Kortfattade lösningar med svar till Junior 2006

3 poäng

1 D — $(2006 + 6002)/2 = 4004$

2 D — Första siffran måste vara så liten som möjligt, dvs. 2.
Därefter väljer vi det tal som ger lägst begynnelsesiffra. Det ger 2309415687

3 E — 00:26, 02:06; 06:02, 06:20 och 20:06

4 E — $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

5 C — $2\cdot 2006 = 4012$, $3\cdot 2006 = 6018$, $4\cdot 2006 = 8024$

6 C — Efter 1 h är skillnad i tid 1,5 min. $60/1{,}5 = 40$

7 D — Antag att Peter har x böcker, x ska var delbart med både 4 och 9 och $50 < x < 100$.
Det ger $x = 72$.

8 E — En båge med längden 1 upptar en vinkel på 15°. Då upptar bågarna med längderna 2, 5 och 6 en sammanlagd vinkel på $13\cdot 15° = 195°$. Till bågen markerad med x återstår 165° vilket motsvarar en båglängd på 11.

4 poäng

9 E — För 30 kr får man 4 paket, för 60 kr får man 8 paket, för 90 kr 13 paket,
för 120 kr 17 paket och för 150 kr 22 paket.

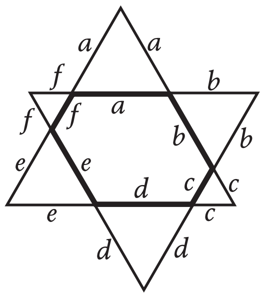
10 A — $\frac{de}{cd}=\frac{e}{c}=\frac{5}{4},\ \frac{bc}{ab}=\frac{c}{a}=\frac{3}{2},\ \frac{e}{c}\cdot\frac{e}{a}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$

11 B — Anta att Lady Agnes är x år. Det ger ekvationen $x = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}(100 - x)$
med lösningen $x = 40$.

12 D — Anta att de två lika stora kvadraterna har sidan x. Då har den största kvadraten sidan $2x - 1$, kvadraten nederst till höger sidan $x + 1$ och kvadraten överst till höger, sidan $x + 2$ eller $2x - 2$. Det ger $x + 2 = 2x - 2$ och $x = 4$. Den stora kvadraten har sidlängd 7 cm.

13 A — K = 6. Fall 1, N + 2G = 6 och 2Ä + N = 20, dvs. Ä – G = 7 som ger G = 1 eller G = 2. Men om G = 2 så blir N = 2, vilket är omöjligt.
Fall 2, N + 2G = 16 och 1 + 2Ä + N = 20, dvs. 2Ä – 2G = 3,
som saknar heltalslösning.

14 B — Med beteckningarna i figuren fås
$3(a + b + c + d + e + f) = 36$
Hexagonens omkrets är 12 cm



15 B — Vagnarna kan totalt arrangeras på $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ sätt efter lokomotivet.
I hälften av arrangemangen kommer vagn 1 att vara närmare loket än vagn 2.

16 D — Om vi plockar upp 3 rödblå, 3 blågröna och 3 grönröda bollar har vi sex bollar som delar färg. Plockar vi en 10:e boll får vi 7 bollar som delar en färg.

5 poäng

17 C — Anta att familjen består av n personer. Beteckna med m mammans ålder och med B, barnens ålder. Då gäller

$$\begin{cases} 38 + m + B = 18n \\ m + B = 14\,(n - 1) \end{cases} \iff 18n - 38 = 14n - 14 \iff n = 6.$$ Antal barn är $6 - 2 = 4$

18 C — Tvåsiffriga kvadrattal är 16, 36, 49, 64 och 81. Vi kan bilda följande tal som uppfyller villkoret 1649, 3649, 8164 och 81649

19 E — Sidan i den stora kvadraten är $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Varje del har arean 25 cm^2. De fyra mindre kvadraterna utgör en kvadrat med sidan 10 cm.
Då är $x = 5\sqrt{5} - 10 = 5(\sqrt{5} - 2)$

20 E — Vi undersöker de olika alternativen.

A är falsk, välj t ex talen 10, $\frac{991}{100}$ och $\frac{9}{100}$, då är produkten = 99,1.

B är falsk, välj t ex talen $\frac{1999\,999}{100\,000}$, $\frac{6}{100\,000}$ och $\frac{4}{100\,000}$

då blir produkten $\frac{11\,999\,994}{100\,000\,000\,000} = 0{,}00011999994$

C är falsk, välj t ex talen 18, $\frac{25}{18}$ och $\frac{11}{18}$, produkten blir 25.

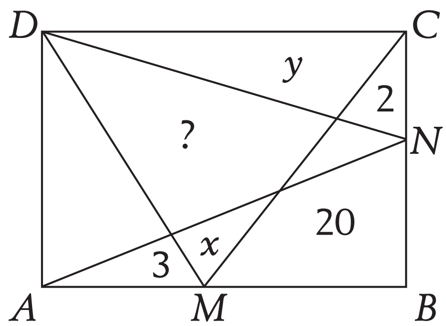
D är falsk, välj t ex talen 9, $\frac{25}{3}$ och $\frac{8}{3}$, då blir produkten 75.

21 A — Halva kvadraten har arean 1/2 a e. Kvadratens diagonal har längden $\sqrt{2}$ varav den del som härhör till det skuggade området har längden 1. Då är basen i den lilla vita likbenta rätvinkliga triangeln $(\sqrt{2} - 1)$

och arean är $\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2}$. Den skuggade arean är $\frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2} = (\sqrt{2} - 1)$

22 C — Efter första omgången är summan av siffrorna 6, när vi skriver in de tre nya talen bildade av alla parvisa summor av 1, 2 och 3 får vi totalsumma $3 \cdot 6 = 18$. Efter nästa omgång får vi summan $3 \cdot 18 = 54$, därefter $3 \cdot 54 = 162$, $3 \cdot 162 = 486$ och slutligen $3 \cdot 486 = 1458$

23 C — Vi betecknar areorna av de två mindre trianglarna i triangel DCM med x respektive y. Arean av triangel DCM är $x + ? + y$ och lika med halva rektangelarean.
Den sammanlagda arean av trianglarna DCN och NBA är också halva rektangelarean. Det ger $x + ? + y = 3 + x + 20 + 2 + y$
$\iff ? = 25$



24 C

$y = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + 2004 \cdot 2006 =$
$= (2 - 1)(2 + 1) + (3 - 1)(3 + 1) + (4 - 1)(4 + 1) + \ldots + (2005 - 1)(2005 + 1) =$
$= 2^2 - 1 + 3^2 - 1 + 4^2 - 1 + \ldots + 2005^2 - 1$
$x - y = 1^2 - 2004(-1) = 2005$

Arbeta vidare med Junior 2006

Det är vår förhoppning att du ska finna många intressanta uppslag bland årets Känguruproblem och att denna problemsamling ska kunna inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag till arbeten.

Många av känguruproblemen kan lösas med olika metoder t ex laborativa eller genom att man ritar och resonerar. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt och på så sätt komma fram till olika lösningsvarianter att jämföra och se vilken de finner enklast. De kan också formulera egna aktiviteter eller problem med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över exemplen. Att jämföra problemen och göra kopplingar inom och utom matematik är en utvecklingsmöjlighet. Att kunna se likheter mellan olika problem, att kunna se vad som är gemensamt och generellt är en väsentlig del av problemlösning. Flera av problemen har anknytning till problem som varit med i tidigare omgångar. Vi visar på några sådan kopplingar, men det finns fler och också i andra tävlingsklasser. Alla tidigare problem finns att hämta på namnaren.ncm.gu.se

Det finns naturligtvis mycket annat att göra. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 Vilka tal ligger mitt emellan 2006 och 4004, 4004 och 6002? Hur länge kan man fortsätta att bestämma ett heltal som ligger mitt emellan? Vilka slags tal får man om man fortsätter att bestämma talet som ligger mitt emellan? Hur länge kan man fortsätta den proceduren? 4004 är aritmetiska medelvärdet av 2006 och 6002. Aritmetiska medelvärdet A av två tal a och b är $A = (a+b)/2$. Det geometriska medelvärdet G av positiva tal a och b är $G = \sqrt{ab}$. Bestäm det geometriska medelvärdet av 2006 och 6002. Undersök vilket samband som finns mellan det geometriska och det aritmetiska medelvärdet för två tal a och b. Visa sambandet algebraiskt.

2 Vilket blir det största talet? Hur många olika 10-siffriga tal kan vi bilda av de sex ursprungliga talen? Vilken blir summan av siffrorna i det tiosiffriga talet? Vilken blir produkten av siffrorna? Be eleverna konstruera liknande problem åt varandra.

3 Hur många gånger mellan 00:00 och 23:59 är alla siffrorna lika? Olika? Ett klockproblem var nr 17 Junior 2005.

4 Gör andra indelningar av de tre banden. T ex 3, 4 och 5 gråfärgade fält, 4, 5 och 6 gråfärgade fält. Ändra även antal band. Liknande problem har förekommit i tidigare Kängurutävlingar, nr 7 Junior 2005, nr 4 Cadet 2002.

5 Vad menas med delbarhet? Finns det några andra fyrsiffriga tal som är delbara med 2006? Vilka tal är 2006 delbart med? Primtalsfaktorisera 2006. Jämför även Benjamin nr 17, CadetGy nr 2 och Student nr 12.

6 Efter hur lång tid visar deras klockorna samma tid igen?

7 Hur blir det om 1/9 av böckerna är romaner och 25 % är diktsamlingar? Ändra till andra procenttal, annat antal böcker, t ex 0 – 50, 100 – 150. Ge exempel på hur andelen böcker/diktsamlingar skulle vara för att uppfylla de andra svarsalternativen.

8 Vilka vinklar bildar de andra bågarna? Koppla uppgiften till medelpunktsvinklar och randvinklar.

9 Hur stor procentuell rabatt får man om man samlar kuponger och köper fler påsar?

10 Går det att bestämma talen a, b, c, d och e entydigt?

11 Diskutera med eleverna hur man ställer upp en ekvation för att lösa problemet. Ett klassiskt problem på samma tema är det om Diofantos:

Han tillbringade en sjättedel av sitt liv som barn. Efter ännu en tolftedel lät han skägget växa. En sjundedel av sitt liv senare gifte han sig. Fem år därefter föddes hans son, som blev hälften så gammal som fadern. Diofantos dog fyra år efter sin son.

12 Vilken area har de olika kvadraterna? Vilka sidlängder har rektangeln? Ett liknande problem är nr 18 på CadetGy. Liknande problem är nr 10 Benjamin 2002, nr 19 Benjamin 2003.

13 Resonera om lösningsmetoder. Sifferkombinationer har förekommit tidigare, se nr 22 Cadet 2003.

14 Vad vet man om trianglarna som bildas? Kan man säga något om sexhörningens area? Diskutera likformighet, topptriangelsatsen, transversalsatsen. Vilka andra typer av månghörningar kan man få när trianglarna delvis överlappar varandra? Vilken omkrets har de?

15 På hur många olika sätt kan man välja första vagnen, andra vagnen osv? Ta upp multiplikationsprincipen. För in begreppet $n!$. Låt eleverna skriva ut vagnarnas möjliga placeringar för att se ett mönster. Liknande problem är t ex nr 12 CadetGy 2004.

16 Om man tar en boll av varje färg vad kan man då säga om antal bollar som har en gemensam färg? Vad vet vi då om vi tar ytterligare en boll? Fortsätt resonemanget, fråga t ex hur många bollar man måste ta upp för att vara säker på att minst elva av dem har en gemensam färg. Se även nr 9 på Student och nr 18 Student 2005, nr 19 Junior 2005, nr 12 Student 2004

17 Vilken sammanlagd ålder har familjen Dobson? Använd algebra för att låta eleverna skriva uttryck för familjens medelålder både med och utan pappan. Låt därefter eleverna lösa uppgiften med ekvation. Liknande problem, nr 7 Cadet 2003, nr 18 CadetGy 2004.

18 Vilka är de tvåsiffriga kvadrattalen? Vilka tal kan vi bilda av dem, så att de uppfyller villkoret?

19 Diskutera olika lösningsmetoder. Skriv ett uttryck för den stora kvadratens sida där den korta sidan x ingår. Vilken ekvation kan man då ställa upp? Vilken omkrets har det L-formade området? Jämför även nr 6 på Student.

20 Be eleverna själv hitta exempel som motsäger påståendena A – D. Arbeta med rationella tal.

21 Diskutera olika lösningsmetoder. Vilken omkrets har det skuggade området?

22 Låt eleverna placera ut talen och utföra operationen. Vilket mönster bildas? Varför blir den nya summan tre gånger den föregående. Diskutera hur man kan visa det.

23 Går det att bestämma arean av de övriga delområdena?

24 Låt eleverna arbeta med konjugatregeln och skriva om uttrycket y som en summa av kvadrattermer. Talet x kan man tolka som summan av kvadrater med sidan n, $n = 1, 2, 3, \ldots, 2005$. Talet y kan man tolka som summan av rektanglar med sidorna $(n-1)$ och $(n+1)$, $n = 2, 3, \ldots, 2005$. Jämför för samma värde på n differensen mellan kvadraten och rektangeln, t ex för $n = 2$, kvadraten är 2^2, rektangeln är $1 \cdot 3$, differensen är 1, osv. Jämför även uppgift 1 på Student.