

## Kortfattade lösningar med svar till Gymnasiets Cadet 2006

3 poäng

- 1 B  $2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 6 + 2006 = 0 + 2006$
- 2 A De tal som ger rest 2 är 8 och 38, summan är 46.
- 3 D Första siffran längst till vänster måste vara så liten som möjligt, dvs 2. Därefter väljer vi det tal som har lägst begynnelse-siffran. Det ger 2 309 415 687
- 4 D De rektangulära hålen befinner sig på diagonalt motstående kanter.
- 5 D Dela in pentagonen i fem likbenta trianglar. En och en halv triangel är skuggad, dvs 30 %. Alt: Genom att dra linjer från mittpunkten till hörnen och till sidornas mittpunkter får vi 10 rätvinkliga trianglar varav 3 är skuggade, 30 %.
- 6 B Den stora kuben har arean  $6 \cdot 3 \cdot 3$ , den lilla  $6 \cdot 1 \cdot 1$ . Den gemensamma ytan ska inte målas. Det ger  $54 - 1 + 6 - 1 = 58$ .
- 7 B 2001. Addition eller subtraktion av två udda tal ger alltid ett jämnt svar.
- 8 B  $5 \cdot 5 = 25$  som är 5 gånger så stort som 5, dvs 400 % ökning.  
 $6 \cdot 6 = 36$  som är 6 gånger större än 6, dvs 500 % ökning.  
Antag att talet är  $x$ , då gäller  $x^2 = x + 5x$ ,  $x^2 = 6x$ , dvs  $x = 6$ .

4 poäng

- 9 D 27 cm. Den tredje sidan måste vara kortare än 14 cm, dvs maximalt 13 cm.
- 10 D Kvadratens sida är  $4 \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ . Varje kant i stjärnan har samma längd som kvadratens sida. Omkretsen är  $8 \cdot 20 \text{ cm} = 160 \text{ cm}$ .
- 11 D 2000 barn har deltagit. Totala antalet tävlingsstarter är  $1500 + 1200 = 2700$ . Alltså måste  $2700 - 2000 = 700$  ha dubblerat.
- 12 E Varannan tisdag i månaden är udda, så det måste rymmas fem tisdagar i månaden och första tisdagen måste vara jämn. Tisdag den 2:e går men tisdag den 4:e eller senare går inte. Det betyder att det var tisdag den 2:e, 16:e och 30:e. Den 21:e var alltså en söndag.
- 13 D Att baka en extra paj till varje barnbarn minskar "pajöverskottet" med 5, alltså finns just fem barnbarn. Med ekvation: Antag att mormor har  $x$  barnbarn.  $2x + 3 = 3x - 2$ , dvs  $x = 5$ .
- 14 C Genom att placera cirkelns diameter längs den stora rektangelns diagonal ser man att diagonalen i en liten rektangel är  $10/4 \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$ . Omkretsen är  $8 \cdot 2,5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ .
- 15 A  $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \text{ liter} - 20 \text{ cl} = \frac{1}{4} \text{ liter} - 20 \text{ cl} = 25 \text{ cl} - 20 \text{ cl} = 5 \text{ cl}$ .
- 16 B Vagnarna kan totalt arrangeras på  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  sätt efter lokomotivet. I hälften av arrangemangen kommer vagn 1 att vara närmare loket än vagn 2.

5 poäng

- 17 B Alex del var 40% av 40%, dvs 16% av tältpriset. Ivans del var  $100\% - 60\% - 16\% = 24\%$ . Om 24% motsvarar 240 kr så kostar hela tältet 1000 kr.
- 18 B Genom att lägga tre små vita kvadrater längs den stora vita kvadratens högra kant ser vi att tre grå motsvarar fyra små vita kvadrater. Sidlängden hos en liten vit kvadrat är då  $3 \cdot 8 / 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$  och den stora vita har sidlängden  $3 \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$ .  
Med ekvation: Kalla den stora vita kvadratens sida för  $x$  och den lilla vita kvadratens sida  $y$ . Då gäller att  $x = 3y$  och  $x + y = 24$ .
- 19 E Klotsen är antingen fyrkantig eller rund (Påstående 5) och den är antingen blå eller gul (P3). Gul är fyrkantig (P4), men fyrkantig är röd (P2), vilket inte kan stämma. Det ger att den är blå och därför (P1) rund.
- 20 D Antalet gröna är lika många som de röda, men de blå är 10 fler. Dessa 10 blå har 50 antenner, och de återstående har 200, där hälften, alltså 100, finns på 20 blå utomjordingar, totalt  $20 + 10 = 30$ .  
Med ekvation:  
Antag att det finns  $x$  gröna rymdfigurer med 2 antenner. Då finns det även  $x$  röda rymdfigurer, vardera med 3 antenner. Vidare finns det  $x + 10$  blå rymdfigurer med 5 antenner var. Det ger  $2x + 3x + 5(x + 10) = 250$ . De blå är 30 st.
- 21 E Talet måste vara  $2a^2$  eftersom det bara minskar med 36 när tvåan sätts först,  $22a$ .  $a$  måste vara jämnt och vi prövar oss fram till 6.  
Låt det ursprungliga talet vara  $ab^2$ . Det nya talet blir  $2ab$  och det gäller att
- $$\begin{array}{r} 2ab \\ + 36 \\ \hline ab^2 \end{array} \quad \text{Då måste } b = 6 \text{ och} \quad \begin{array}{r} 2a6 \\ + 36 \\ \hline a62 \end{array} \quad \text{och } a = 2. \text{ Siffersumman är } 10.$$
- 22 A För att få den 31:a måste man lägga till  $2 \cdot 31$  "kantstickor" och  $2 \cdot 31$  "förbindelsestickor" dvs  $4 \cdot 31 = 124$  stickor. För att komplettera figur  $n$  för att få figur  $(n + 1)$  behövs  $(n + 1) \cdot 4$  stickor.
- 23 E Vi undersöker de olika alternativen.  
A är falsk, om vi väljer talen 10, 9,91 och 0,09, så är produkten 99,1.  
B är falsk, välj t ex talen 1999999/100000, 6/1000000 och 4/1000000, så blir produkten  $11999994/100000000000 = 0,00011999994$ .  
C är falsk, välj t ex talen 18, 25/18 och 11/18, så blir produkten 25.  
D är falsk, välj t ex talen 9, 25/3 och 8/3, så blir produkten 75.
- 24 C Antag att Aylas hastighet är  $v$  m/s. Då gäller att  $3v = v + 3$ , dvs  $v = 1,5$ . Aylas nya hastighet blir 7,5 m/s, vilket är 5 gånger snabbare.

## Arbeta vidare med Gymnasiets Cadet 2006

Vi hoppas och tror att du finner många intressanta idéer bland årets Känguruaktiviteter och att denna problemsamling kan inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag att arbeta vidare med.

Eleverna kan lösa Känguruproblemen med olika representationer. De kan arbeta laborativt eller genom att rita bilder. De kan resonera språkligt, både skriftligt och muntligt och lösa problemen med uträkningar. Samma problem kan förstås lösas på flera olika sätt. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt. De kan gemensamt försöka finna olika lösningsmetoder, sedan jämföra och se vilken de finner enklast eller mest spännande. De kan formulera egna aktiviteter eller exempel med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över problem. Att jämföra olika uppgifter och göra kopplingar till händelser och upplevelser i eller utanför skolan är en bra utvecklingsmöjlighet. Att se likheter mellan olika problem, att se det som är gemensamt och generellt är en väsentlig del av problemlösning.

Flera av exemplen har anknytning till uppgifter som varit med i tidigare omgångar. Vi visar på några sådana kopplingar, men det finns fler och också möjligheter att gå vidare till andra Känguruklassers problemsamlingar. Alla tidigare problem, som varit med sedan starten i Sverige, finns att hämta på namnaren.ncm.gu.se

Det finns naturligtvis mycket annat att göra, än det vi tar upp här. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på *Kängurusidan* i *Nämnan* eller på nätet.

- 1 Här kan det vara lämpligt att diskutera prioriteringsregler, att multiplikation och division går före addition och subtraktion. Alternativa uppgifter kan tas upp för att göra detta tydligt t ex  $2006 - 6 \cdot 0$ ,  $2006 - 6/6$ ;  $2006 - 1 \cdot 2005$ .

Problemet kan utvecklas genom att vi inför parenteser:

$$2 + 0 \cdot (6 + 2006); (2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 6 + 2000) \cdot 6; 2 \cdot (2006 - 6); 2006 - 6 \cdot (2000/6).$$

Liknande problem är Cadet 2003:2 och 2004:1.

- 2 Uppgiften ger anledning att ta upp heltalsdivision och rester. Vilka rester får vi om vi dividerar talen på blommans kronblad med 6? Varför blir det just 1, 2, 3, 4 och 5? Vad innebär det att ett tal är delbart med 6? Jo, att det kan skrivas som en heltalsfaktor gånger 6 t ex  $18 = 3 \times 6$ ,  $48 = 8 \times 6$ . När vi dividerar 28 med 6 så får vi resten 4,  $28 = 4 \times 6 + 4$  och när vi dividerar 38 med 6 får vi resten 2,  $38 = 6 \times 6 + 2$ . Tolka  $a = k \cdot b + r$  om  $a$  och  $b$  är positiva heltal och  $r$  är resten, då  $a$  divideras med  $b$ .

Fler problem kring delbarhet finns i årets Benjamin:17, Junior:5 och Student:12.

- 3 Det kan vara bra att börja med ett enklare alternativ t ex med 9, 5, 8 och 3 på lappar och sedan med t ex 19, 63, 24 och 217 för att diskutera hur positionssystemet fungerar. Då är det lämpligt att också fundera över hur lapparna ska läggas för att få så *stort* tal som möjligt.

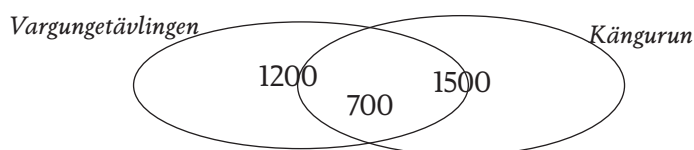
Hur många olika 10-siffriga tal kan vi bilda av de sex ursprungliga talen? Ge exempel på tal på lapparna så att alternativ A är det korrekta? Alternativ B?

En utvidgning är att diskutera hur man med lapparna ska lägga två tal som har så liten eller så stor summa/differens som möjligt. En annan variant är att låta eleverna addera eller subtrahera talen och se vem som kommer så nära noll som möjligt.

- 4 Erfarenhetsmässigt har det varit låga lösningsfrekvenser på problem av den här typen vilket tyder på att en del elever ägnat för litet tid åt att utveckla rumsuppfattning. Det kan vara bra att låta eleverna bygga kuber utifrån alternativen A – D och ge uppgifter av typen: Hur ska kuben tecknas för att alternativ A ska vara det korrekta?

Tidigare, liknande problem: t ex Benjamin 2003:10, Cadet 2005:5, Cadet 2005:7.

- 5 Frågor att ta upp när det gäller månghörningar och vinklar: Vad menas med en regelbunden månghörning? Vilken vinkelsumma har en trehörning, dvs triangel? En fyrhörning? En femhörning? I en regelbunden femhörning kan medelpunkten förbindas med varje hörn och ger då fem likbenta trianglar. Hur stora är vinklarna i dessa trianglar? Hur stora är femhörningens vinklar? Vinkelsumman? Hur kan man bestämma vinkelsumman i en godtycklig femhörning?  
Problem med vinklar: Cadet 2002:21, Cadet 2003:24 och Cadet 2004:19.
- 6 Här kan vi titta på olika relationer inom och mellan de två kuberna. Hur stor volym har den lilla och den stora kuben? Hur många småkuber ryms i den stora kuben? Hur många gånger större är den stora kubens volym? Hur är relationen mellan areorna? Istället för att placera en liten kub ovanpå den stora kan vi skära ut en liten kub från den stora kuben. Vilken area får figurens hela yta då? Jämför även med årets uppgifter Benjamin:16 och Ecolier:16.
- 7 Diskutera vad som kännetecknar jämna och udda tal, vad som händer när man adderar, subtraherar eller multiplicerar två jämna tal, två udda tal, ett jämnt och ett udda tal. Prova er fram med olika exempel och resonemang. Det kan hanteras algebraiskt för en del elever: anta att två jämna tal kan skrivas  $2n$  och  $2m$ , udda tal  $2n + 1$  och  $2m + 1$ , där  $n = 0, 1, 2, \dots$  och  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Addera, subtrahera, multiplicera två av talen och tolka resultaten.
- 8 Vilken är ändringsfaktorn om ökningen är 5%, 50%? 500%? Vad blir ändringsfaktorn och vilka ökningarna i procent ger kvadrering av talen 2, 3 och 4?  
Vilka tal minskar med 19%, 36%, 51%, 64%, 75% när de kvadreras? Vad är karakteristiskt för talen som ger minskning?
- 9 Diskutera villkor på sidornas längder för att de ska bilda en triangel – summan av två sidors längder är större än den tredje. Be eleverna rita de trianglar där samtliga sidors längder är ett helt antal centimeter och två av sidorna är 7 cm. Se också Cadet 2003:16 och Cadet 2004:14.
- 10 För att studera relationer och pröva sitt kunnande om olika delar av figuren, så kan elever bestämma kvadratens sida och de liksidiga trianglarnas sidor. Vilken area har olika figurer, t ex delarna utanför cirklarna men innanför kvadraten? Triangeln och hela figurens area? Be eleverna klippa ut figuren och vika ihop den. Vad kallas den erhållna rymdfiguren? Vilken volym har den? Ett liknande problem i årets Känguru finns i Junior, nr 14.
- 11 Rita gärna mängder som visar antalen skolbarn som har deltagit i respektive tävling.



Vilka relationer finns det mellan dessa mängder?

Hur ska uppgiften ändras för att E ska bli det korrekta alternativet?

Liknande problem har förekommit tidigare, t ex Cadet 2002:22 och Cadet 2005:9.

- 12 Ta fram en almanacka och se efter hur datumen fördelas eller gör en egen för en månad. Första tisdagen måste vara den 2:e, se nedan.

söndag	måndag	tisdag	onsdag	torsdag	fredag	lördag
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Liknande problem: t ex Cadet 2002:15 och 2004:10. Se också årets Benjamin:19.

13 Eftersom mormor får tre pajer över vid första baket så måste barnen vara minst fyra. Men om de verkligen är fyra så skulle degen räcka till 11 pajer och då stämmer inte antalet med det andra baket (12). Men om vi prövar med 5 så stämmer det. Jämför detta resonemang med det i "svar och korta lösningar".

Liknande problem har förekommit tidigare, t ex Cadet 2005:14 och Junior 2004:8.

14 Här gäller det att tänka på, att "se", att även rektangelns diagonal är en diameter och alltså 10 cm. Exempel på undersökningar att arbeta vidare med:

Hur stor del av den stora rektangelns area utgör den markerade figuren?

Hur stor del av cirkelns area?

Om rektangeln har lika långa sidor, hur stor blir då den skuggade figurens area?

Andra problem som tar upp längder av sträckor är Cadet 2005, nr 7 och 18.

15 Hur många centiliter innehåller flaskan innan man häller ut 20 cl? Hur mycket innehåller  $\frac{1}{3}$  liter om den är fylld till hälften? Till  $\frac{3}{5}$ ? Hur många procent svarar det mot?

Öva på omvandling mellan olika rymdått.

Liknande problem se t ex Cadet 2002:8, 2003:17 och 2005:8.

16 På hur många olika sätt kan man välja första vagnen, andra vagnen osv?

Ta upp multiplikationsprincipen. För in begreppet  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

Låt eleverna skriva ut vagnarnas möjliga placeringar för att se ett mönster eller rita ett träd-diagram då antalet vagnar är 2, 3, 4, 5.

Liknande problem har förekommit tidigare, t ex CadetGy 2004:12.

17 Hur många procent av tältets pris ska Alex och Ivar betala tillsammans?

Hur många procent av tältets pris betalar Ivar? Alex? Hur mycket betalar Stina respektive Alex?

Något svårare procentuppgifter är Cadet 2002:19 och 22.

18 Uppgiften ger tillfälle att jämföra kvadraters och rektanglars sidor och areor. Hur långa är rektangelns sidor? Vilken area har den stora kvadraten, en grå kvadrat, en liten vit kvadrat, rektangeln?

Gör en motsvarande uppgift med fyra grå kvadrater var och en med sidan 10 cm och fyra små vita kvadrater. Vilken sidlängd får den stora vita kvadraten då?

En annan variant finns i Junior 2006, nr 12.

Liknande problem har förekommit tidigare, t ex Benjamin 2002:10 och Benjamin 2003:19.

19 Här är det fråga om att diskutera logiska konsekvenser och motsägelser. Gå igenom Josefs påståenden ett och ett och jämför med svarsalternativen.

Se också Cadet 2002:7 och 12, Cadet 2004:18.

20 Diskutera de två lösningsmetoder som nämns i svar och korta lösningar. Vilken föredrar eleverna och varför? Hur många utomjordingar är det sammanlagt?

Ändra förutsättningarna, t ex så att det är 10 fler gröna än röda.

Liknande problem är Cadet 2003:13 och 2005:4.

21 Även här är det bra att diskutera olika lösningsmetoder. Formulera problemet så här istället: Den första siffran i ett tresiffrigt tal är 2. Om denna siffra flyttas från första till sista plats så minskar talet med 36. Vilket är det ursprungliga talet?

Andra problem av liknande slag är Cadet 2005:11 och 16.

- 22 Låt eleverna bygga tändstickskvadraterna.  
Beskriv hur antalet tändstickor ökar från den 2:a till den 3:e och sedan från den 3:e till den 4:e. Försök att se mönstret och formulera en regel eller formel för hur man kan beräkna ökningen av antal tändstickor när man bygger en ny kvadrat. Beskriv med en formel antal tändstickor i den  $n$ :te kvadraten.  
Pröva även nr 12 på Ecolier och utveckla det problemet till en formel för den  $n$ :te våningen.  
Liknande problem är Benjamin 2002:24
- 23 Be eleverna själva hitta exempel som motsäger påståendena A till D. Arbeta med rationella tal.  
Talteoretiska uppgifter från tidigare: Cadet 2003:22, 2004:21 och Cadet 2005:21
- 24 Diskutera olika lösningsmetoder. Ändra förutsättningar, t ex så att Ayla cyklat 2 m/s fortare och kommit fram dubbelt så snabbt. Hur mycket snabbare kommer hon fram om hon ökar sin hastighet med 4 m/s?  
Liknande problem är Cadet 2002:24, CadetGy 2004:22 och Student 2005:16.

#### *Litteraturförslag*

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem*. Stockholm: Liber.  
Persson, U. & Toom, A. (2006). Ryska matematiska skolproblem i *Nämnamnaren 1, 2006*. s 19 – 27.  
*Nämnamnaren*. Varje nummer innehåller Problemavdelningen, Kängurusidan och DPL, Dialoger om problemlösning, för lärares arbete med problemlösning.  
namnaren.ncm.gu.se Kängurusidan, PDF-arkivet: Problemavdelning och DPL.