rita och resonera, genom att ställa upp uttryck och ekvationer. Elever kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt, komma fram till olika lösningar, sedan jämföra och se vilken de finner enklast eller mest spännande eller vad de behöver lära sig för att lösa problemen. De kan formulera egna liknande problem, varianter eller exempel med anknytning till frågeställningar som kommer upp. Att jämföra olika uppgifter och göra kopplingar till erfarenheter i eller utanför skolan breddar och fördjupar upplevelser och lärande. Att se likheter mellan olika problem, att se det som är gemensamt och generellt är en särskilt väsentlig del av matematiken. Prova problem för tidigare åldrar. Flera av exemplen har anknytning till uppgifter som varit med i tidigare omgångar. Vi ger förslag på några sådana, men det finns fler och även möjligheter att gå vidare till andra Känguruklassers problemsamlingar och tidigare förslag att arbeta vidare.

Alla tidigare problem, sedan starten i Sverige, med svar och förslag att arbeta vidare, finns att hämta på ncm.gu.se

Det finns naturligtvis mycket annat att göra – än det vi tar upp. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 b Summan av 3 och 4 blir varken 5, 10 eller 9. Alltså står de två talen inte i samma rad eller samma kolumn. Då måste de två okända talen vara 2 och 6.

På hur många olika sätt kan talen skrivas in? Jämför även GyCadet 2008, 2.

Liknande problem är GyCadet 2005, 12; 2006, 2, Junior 2005, 11.

2 e Eftersom de sju korten är numrerade från 1 till 7 finns det tre kort med jämna tal och fyra kort med udda tal. Sofia har tagit upp de tre korten med jämna tal (2 + 4 + 6 = 12)

Ta upp begreppen udda och jämna tal. Vad gäller för addition och multiplikation av (i) udda tal, (ii) jämna tal, (iii) jämna och udda tal. Be eleverna bevisa sina påståenden.
Hur hade problemet ändrats om vi stället haft kort som varit numrerade från 2 till 8?

Liknande problem GyCadet 2004, 10; 2006, 7, Junior 2005, 5; 19.

3 b Efter strykningen får vi 11 rader och 11 kolumner kvar, alltså 121 rutor.

Ändra förutsättningar, t ex stryk alla kolumner vars nummer inte är delbara med 3 och alla rader vars nummer är jämnt.

Liknande problem är Cadet 2002, 6, Student 2007, 9.

4 c $y = -x$ ger $\dfrac{x^{2008}}{y^{2008}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2008} = \left(\dfrac{x}{-x}\right)^{2008} = (-1)^{2008} = 1$

Diskutera potenslagarna. Hur ska problemet ändras för att få de andra svarsalternativen?

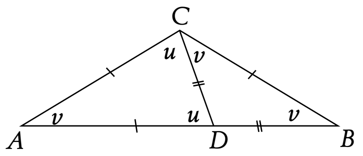
Liknande problem se Junior 2007, 13; 2007:21, Student 2006, 8; 2007, 16.

5 d $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$

Hur stor del av det ursprungliga vattenflödet passerar i de andra två grenarna?
Ändra förhållandena på vattenmängden.

Liknande problem GyCadet 2007, 15.

6 d Vi markerar det som är känt.
Triangel ABC ger $3v + u = 180°$.
Triangel ADC ger $2u + v = 180°$
$u = 72°$ och $v = 36°$
Den sökta vinkeln är 108°



Bestäm exakt förhållandet mellan AC och BD. Vad kan man säga om ΔABC och Δ BDC? Bestäm exakt förhållandet mellan arean av triangel ACD och triangel BCD. Se även GyCadet 16, Junior 17.
Liknade problem GyCadet 2005, 13 och 16, Junior 2004, 5; 2005, 12.

7 b Alla primtal är udda förutom talet 2. Alla potenser av udda tal är udda.
När ett adderas får man alltså ett jämnt tal. För talet 2 gäller att $2^4 + 1 = 17$.

Diskutera vad som menas med ett primtal.
Låt eleverna försöka utveckla olika metoder för att avgöra om ett givet tal är ett primtal.
Tidigare problem där primtal har varit involverade är GyCadet 2005, 24, Junior 2004, 19; 2007, 23, Student 2005, 19; 2006, 11 och 14.

8 a Varje skuggat område kan delas i två halva sexhörningar.
Alltså är hälften av parallellogrammen skuggad.

Be eleverna redogöra för en regelbundens sexhörnings egenskaper. Dela in sexhörningen i sex kongruenta trianglar. Låt eleverna visa att man kan dela in det skuggade området i trianglar som är kongruenta med sexhörningens. Visa att de skuggade områdena exakt motsvarar de två sexhörningarna genom argument och beräkningar. Diskutera regelbundna månghörningar.

9 e Summan av de sju talen är −17. För att få ett tal delbart med 3 måste man subtrahera ett av de sju talen. Det enda tal som fungerar är −5, då får vi summan − 12.

Diskutera med eleverna olika lösningsmodeller.
Vilka summor kan man få om man parar ihop talen två och två?
Utgå från de olika svarsalternativen och välj sju tal som passar för varje alternativ.

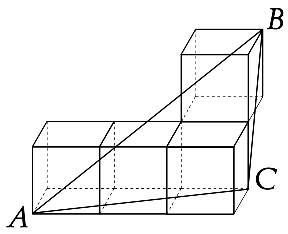
10 c Cirkelns diameter har längden 10. Då är radien 5 och medelpunkten M har koordinaterna (3, 0). MP är en radie och Pythagoras sats ger att $p^2 + 3^2 = 5^2$ med lösning $p = 4$.

Hur kan man beskriva en cirkel i planet med en ekvation?
Förskjut cirkeln i x-led, y-led. Hur ändras ekvationen?
Jämför och värdera olika lösningsmetoder, t ex med hjälp av likformighet,
Pythagoras sats eller cirkelns ekvation.
Liknande problem Student 2004, 13.

11 e $2 + 8 = 10$. Då kan summan av de två okända siffrorna vara
2 som ger 02, 20, 11
5 som ger 05, 50, 14, 41, 23, 32
8 som ger 08, 80, 17, 71, 26, 62, 35, 53, 44
11 som ger 29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65
14 som ger 59, 95, 68, 86, 77
17 som ger 89, 98
Sammanlagt 33 möjligheter.

Vad vet man om ett heltal som är delbart med 3? $10 = 3 \cdot 3 + 1$. Siffersumman av de två siffror som Nora kompletterar med måste då ha egenskapen $3 \cdot k + 2$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Diskutera det med eleverna. Introducera olika delbarhetsregler och arbeta med hur dessa skulle kunna härledas.

12 a Rymddiagonalen är $\sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

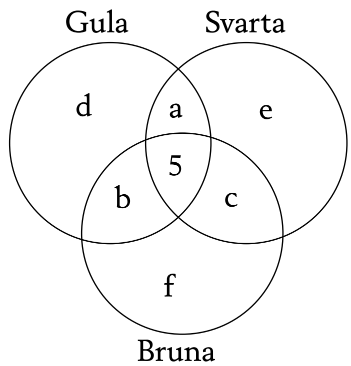


Genom att dra lämpliga sträckor eller lägga till enhetskuber kan vinklar bestämmas.
Vilken vinkel bildar sträckan AB med AC?
Vilken area har triangeln ABC?
Liknande problem Student 2006, 22.

13d Bills poäng är $10 + x + 18$. I poängsumman 10 måste det större talet vara minst 6 och i poängsumman 18 måste det minsta talet vara högst 8. Det innebär att $x = 7$ och Bills poäng blir 35.

Be eleverna förklara hur de löser problemet.
Hur skulle man kunna ändra på de givna poängtalen i uppgiftstexten så att de andra svarsalternativen blev korrekta?
Liknande problem Student 2005, 13, 2006:16, Junior 2004, 16; 2007, 19, Benjamin 2004, 19.

14 b Vi ritar ett Venndiagram som åskådliggör färgfördelningen.
a antal känguru som är gula och svarta
b antal känguru som är gula och bruna
c antal känguru som är bruna och svarta
d antal rent gula känguru
e antal rent svarta känguru
f antal rent bruna känguru



Då gäller
$a + b + d = 25 - 5 = 20$
$b + c + f = 28 - 5 = 23$
$a + c + e = 20 - 5 = 15$
Ledvis addition ger
$2a + 2b + 2c + d + e + f = 58$
Vi vet också att $a + b + c + d + e + f = 36 - 5 = 31$
Ledvis subtraktion ger
$a + b + c = 27$
Antalet enfärgade känguru är $d + e + f = 4$

Gå igenom Venndiagram. Ta även upp begreppen union och snitt.
Introducera mängdlogisk notation och visa hur argumentation kan skrivas med hjälp av denna.
Liknande problem Ecolier2004, 7, GyCadet 2005, 10; 2006, 11.

15 c $\frac{p}{q} = \frac{q+1}{q} = 1 + \frac{1}{q}$, $p<0$ och $q<-1$

Då är $-1< \frac{1}{q} <0$ och bråket är ett positivt tal mindre än 1.

Diskutera de felaktiga svarsalternativen.
Hur kan man avgöra vilka som direkt kan förkastas?
Liknande problem Student 2005, 1; 2006, 19, Junior 2006, 10 och 20.

16 a Förbind cirklarnas medelpunkter med varandra, då får vi en liksidig triangel med sidan $2r$.

Dess area är $\frac{2r \cdot 2r \cdot sin60^0}{2} = \sqrt{3r^2}$. De tre cirkelsektorerna som bildas har vardera arean $\frac{\pi r^2}{6}$.

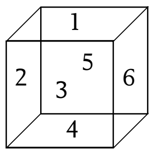
Arean för det skuggade området är $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) r^2$

Vilken omkrets har det skuggade området? Jämför även Junior 18.
Arbeta med motsvarande uppgift för fyra cirklar och fler. Kan man se något mönster?
Liknande problem GyCadet 2004, 14, Junior 2004, 24, Student 2004, 20; 2006, 15; 2007, 19.

17 a $(x^2yz^3) \cdot (xy^2) = (xyz)^3$
$(x^2yz^3) \cdot (xy^2) = 7^3 \cdot 7^9 = 7^{12}$
$xyz = 7^4$

Repetera potenslagarna. Bestäm t ex y/z, xz^2.
Liknande problem Junior 2007, 13; 2007, 21, Student 2004, 18; 2006, 8; 2007, 16.

18 b Betrakta sidan med tre ögon. Motstående sida måste ha fem ögon. Mot sidan med sex ögon måste då stå sidan med två ögon. Det ger följande ögonsumma $2 + 2 + 6 + 1 + 4 + 5 = 20$



Låt eleverna konstruera tärningarna, vilka ögonsidor står mot varandra.
För mer tärningsproblem se Student 2005, 12; 2007, 1.

19 c Kantlängderna är a, $2a$ och $4a$. Volymen blir $8a^3$. $216 = 8 \cdot 3^3$.

Repetera geometrisk talföljd. Bestäm en formel för rätblockets volym och begränsningsarea.
Problem med geometrisk talföljd se Student 2004, 17; 2005, 21.

20e För att sätta ihop sektioner om 3 åttahörningar behövs det 22 järnstänger. Vi har 20 sådana sektioner. Till den 61:a åttahörningen behövs 6 metallstänger. Totalt $20 \cdot 22 + 6 = 446$.

Låt eleverna hitta en allmän formel för antalet järnstänger.
Låt eleverna lägga andra mönster, t ex med tändstickor och formulera
liknande problem till sina klaskamrater.
Liknande problem GyCadet 2006, 22.

21 d Kalla skärningspunkten mellan diagonalerna för E och skärningspunkten mellan BD och CM för F. Då är triangeln MEF likformig med CBF. Låt h beteckna höjden från ME till hörnet F.

Likformigheten ger $\dfrac{h}{\frac{1}{2}-h} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1}$ med lösning $h = \dfrac{1}{6}$.

Arean av det skuggade området är $2 \cdot \dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{12}$.

Detta problem kan även lösas genom att placera in kvadraten i ett rätvinkligt koordinatsystem med A i origo. Låt eleverna bestämma ekvationerna för linjerna AC, DM, DB, MC och söka skärningspunkter.

22c a1 = 0, a2 = −1, a3 = 1, a4 = −2, a5 = 2, a6 = −3, a7 = 3 osv.
a2k = −k, a2k+ 1 = k
a4017 = 2008, alltså i = 4017.

Ta upp talföljder allmänt, begreppen rekursionsformel och sluten formel.
Går denna följd att beskriva med en sluten formel?
För liknande problem se Student 2004, 17;2005, 21

23 b Potenslagarna ger $3^{32} - 1 = 9^{16} - 1 = 81^{8} - 1$
Konjugatregeln ger $81^{8} - 1 = (81^{4} - 1)(81^{4} + 1) = (81^{2} - 1)(81^{2} + 1)(81^{4} + 1) =$
$(81 - 1)(81 + 1)(81^{2} + 1)(81^{4} + 1) = 80 \cdot 82 \cdot (81^{2} + 1)(81^{4} + 1) =$
$= 6560 \cdot (81^{2} + 1)(81^{4} + 1)$

Vilken slutsiffra har talet $3^{32} - 1$? Hur kan lätt bestämma den?
Be eleverna genomföra faktoriseringen med hjälp av konjugatregeln.
Vilka övriga faktorer har talet?

24 a $m^2 = (sinx + cosx)^2 = sin^2x + 2sinx \cdot cosx + cos^2x = 1 + 2sinx \cdot cosx$

som ger $sinx + cosx = \dfrac{m^2-1}{2}$.

Vidare är $1 = (sin^2x + cos^2x)^2 = sin^4x + 2sin^2x \cdot cos^2x + cos^4x$ vilket ger

$$sin^4x + cos^4x = 1 - 2(sinx \cdot cosx)^2 = 1 - 2 \cdot \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{(m^2-1)^2}{2}$$

Repetera viktiga trigonometriska samband.
Hur mycket är $\sin^3 x + \cos^3 x$, hur mycket är $\sin^6 x + \cos^6 x$?
Diskutera hur innebörden ändras på det trigonometriska uttryck som innehåller $\sin x$ och $\cos x$ beroende på var exponenterna är placerade.
Liknande problem se Student 2004, 24.