Svar och arbeta vidare med Junior 2008

Det finns många intressanta idéer i årets Känguruaktiviteter. Problemen kan inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag att arbeta vidare med.

Känguruproblemen kan lösas av alla elever t ex genom att laborera eller genom att rita och resonera, genom att ställa upp uttryck och ekvationer. Elever kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt, komma fram till olika lösningar, sedan jämföra och se vilken de finner enklast eller mest spännande eller vad de behöver lära sig för att lösa problemen. De kan formulera egna liknande problem, varianter eller exempel med anknytning till frågeställningar som kommer upp. Att jämföra olika uppgifter och göra kopplingar till erfarenheter i eller utanför skolan breddar och fördjupar upplevelser och lärande. Att se likheter mellan olika problem, att se det som är gemensamt och generellt är en särskilt väsentlig del av matematiken. Prova problem för andra åldrar. Flera av exemplen har anknytning till uppgifter som varit med i tidigare omgångar. Vi ger förslag på några sådana, men det finns fler och även möjligheter att gå vidare till andra Känguruklassers problemsamlingar och tidigare förslag att arbeta vidare.

Alla tidigare problem, sedan starten i Sverige, med svar och förslag att arbeta vidare, finns att hämta på ncm.gu.se

Det finns naturligtvis mycket annat att göra – än det vi tar upp. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 e Eftersom det bara finns V i låda 4 måste V bort från låda 1, 2 och 5. Bara B kvar i låda 1, dvs B måste bort från låda 2, 3 och 5. Bara A kvar i låda 3, dvs A måste bort från låda 2 och 4. Endast bokstaven R kvar i låda 2

Vilka är villkoren för att frågan i uppgiften ska kunna besvaras?
Testa genom att ändra antal och typ av bokstäver i lådorna 1, 3, 4 och 5.

Liknande problem GyCadet 2007, 7.

2 c Gabriels tid är 30 sekunder och Franks tid är 36 sekunder.
Alltså är Gabriel 6 sekunder snabbare än Frank.

Vi har kvar sextiosystemet vid tidsberäkningar från sumererna och det talsystem de använde för 3-4000 år sedan. En svårighet är att vi blandar bråk- och decimalform samt decimalnotation med klocknotation. Dessutom används komma och punkt om vartannat. I skidresultat kan vi se resultat som 58.23.92. De två första siffrorna svarar mot minuter, där vi växlar till timmar när vi kommer över 60 minuter. Nästa två siffror anger antal sekunder, där vi går över till minuter när vi kommer till 60 s. I nämnda positioner hanterar sextiondelar medan de två sista siffrorna anger hundradelar. Diskutera detta med eleverna och arbeta med omvandlingar mellan olika tidsenheter. Peka på exempel som 0,5 min ≠ 50 s

0,5 min = 1/2 min = 30 s

En hundradelstimme ≠ 0,01 timmar

Beräkna deras medelhastigheter i m/s respektive km/h. Hur stor del av en timme är 30 s?

Beräkna Franks tid om Frank vann med 4 sekunder.

Liknande problem är GyCadet 2005:9 Junior 2005:17.

3 b Nina kommer att se texten som 5008.

Diskutera med eleverna hur spegelbilden av de olika siffrorna ser ut. Undersök med en spegel om det stämmer. Arbeta vidare med metoder för att åstadkomma speglingar i ett koordinatsystem. Spegla i axlarna: förflyttning, vridning med mera.

Liknande problem Cadet 2003, 7.

4 d I figur 3 och 5 möts inte de fyra trianglarna på samma sidoyta.

Kopiera upp de fem alternativen åt eleverna och låt dem klippa ut bilderna och bygga ihop kuber. Få dem att förklara vad det går fel.

Utvikta tredimensionella figurer har funnits i Benjamin 2003, 10, Junior 2005, 4, Cadet 2006, 3.

5 e Eftersom de sju korten är numrerade från 1 till 7 finns det tre kort med jämna tal och fyra kort med udda tal. Eftersom Sofia vet att Alis summa är jämn måste hon ha alla de jämna korten, dvs $2+4+6=12$. Så snart Sofia inte har alla jämna kort skulle hon inse att Ali skulle kunna ha ett jämnt och ett udda kort.

Ta upp begreppen udda och jämna tal. Vad gäller för addition och multiplikation av (i) udda tal, (ii) jämna tal, (iii) jämna och udda tal. Be eleverna bevisa sina påståenden.
Hur hade problemet ändrats om vi stället haft kort som varit numrerade från 2 till 8?

Liknande problem GyCadet 2004, 10; 2006, 7, Junior 2005, 5, 19.

6 b AB är hypotenusan i en rätvinklig triangel med sidorna 2 och 3,
Pythagoras sats ger $AB^2 = 2^2 + 3^2$ med lösning $AB = \sqrt{13}$

Punkten A kan placeras i origo i ett koordinatsystem. Vilka punkter passeras? Lutning?
AB:s längd uttryckt med koordinater.
Hur lång blir AB om kvadraterna placeras på en rad intill varandra?
Linjen AB avskär fyra trianglar.
Vad kan man säga om de trianglarna?
Be eleverna bestämma x respektive y.
Vilken area har trianglarna?
Diskutera begreppen längdskala – areaskala.

7 a Differensen mellan två tal som båda är delbara med 15 är en multipel av 15.
De enda tal som uppfyller det villkoret är A och F.

Rita tallinjen på tavlan och markera talen A,B,C,D, E och F.
Diskutera med eleverna vilka tal som kan vara delbara med 3 respektive 5.
Hur skulle man kunna gradera tallinjen?

8 b Eftersom de tre yngsta är 42 år tillsammans, $\frac{42}{3} = 14$, alltså är de 13, 14 och 15 år.
Då är de tre äldsta 17, 18 och 19 år, dvs tillsammans 54 år

En alternativ lösning är att låta eleverna använda sina kunskaper i algebra för att bestämma svaret.
Låt den yngsta vara x år, då gäller
$x + (x + 1) + (x + 2) = 42$, $x = 13$.
Hur skulle problemet kunna se ut om t ex 60 var rätt svar?

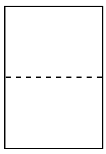
Liknande problemet med konsekutiva tal är GyCadet 2005:23, Junior 2004:21, Student 2005, 6; 2006, 24; 2007, 17.

9 a Varje skuggat område kan delas i två halva sexhörningar. Alltså är hälften av parallellogrammen skuggade.

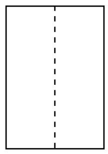
Be eleverna redogöra för en regelbunden sexhörnings egenskaper. Dela in sexhörningen i sex kongruenta trianglar. Låt eleverna visa att man kan dela in det skuggade området i trianglar som är kongruenta med sexhörningens. Visa att de skuggade områdena exakt motsvarar de två sexhörningarna genom argument och beräkningar. Diskutera regelbundna månghörningar.

Liknande problem med skuggade delar är GyCadet 2004, 14, Junior 2005, 17.

10c Toms rektangel



Jerrys rektangel



Deras rektanglar har tillsammans omkretsen 90 cm.
Men då är varje kortsida respektive långsida räknad 6 gånger.
Omkretsen av deras ursprungliga rektanglar är 60 cm

Be eleverna rita två kongruenta rektanglar. Hur delar Tom respektive Jerry sina rektanglar? Det kan vara värdefullt att göra de olika klippen (på riktigt) för att få en tydligare och mental bild av hur en rektangels omkrets hänger samman med sidornas längder.

Därefter kan eleverna visa resultatet med algebra genom att införa lämpliga beteckningar. Låt den ursprungliga rektangeln ha kantlängderna a respektive b. Då har den omkretsen $2a + 2b$. Tom halverar sitt ark så att hans rektangel har längderna $a/2$ respektive b. Omkretsen av en sådan rektangel blir då $a + 2b = 40$. Jerry halvera istället sin rektangel så att den har längderna a respektive $b/2$. Den rektangeln har då omkretsen $2a + b = 50$. Ledvis addition ger $3a + 3b = 90$. Den ursprungliga rektangeln hade omkretsen 60 cm.

Avsluta med en diskussion om den ursprungliga rektangelns area.

Liknande problem är GyCadet 2004, 17, 2005, 7, Junior 2006, 14.

11 c $y = -x$ ger $\dfrac{x^{2008}}{y^{2008}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2008} = \left(\dfrac{x}{-x}\right)^{2008} = (-1)^{2008} = 1$

Diskutera potenslagarna. Villkor för bas och exponent i potensuttryck.
Måste exponenten vara ett heltal om basen är negativ?

Liknande problem se Junior 2007, 13, 2007, 21, Student 2006, 8, 2007, 16.

12 b Anta att det behövs x prov med 5 rätt.
Då har jag sammanlagt skrivit $(x + 1)$ prov.
Jag har fått $(1 + 5x)$ poäng av $(x + 1)\cdot 5$ möjliga poäng.
Det ger $\dfrac{1+5x}{(x+1)\cdot 5} = \dfrac{4}{5}$ med lösning $x = 3$

Alternativ lösning:

Eftersom jag låg 3 poäng under önskat medel på första provet, måste jag kompensera med att ligga 1 poäng över på de kommande 3 proven.

Medelresultatet efter prov 1 är $\dfrac{1}{5}$, efter prov 2 $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ efter prov 3 $\dfrac{11}{15}$, efter prov 4 $\dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

Be eleverna redogöra för hur de tänker. Visa olika lösningsmetoder.

Liknande problem Junior 2006, 17, Student 2007, 8.

13 d Fem av korten har entalssiffra 8 och fem av korten entalssiffra 3. Vi får entalssiffran 0 om vi tar tre kort som har entalssiffran 8 och två som har entalssiffran 3 eller om vi tar fyra kort med entalssiffran 3 och ett med entalssiffran 8. Minsta antal kort är 5. Vi får också entalssiffran 0 om vi tar fem kort som slutar på 8, men dessa ger inte summan 100. Övrigt: utgår vi från de möjliga femkortsalternativen och drar bort ett (eller två kort) kan vi inte hamna på slutsiffran 0, dvs inga lösningar med mindre än fem kort är möjliga.

Vilka slutsiffror kan summan av Beatrices kort ha, om hon väljer 2 kort, 3 kort, 4 kort osv? Vad måste man tänka på för att en summa ska ha entalssiffra 0 om termerna har entalssiffra 8 eller 3? Hur många olika lösningar finns det?
$(28 + 18 + 8 + 33 + 13 = 100,\ 8 + 18 + 48 + 3 + 23 = 100,\ 3 + 13 + 23 + 33 + 28 = 100)$.
Om Beatrice slumpmässigt väljer fem kort, hur stor är sannolikheten att hon får summan 100?
Liknande problem Student 2004, 12; 2005, 18; 2006, 9, Junior 2005, 19; 2006, 16.

14 d Låt *abcdef* vara det sexsiffriga talet där $a \neq 0$.
Då gäller för de sex siffrorna följande:
$a\ b\ a + b\ a + 2b\ 2a + 3b\ 3a + 5b$
$a = 1$, $b = 0$ ger talet 101123
$a = b = 1$ ger talet 112358
$a = 2$, $b = 0$ ger talet 202246
$a = 3$, $b = 0$ ger talet 303369

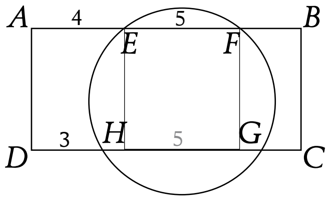
Be eleverna skriva upp talen. Hur många tresiffriga, fyrsiffriga tal osv
finns det med samma egenskap? Får man samma svar om man går från höger till vänster?
Liknande problem Junior 2006, 18.

15 c Talet innehåller 500 nollor, 250 tvåor och 250 åttor.
Siffersumman 2008 får vi om vi använder alla åttor och 4 tvåor.
Alltså ska 746 siffror suddas bort.

Först kan vi stryka alla 500 nollorna och sedan pröva att stryka 250 tvåor.
Men 250 tvåor ger endast summan 2000 så vi behöver ha kvar 4 tvåor.
Vilken siffersumma har det ursprungliga talet?
Vilka siffror ska man ta bort om man vill ha kvar så många siffror som möjligt?
På hur många olika sätt kan man sudda bort siffror så att siffersumman av det som blir kvar är 2008? Gör ett liknande problem för Känguru 2009, som svarar mot uppgift 15.
Liknande problem GyCadet 2006, 12.

16 b Markera i figuren det som är givet.

På grund av symmetri blir $HG = 7$ cm.



Diskutera med eleverna fyrhörningen *EFGH* som är inskriven i cirkeln. Vad kan de säga om den?
Låt eleverna markera cirkelns medelpunkt och dra radierna till hörnen *E*, *F*, *G* och *H*.
Vad kan de säga om de erhållna trianglarna?

17a Eftersom triangeln *ABC* är likbent är $\angle ABC = \angle ACB = x$. För vinklarna i triangeln *BPC* gäller ekvationen $x - 50° + x + 120° = 180°$ med lösning $x = 55°$. Då är $\angle PBC = 55° - 50° = 5°$.

Bestäm samtliga vinklar i de tre trianglarna.
Liknade problem GyCadet 2005, 13, 16, Junior 2004, 5, 2005, 12.

18 d Betrakta triangeln där hörnen utgörs av cirklarnas medelpunkter.
Den har sidlängderna 3, 4 och 5. Alltså är den rätvinklig med den räta vinkeln i cirkeln med radie 1.
Då har cirkelbågen längden $\frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{3\pi}{2}$

Markera motsvarande cirkelbågar på de andra två cirklarna. Hur långa är de?
Vilken area har området mellan de tre cirklarna? Jämför Student 16.
Historik kring den så kallade ”egyptiska triangeln”.
Vilka villkor kan ställas på cirkelradierna för att ge rät vinkel. Pythagoreiska triplar.
Kan liknande problem göras med fyra eller fler cirklar?

19 d Eftersom 5 förekommer tre gånger måste talen 5 och 10 och 15 ingå i fakulteten. Primtalet 17 ingår inte, alltså är $n = 16$.
Alternativ lösning: Talet n! innehåller 15 st 2-or. Varje gång vi multiplicerar med ett jämnt tal ökar antalet 2-or

Jämnt tal	2	4	6	8	10	12	14	16
Antal 2-or	1	2	1	3	1	2	1	4
Antal 2-or i *n*!	1	3	4	7	8	10	11	15

Här är det lämpligt att låta eleverna arbeta med att skriva om talet så att de ser att det innehåller alla faktorer från 2 till 16.
($n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 = 16!$)
Beräkna $n!$ för $n = 1, 2, 3, 4, 5$ och 6. Ta upp vad som menas med 0!

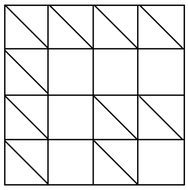
20b Låt a och b vara de två reella talen. Då ska $a + b = ab = \frac{a}{b}$.
Den sista likheten ger $b^2 = 1$, $b = \pm 1$.
Den första likheten ger för
(i) $b = 1$ ekvationen $a + 1 = a$ som saknar lösning
(ii) $b = -1$ ekvationen $a - 1 = -a$ med lösning $a = \frac{1}{2}$
Det finns en lösning.

Vad menas med ett reellt talpar? Diskutera med eleverna hur man löser problemet.
Ändra frågeställningen till att skillnaden, produkten och kvoten ska vara lika.

21 a Summan av de fem tal som ska placeras ut är 27 och av dem som redan är utplacerade är 17.
Vi har sex hörn och åtta sidoytor. Till summan S i varje hörn bidrar fyra sidoytor, dvs sammanlagt är de sex summorna S uppbyggda av 24 termer. Det betyder att varje term förekommer 3 gånger.
Det ger att $6S = 3 \cdot 27 + 3 \cdot 17$ med lösning $S = 22$.
Vidare är $A + B + C + 5 = B + C + 9 + 3$ ger $A = 7$ och $A + B + D + 9 = S$
$A = 7$ och $S = 22$ ger $B + D = 6$

Låt eleverna konstruera en regelbunden oktaeder. Diskutera oktaederns egenskaper.
Diskutera lösningen på problemet.

22 c Se figur



Diskutera olika sätt att rita diagonalerna. Vilket är det maximala antalet diagonaler med samma egenskaper om man istället har 2×2 enhetskvadrater,
3×3 enhetskvadrater, 5×5 enhetskvadrater osv?
Kan man se något mönster för antalet diagonaler om kvadratens sida ändras?
Är det möjligt att uttrycka en formel för en $n \times n$ – kvadrat?
Resonera om hur man kan bevisa påståendet.

23 b En pyramid har fyra sidor. När vi från en 8-pyramid tar bort alla yttre bollar försvinner det understa lagret och de tre översta lagren.
Kvar blir en 4-pyramid.

Skaffa flirtkulor och låt eleverna bygga pyramider.
Vad händer när man plockar bort lager av kulor?
Hur många kulor behövs för att bygga en 3-pyramid, 4-pyramid osv.
Vilket mönster gäller för antalet kulor i sådana pyramider?
Uttryck en formel för antal kulor i en n-pyramid.
Liknande problem Junior 2005, 20.

24 e Triangeln PCD är liksidig med sidan 1. Låt M vara mittpunkten på sidan CD. Då är PM en höjd och har längden $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Låt O vara figurens centrum.

Då har OM längden $\frac{1}{2}$ och $|PQ| = \sqrt{3} - 1$

Diskutera lösningen med eleverna.
Liknande problem Junior 2004, 24; 2006, 21, Student 2006, 22; 2007, 6, 19.