Svar och arbeta vidare med Cadet 2008

Det finns många intressanta idéer i årets Känguruaktiviteter. Problemen kan inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag att arbeta vidare med.

Känguruproblemen kan lösas av alla elever t ex genom att laborera eller genom att rita och resonera, genom att ställa upp uttryck och ekvationer. Elever kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt, komma fram till olika lösningar, sedan jämföra och se vilken de finner enklast eller mest spännande eller vad de behöver lära sig för att lösa problemen. De kan formulera egna liknande problem, varianter eller exempel med anknytning till frågeställningar som kommer upp. Att jämföra olika uppgifter och göra kopplingar till erfarenheter i eller utanför skolan breddar och fördjupar upplevelser och lärande. Att se likheter mellan olika problem, att se det som är gemensamt och generellt är en särskilt väsentlig del av matematiken. Prova problem för senare åldrar. Flera av exemplen har anknytning till uppgifter som varit med i tidigare omgångar. Vi ger förslag på några sådana, men det finns fler och även möjligheter att gå vidare till andra Kängurufjklassers problemsamlingar och tidigare förslag att arbeta vidare.

Alla tidigare problem, sedan starten i Sverige, med svar och förslag att arbeta vidare, finns att hämta på ncm.gu.se

Det finns naturligtvis mycket annat att göra – än det vi tar upp. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 a 2 Hälften är 11, dvs minst 11 – 9 = 2 flickor.

Eftersom hälften av eleverna är förkylda räcker det inte med 9 pojkar, utan det behövs minst 2 flickor. Hur skulle antalen ändras för att alternativ b skulle vara det korrekta, om vi bara får ändra antal när det gäller
a) sjuka b) flickor c) pojkar? Jämför också uppgift 6.

Liknande problem är Benjamin 2007, 14; Cadet 2003, 7; 2004, 16; 2005, 1 och Junior 2005, 14.

2 c 7 Nedre raden 2 + 4 = 6, övre raden 3 + 7 = 10.

Ett sätt att resonera är att utgå från att summan av alla talen är 10 + 6 = 16.
Då summan av de kända talen är 9, så måste det okända vara 7.
Vad ska summan av talen i övre raden vara för att alternativ c respektive e är korrekt?

Liknande problem är Benjamin 2005, 15; 2007, 3; Cadet 2005, 11; 2006, 2 och Junior 2004, 1.

3 c Gabriel 6 s Gabriels tid 30 s, Franks tid 3600/100 s = 36 s.

Vi har kvar sextiosystemet vid tidsberäkningar från sumererna och det talsystem de använde för 3-4000 år sedan. En svårighet är att vi blandar bråk- och decimalform samt decimalnotation med klocknotation. Dessutom används komma och punkt om vartannat. I skidresultat kan vi se resultat som 58.23.92. De två första siffrorna svarar mot minuter, där vi går växlar till timmar när vi kommer över 60 min. Nästa två siffror anger antal sekunder, där vi går över till minuter när vi kommer över 60 s. I nämnda positioner hanterar vi alltså sextiondelar, medan de två sista siffrorna anger hundradelar av sekunder. Diskutera detta med eleverna och peka på exempel som
0,5 min ≠ 50 s
0,5 min = ½ min = 30 s.
En hundradels timme ≠ 0.01 timmar som ibland betyder 1 minut = 60 s,
60/100 min = 3600/100 s = 36 s.

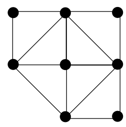
Liknande problem är Benjamin 2003, 7; Cadet 2005, 8; Junior 2005, 17; 2006, 3 & 6.

4 b 24 cm — Triangeln och kvadraten har båda omkretsen 16 cm. I femhörningen ingår inte den gemensamma sidan. Omkretsen 32 cm – 2 · 4 cm.

Ett sätt att tänka är att de tre sidorna på kvadraten tillsammans är 12 cm. Det är också de två långa sidorna på triangeln, eftersom det är en gemensam sträcka som uteslutits i båda figurerna. Kvadraten och triangeln har samma omkrets. Vilken har störst area? Går det att konstruera en triangel med samma area som kvadraten om omkretsen fortfarande ska vara densamma?
Ett annat sätt att gå vidare är att arbeta med tessellering.

Liknande problem är Benjamin 2001, 15; 2007, 17; Cadet 2006, 13 & 16 och Junior 2005, 22.

5 c 4 — Se figur:



Tre kvadrater med sidan 1 längdenhet ser vi direkt. Ytterligare en litet större kvadrat går det att rita. Hur stor är denna kvadrat? Ange omkrets, area.
Hur många rektanglar går det att rita? Observera att kvadraterna också är rektanglar!
Hur många trianglar? Hur många olika areor finns det på trianglarna?
Här kan det passa bra att jobba med geobräde, se t ex Nämnaren 2000, nr 4, s 28-31
eller NämnarenTEMA, Uppslagsboken, s 40-41.

Liknande problem är Benjamin 2002, 10; 2003, 19; Cadet 2003, 15; 2005, 7; Junior 2006, 12.

6 b 5 — Båda ska ha 29 cents. Ann ger Dan tre 5 centsmynt och får två stycken 2 centsmynt tillbaka.

Totalt har de $9 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 58$ cent och de ska alltså efter fördelning båda ha 29. Anna har 40 och ska alltså lämna ifrån sig ett udda antal 5 centmynt. Det kan vara ett sätt att tänka.
Resonera om olika varianter av hur mycket Anna eller Dan har från början.
Hur skulle fördelningen se ut om alternativ a) vore det riktiga?

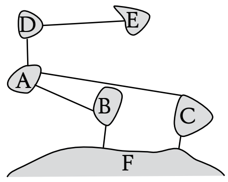
Liknande problem är Benjamin 2001, 11; 2005, 14; Cadet 2002, 10; 2005, 14; Junior 2006, 9.

7 b 6 — Största gemensamma faktorn i 24, 42 och 36 är 6.
Det blir 4 vita rosor, 7 röda och 6 gula i varje bukett.

Faktoruppdelning ger:
Vita rosor $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Röda rosor $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
Gula rosor $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
Gemensamma faktorer (som ger antal buketter) är 2, 3 och $2 \cdot 3 = 6$.
Samtidigt kan vi se hur många blommor det blir av varje slag. Hur?
Vilket är det minsta antalet likadana buketter det går att göra med alla rosorna?

Liknande problem är Benjamin 2004, 7 och 20; Cadet 2002, 14 & 18; 2004, 17; Junior 2004, 19.

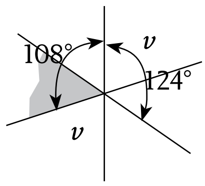
8 e 8 För att besöka D och E behövs 4 färjeturer via A.
Till och från A kan vi åka via B 2 turer och C 2 turer.



Följande resor ger 8 turer, F är fastlandet:
F — C — A — D — E — D — A — B — F.
Vilka andra möjligheter finns det för 8 turer?

Hur ska man resa för att t ex få antalet i d?
Vilken eller vilka öar missar du då?
Liknande problem är Benjamin 2002, 22; 2004, 6; Cadet 2002, 9; 2007, 15; Junior 2004, 20.

9 a 52° Den sökta vinkeln är 124 – v,
där v = 180° – 108° = 72°



Problemet kan lösas med ett ekvationssystem.
Med figurens beteckningar:

$x + y = 108°$ (1)
$u + x = 124°$ (2)
$x + y + u = 180°$ (3)
(3) − (1) = $u = 72°$
(2) ger $x = 52°$

Uppgiften ger underlag för diskussion av storlek av motstående vinklar och supplementvinklar.
Liknande problem Benjamin 2001, 8; Cadet 2002, 21; 2003, 24; Junior 2005, 11.

10 e 12 Sofia vet att Ali har kort med udda tal,
om hon själv har 2, 4 och 6.

När vi skriver upp talen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ser vi att det är tre jämna och fyra udda tal.
Eftersom Sofia är så säker på att Ali har udda tal måste hon själv ha alla de tre jämna talen.
Om vi följer texten med tal skrivna på lappar blir det ännu tydligare vilka möjligheter som finns.
Hur hade problemet ändrats om vi istället haft kort som varit numrerade från 2 till 8?
Liknande problem Benjamin 2001, 18; Cadet 2004, 9; 2005, 11; 2006, 7; Junior 2005, 19.

11 d 108 cm^2 Triangelns bas PQ är 18 cm och höjd 12 cm.

Låt PQ vara triangelns bas. Dess längd är tre radier, 18 cm.
Triangelns höjd är lika stor som rektangelns höjd, 12 cm. Arean blir $18 \cdot 12 / 2$ cm^2 = 108 cm^2
Vilken area har de fyra cirklarna tillsammans? Hur stor del av rektangeln upptar de?
Liknande problem är Cadet 2003, 23; 2004, 13; 2005, 13; 2006, 9; 2007, 10; GyCadet 2006, 10; GyCadet 2005, 14.

12 d 331 Vi kan se tre sidoytor med $3 \cdot 10 \cdot 10$ småkuber, samt de småkuber som bildar kanter 10 + 10 + 11.

Vi ser tre sidoytor där kantkuberna är gemensamma för två sidoytor: 121 + 110 + 100 = 331 kuber.
Låt eleverna redovisa hur de räknat fram antalet synliga småkuber.
Hur många småkuber innehåller hela träkuben?
Hur ändras antalet småkuber om träkuben har sidan 10?
Liknande problem Benjamin 2003, 22; 2006, 16; Cadet 2002, 16; Junior 2005, 21.

13 b 25 BA + AD = BC + CD = 25. Punkterna kan ligga B, C, A, D.

Markera A och B på en tallinje, AB = 13 cm. Eftersom AD = 12 cm finns det två möjligheter för punkten D. Antingen 1 cm till vänster om B eller 12 cm till vänster om A. Men de andra avstånden gör att bara det andra läget är det enda möjliga. Avståndet DA + AB = 25 cm.
Liknande problem är Benjamin 2003, 16; 2004, 8; Cadet 2007, 21; Junior 2004, 4.

14 c 60 cm Summan av de mindre rektanglarnas omkretsar är 1,5 gånger den större, eftersom sidorna i korset räknas två gånger.

Anta att den ursprungliga rektangeln har sidlängderna a och b med omkrets $2a + 2b$.
Toms båda rektanglar har omkretsen $a + 2b = 40$.
Jerrys båda $2a + b = 50$, tillsammans $3a + 3b = 90$, vilket ger $2a + 2b = 60$.
Det kan vara värdefullt att göra de olika klippen (på riktigt) för att få en tydligare konkret och mental bild av hur en rektangels omkrets hänger samman med sidornas längder.
Liknande problem Benjamin är 2001, 15; 2005, 12; Cadet 2002, 4; 2004, 15; 2005, 7; Junior 2006, 14.

15 a 1806 Enda tal x, där x^2 svarar mot ett lämpligt år, är 43 med kvadraten 1849.

Vi söker ett kvadrattal som är mindre än och ganska nära 1871.
Prövning ger att $43^2 = 1849$. $1849 - 43 = 1806$.
Det är viktigt att ha en god taluppfattning så att man direkt ser att det sökta talet ligger mellan $40^2 = 1600$ och $45^2 = 2025$.
Det kan vara bra att öva sig litet i snabbräkningsteknik på kvadrater av tal som slutar på 0 och 5.
Exempel: $35^2 = 30 \cdot 40 + 25$, $45^2 = 40 \cdot 50 + 25$ eller generellt $(10a + 5)^2 = 10a(10a + 10) + 25$
Liknande problem är Benjamin2005, 19; Cadet 2004, 17; 2005, 11; 2007, 18; Junior 2007, 13.

16 c 5 Minsta a, där $\frac{a}{2a+1}$ ligger mellan 0,45 och 0,50.
$\frac{4}{9}$ är mindre än 0,45, $\frac{5}{11}$ ligger mellan 0,45 och 0,50.

Här gäller det att hitta minsta antalet flickor a, så att andelen flickor ligger mellan 45 % och 50 %.
Antalet pojkar måste vara $a + 1$ för att få denna andel. Totala antalet $2 \cdot a + 1$.
Vi beräknar $\frac{a}{2a+1}$ för $a = 3, 4, 5$ och får $\frac{3}{7}$ (< 0,45), $\frac{4}{9}$ (< 0,45), $\frac{5}{11}$ som ligger mellan 0,45 och 0,50.
Liknande problem Cadet 2002, 1 & 8; 2006, 14; 2007, 14; Junior 2006, 4; 2007, 6.

17a Jenny Torsdag och fredag talar hon sanning och säger samma namn två dagar i följd. Då måste den sjunde dagen vara torsdag för att det ska stämma med att flickan alltid ljuger på tisdag.

En tabell kan underlätta. Veckodagar där flickan ljuger (L) eller talar sanning (S):

Må	Ti	On	To	Fr	Lö	Sö
L/S	L	L/S	S	S	L/S	L/S

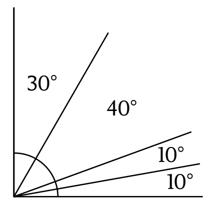
Torsdag och fredag talar hon sanning och svarar samma namn båda dagarna. I listan finns inte samma namn två på varandra följande dagar. Alltså började hon svara en fredag eller lördag. Om hon började en lördag leder det till motsägelse. Britta blir både sanning och lögn. Hon börjar alltså en fredag. Då sa hon Jenny och det kommer hon att säga den sjunde dagen också.
Hur skulle hennes svar ha sett ut om hon börjat svara på tisdag respektive torsdag?
Liknande problem Benjamin 2002, 12; 2004, 15; 2007, 13; Cadet 2002, 12; 2006, 11.

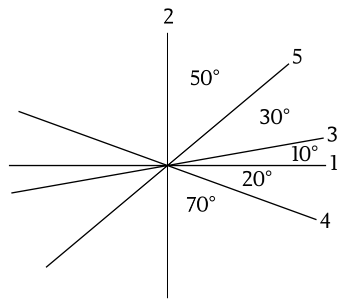
18 b 11 Av likheten framgår att R = K + 1 och N = G + 1.

Här får vi tänka i tiotalsövergångar.
Den här typen av problem är ganska vanlig och elever kan tycka det är enklare att ställa upp i en subtraktionsalgoritm.
Vi ser att för hundratalen så är K = R + 1, eftersom andra termen saknar hundratal.
Entals- och tiotalspositionerna ger N + A = 10 + O och A + G + 1 = 10 + O
dvs N = G + 1. Det gör att RN – KG = 11.
Ett klassiskt problem är sonen som telegraferade hem från USA efter mer pengar. Han kunde endast bekosta följande telegram: SEND + MORE = MONEY. Hur mycket ville han ha? Vi får väl anta att det gällde dollar!
Liknande problem Benjamin 2004, 14; Cadet 2003, 22; Junior 2006, 13.

19 b 5

Det finns flera lösningar, två exempel i figur.
Det kan vara klokt att tänka på komplementvinklar.
Två vinkelräta linjer ger dessutom 90-gradersvinkeln.
Låt eleverna jämföra sina olika sätt att lösa problemet.
Liknande problem Cadet 2003, 24; 2005, 19; 2007, 13.
Gycadet, 2004, 16 och 2005, 16.





20 a 14.00	De har använt 60 % av angiven tid den första biten. Samma fart ger 60 % av 75 min = 45 min på den andra biten.

För att jämföra deras förflyttning med den beräknade som anges på skyltarna tar vi kvoten av använd och angiven tid på den första biten:
60/100 = 60 %
De bör alltså använda 60 % av 1 h 15 min = 0,6 · 75 min = 45 min och vara framme efter 2 timmar.
Låt eleverna konstruera egna problem med motsvarande innehåll.

Liknande problem Benjamin 2001, 3; 2003, 7; Cadet 2006, 15; 2007, 18; Junior 2005, 17.

21 d B, 2 ggr	Platser för 5 och 3 kan väljas på 5 · 4 = 20 sätt, övriga siffror är ettor. I A blir det hälften så många tal eftersom det är två femmor.

Här följer ett sätt att resonera:
När sifferprodukten är 15 så är siffrorna 1, 1, 1, 3 och 5. Här kan plats för 5 väljas i 5 olika positioner, för vart och ett av dessa kan plats för 3 väljas på 4 sätt, resten är ettor, dvs det är totalt 5 · 4 = 20 tal i mängd B. I mängd A blir det hälften så många, då vi byter ut 3 mot 5. Talen 53111 och 35111 blir t ex lika när vi byter 3 mot 5.
Istället för att resonera kan vi skriva upp alla talen efter ett bra system, t ex:
Mängd A

55111, 51511, 51151, 51115	alla med 5 i första position
15511, 15151, 15115	de med 5 i andra position som tillkommer
11551, 11515	de med 5 i tredje position som tillkommer
11155	de med 5 i fjärde position som inte redan är med

Mängd B med 20 tal kan listas på motsvarande sätt.

Liknande problem är Benjamin 2003, 6 & 24; Cadet 2003, 9 & 16; 2005, 11 & 21; Junior 2004, 16.