Svar och arbeta vidare med Benjamin 2008

Det finns många intressanta idéer i årets Känguru och problemen kan säkert ge idéer för undervisning under många lektioner. Här ger vi några förslag att arbeta vidare med.

Problemen kan lösas t ex genom att man laborerar och/eller ritar och resonerar. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt, komma fram till lösningar, sedan jämföra och se vilken de finner enklast eller mest spännande. De kan formulera andra aktiviteter eller exempel med anknytning till frågor som kommer upp vid samtal eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över problem. Att jämföra uppgifter och tänka på erfarenheter i eller utanför skolan breddar och fördjupar elevers tänkande. Att se likheter och olikheter mellan problem, att se det som är generellt är en väsentlig del av matematiken.

Prova gärna problem för äldre elever.

Flera av exemplen påminner om uppgifter som varit med i tidigare årgångar. Vi visar på några sådana, men det finns fler och även möjligheter att gå vidare till andra Känguruklassers problemsamlingar. Alla problem som varit med sedan starten i Sverige, med svar och förslag att arbeta vidare, finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru.

Det finns mycket annat att göra än det vi föreslår här. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 d $2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 8$ De andra alternativen är alla större än noll, a: 10, b: 192 c: 6 e: 25

Här kan det vara lämpligt att diskutera vad som händer generellt när vi adderar 0 till ett tal a, vi får summan a, för vilket a som helst: $a + 0 = 0 + a = a$.

Vid multiplikation av vilket tal som helst med 0 så blir produkten 0. Ta ganska många exempel, gärna krångliga: Vad är 23 678 + 0? Vad är $23\,678 \cdot 0$?

Vid multiplikation är $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, multiplikation av ett tal a med 1 ger talet tillbaka. 0 sägs vara *neutralt element* vid addition och 1 är neutralt element vid multiplikation.

Liknande problem är Benjamin 2002, 7; 2003, 8; 2004, 1.

2 e $2 \cdot 3$  $\cdot$  $= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)$, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$

Ordningen mellan faktorerna kan ändras till $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$ eftersom multiplikation (som addition) är kommutativ. Vad skulle svaret bli om vi byter högerledet mot $4 \cdot 36$? Mot $98 \cdot 2$?

Att faktorisera tal är en viktig kunskap. Vilka faktorer har följande tal: 40, 60, 96, 120, 256?

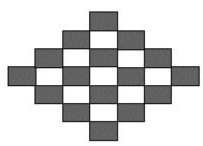
Liknande problem är Benjamin 2001, 7; 2004, 3; 2005, 5; 2006, 10 och Cadet 2007, 8.

3 d 7 Nedre raden 2 + 4 = 6, övre raden 3 + 7 = 10.

Ett sätt att resonera är att summan av alla talen är 10 + 6 = 16. Då summan av de kända talen är 9, så måste det okända vara 7. Vad ska summan av talen i övre raden vara för att alternativ c) respektive e) ska vara korrekt?

Liknande problem är Benjamin 2003, 9; 2005, 15; 2007, 3 och Cadet 2006, 2.

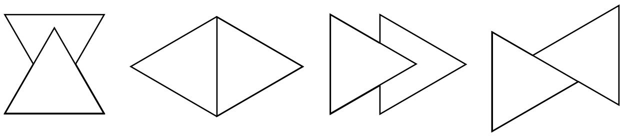
4 e 14 Under var och en av de 4 innersta svarta ligger en vit och överst en till: 9 + 4 + 1.



Det finns olika sätt att bestämma antalet beroende på hur man ”ser”, dvs kan tänka sig bygget. Allra säkrast är ju att bygga en modell med klossar i två färger. Låt eleverna beskriva flera olika sätt att räkna de vita klossarna.

Liknande problem är Benjamin 2001, 23; 2003, 14; 2005, 17 och Cadet 2005, 5.

5 e rektangeln



Rumsuppfattning och föreställningar av objekt i planet och rummet är viktiga men utvecklas mycket olika beroende på vilka erfarenheter barn gör. Här är det bra att klippa ut två trianglar och pröva sig fram till (och även rita av) vilka figurer som kan läggas om trianglarna överlappar varandra eller inte.

Undersökningar kan göras även med andra trianglar, pröva med en rätvinklig!

Liknande problem är Ecolier 2006, 11; Benjamin 2004, 5; 2007, 11 och Cadet 2003, 1; 2004, 2.

6 d 19 Paula kastade 21 snöbollar, dvs 4 mer än hon gjorde.
Alltså hade hon 15 + 4 från början.

Här finns olika sätt att tänka, t ex Paula kastade 21 snöbollar och hade 15 kvar, totalt har hon gjort 36. Då hade hon 36 – 17 från början. Eleverna kan variera ingående storheter och göra egna problem. Låt eleverna resonera om denna eller liknande situationer och uttrycka med symboler. Jämför olika uttryck! Hur skulle problemet se ut om b) vore det korrekta alternativet?

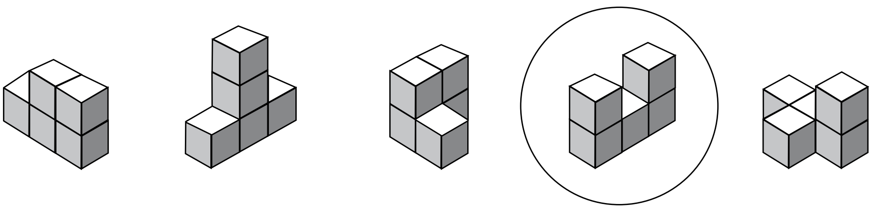
Liknande problem är Benjamin 2002, 9; 2003, 9; 2007, 15 och Cadet 2003, 7.

7 b $(3 + 2) \cdot 3 - 1$. Peter (+ 2) ger 5, John ($\cdot$ 3) ger 15, Niklas (– 1) ger 14

Här handlar det om olika operationers funktion och att den ordning vi väljer spelar avgörande roll, jämför uppgift 6. Gå igenom och skriv upp alla svarsalternativen och se hur olika resultaten blir.
a) $3 \cdot 3 + 2 - 1$ b) $(3 + 2) \cdot 3 - 1$ osv
Här kan också prioriteringsregler (multiplikation går före addition och subtraktion) samt behov av parenteser diskuteras.
Hur ska problemet ändras för att alternativ e) ska vara det korrekta?

Liknande problem är Benjamin 2001, 1; 2002, 7; 2003, 8; 2007, 9 och Cadet 2004, 1 & 5.

8 d



Uppgiften är bra för att utveckla rumsuppfattning.
Bygg modeller av de avbildade objekten med klossar (centikuber, legoklossar) och undersök vilka som kan förändras så att de liknar den ursprungliga enligt texten. Låt eleverna göra egna byggen och även rita av dessa som någon annan i sin tur kan använda som ritning. Jämför objekten!

Liknande problem är Benjamin 2001, 23 & 24; 2006, 16 och Cadet 2003, 5.

9 d 4 Summan av två triangelsidors längder måste vara större än den tredje.
a) 3,3,1 b) 2,2,2 c) 2,2, 1 d) går ej e) 1,1,1

För att stickorna ska bilda en triangel så måste summan av två sidors stickländer vara större än den tredje. Om vi prövar med 7 stickor (enligt a) så får vi en triangel. Så kan vi fortsätta och pröva alla alternativen. Med 4 stickor, som vi har i d-alternativet, måste en sida vara två stickor lång och då räcker de övriga två sidornas längder inte till att bilda en triangel.

Liknande problem är Benjamin 2001, 17; 2003, 16 & 24; 2005, 20 och Cadet 2006, 8.

10 e R — Bokstav i låda 4 måste vara V, i låda 1 B, i låda 3 A och i 2 R.

Eftersom V måste ligga kvar i låda 4, så får B ligga kvar i låda 1 och A i låda 3, vilket gör att kortet med R ska ligga i låda 2. Här är strategi och ordning väsentlig. Låt eleverna göra egna problem med andra bilder eller symboler.

Hur ska bokstavslapparna ligga i lådorna för att alternativ b) ska vara det korrekta? Finns det flera möjligheter?

Liknande problem är Benjamin 2002, 12; 2004, 2; 2005, 3; 2007, 13 och Cadet 2007, 7.

11 a 9 — Fyra möjligheter att båda eller en missar måltavlan: 0, 2, 3, 6.
Tre möjligheter att båda ger samma poäng: 4, 6, 12.
Tre att pilarna ger olika poäng: 5, 8, 9.
Av dessa ger två 6 poäng: 0 + 6 och 3 + 3.

Här bör eleverna uppmärksammas på vikten av att arbeta systematiskt för att få med alla varianter. Ett sätt är att börja med att skriva upp resultat då båda pilarna har samma poäng, och sedan ta möjligheterna när poängen är olika. Ett annat sätt är att lista möjligheterna utgående från resultatet på den första pilen:

0 poäng: 0 + 0, 0 + 2, 0 + 3, 0 + 6,
2 poäng: 2 + 2, 2 + 3, 2 + 6.
Om den första ger 3 poäng: (3 + 2 och 3 + 3 redan med) 3 + 6.
När den första ger 6 poäng: (6 + 2 och 6 + 3 redan med) 6 + 6, dvs nio möjligheter allt som allt.

Liknande problem är Benjamin 2003, 17; 2004, 19; 2006, 7 och Cadet 2003, 16.

12 b 24 cm — Triangel och kvadrat har båda omkretsen 16 cm. I femhörningen ingår inte den gemensamma sidan. Omkretsen 32 cm – 2 · 4 cm.

Ett sätt att tänka är att tre sidor på kvadraten tillsammans är 12 cm. Det är också de två långa sidorna på triangeln, eftersom det är en gemensam sträcka som tagits bort i båda figurerna.

Kvadraten och triangeln har samma omkrets. Vilken har störst area? Går det att konstruera en triangel med samma area som kvadraten om omkretsen fortfarande ska vara densamma? Jämför med uppgift 9.

Ett annat sätt att gå vidare är att arbeta med tessellering.

Liknande problem 2001, 15; 2002, 10; 2004, 13; 2007, 17 och Cadet 2006, 13 & 16.

13 a 25 — BA + AD = BC + CD = 25. Punkterna kan ligga B, C, A, D.

Visa att på sträckan AB behöver inte punkten A ligga till vänster om punkten B. Man får pröva sig fram med tanke på att alla punkter ligger på en rät linje. Låt eleverna undersöka vad som händer om vi tar bort det villkoret.

Liknande problem Benjamin 2003, 16; 2004, 8 och Cadet 2007, 5.

14 d $\frac{1}{6}$ Den övre vägen är vattenflödet $\frac{1}{4}$ av $\frac{2}{3}$ av flödet vid A: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

Ett sätt att lösa problemet är med hjälp av figur.
Dela först i tredjedelar, sedan två av dessa tredjedelar i fyra delar.
Då ser man att en av dessa är en sjättedel av hela flödet.

Ett annat sätt: Vårt problem är $\frac{1}{4}$ av $\frac{2}{3}$. Då kan vi tänka så här: $\frac{1}{4}$ är hälften av hälften.
Hälften av $\frac{2}{3}$ är $\frac{1}{3}$ och hälften av $\frac{1}{3}$ är $\frac{1}{6}$. Eller formellt med symboler: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

Liknande problem 2002, 15; 2006, 13 och Cadet 2007, 14.

15 e 12 Sofia vet att Ali har kort med udda tal om hon själv har 2, 4 och 6.

När vi skriver upp talen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ser vi att det är tre jämna och fyra udda tal. Eftersom Sofia är så säker på att Ali har udda tal måste hon själv ha alla de tre jämna talen.

Om man följer texten med tal skrivna på lappar blir det ännu tydligare vilka möjligheter som finns. Hur hade problemet ändrats om vi istället haft kort som varit numrerade från 2 till 8?

Liknande problem är Ecolier 2007, 17, Benjamin 2001, 18; 2003, 6 och Cadet 2006, 7.

16 a 9 De två första likheterna är 1 + 1 + 1 = 3 och 2 + 2 + 2 = 6 eller tvärtom eftersom § får vara högst 9.

Observera att symbolerna står för talen 1 till 9. Det gör att vänsterleden i de två första likheterna inte kan innehålla större tal än 2. Om vi försöker med 3 så blir summan 9 och då går det inte att få den tredje likheten. Vad händer om vi kan sätta in andra tal än 1 till 9?

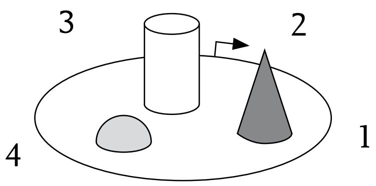
Liknande problem är Benjamin 2003, 9; 2004, 14 och Cadet 2008, 7.

17 e lika gamla Både sonen och dottern är 6 år.

Eftersom ett fåtal år framåt dubblar respektive trefaldigar åldern är det fråga om låga åldrar.
De fyra åren svarar mot sonens halva ålder, alltså är han 8 – 2 år idag.
De sex åren svarar mot två tredjedelar av dotterns ålder, alltså är hon 9 – 3 = 6 år.
Detta kan vara svårt att formulera men lättare att intuitivt förstå.
Med ekvationer där x och y är åldern för 2 respektive 3 år sedan: $x + 4 = 2x$, $y + 6 = 3y$
Hur ser ekvationerna ut om p och q är pojkens respektive flickans ålder idag?

Liknande problem är Benjamin 2003, 21; 2007, 10 och Cadet 2004, 10.

18 c 2143 Foton är tagna enligt figuren.



Här är ett bra tillfälle att anknyta till verkliga objekt eller byggnader. Gå ut och ta foton som kan ge underlag för nya problem. Jämför också *Fyren, tornet och kvarnen* som finns under Uppslaget under ArkivN på ncm.gu.se

Liknande problem Benjamin 2002, 2 & 21; 2005, 18 och Cadet 2006, 4.

19 c Doktorn är Roberts, ingenjören är Smith, musikern Farrell.
Farrel är inte ingenjör då han är äldre än ingenjören
och inte doktor eftersom doktorn är yngst.
Smith är inte doktor eftersom Farell är gift med Smiths syskon.

Här gäller det att systematiskt pröva alternativ och utesluta felaktiga.

Liknande problem Benjamin 2002, 12; 2005, 21; 2007, 13 och Cadet 2003, 19.

20 c 746 Summan av 250 åttor är 2 000. Då behåller vi också 4 tvåor.
Resterande 500 nollor och 246 tvåor stryks.

Först kan vi stryka alla 500 nollorna och sedan prövar vi att stryka 250 tvåor. Men 250 åttor ger endast summan 2000 så vi behöver ha kvar 4 tvåor.

Vilken är siffersumman för hela talet?

Vilka siffror ska man ta bort om man vill ha kvar så många siffror som möjligt?

Gör ett problem för Kängurun 2009, som svarar mot uppgift 20.

Liknande problem Benjamin 2001, 21; 2002, 11; 2004, 7; 2005, 19; 2007, 18 och Cadet 2006, 11.

21 c 9 km Summan av ettans rutt och tvåans minskad med treans är lika lång som fyran:
17 km + 12 km – 20 km.

Det finns olika sätt att resonera. Jämförelse av ettans och treans rutt ger att trean är 3 km längre svarande mot sträckan BC + AH. Fyrans rutt är lika lång som tvåans 12 km minskad med denna sträcka. Finns det andra sätt att lösa problemet?

Liknande problem Benjamin 2001, 17; 2002, 14; 2003, 23; 2004, 13 och Cadet 2005, 18.