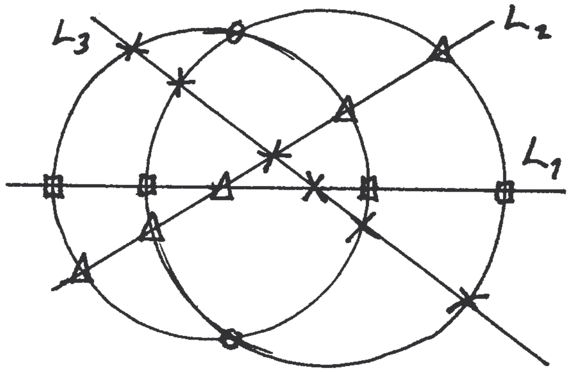
KÄNGURU SIDAN

Känguruutveckling

Ett viktigt inslag i Kängurutävlingen arbetet med tävlingsuppgifterna efter tävlingen. Här kommer ett förslag till utveckling av en uppgift insänt av Svante Silvén, Karlstad.



Den uppgift som behandlas från Cadet 2002 är:

5-poängsproblem

17. Kristoffer ritar två cirklar och tre linjer på ett papper. Vilket är det största möjliga antalet skärningspunkter mellan dessa geometriska figurer?

Det borde stå tre räta linjer i texten. Man kan givetvis nöja sig med att rita en noggrann figur och räkna maximala antalet skärningspunkter. Att söka struktur i problemet kan dock ge mer:

Rita först de två cirklarna, vilket ger två skärningspunkter maximalt. Den första linjen, L_1, ökar antalet skärningspunkter med fyra, dvs totalt får vi

$N_1 = 2 + 4 = 6$ skärningspunkter.

Nästa räta linje L_2 ger ytterligare maximalt hur många? Jo, fyra med cirklarna och en med linje L_1 dvs

$N_2 = (2 + 4) + 4 + 1 = 11.$

Hur ökar L_3 antalet skärningspunkter? Jo, fyra med cirklarna, som tidigare, och två med L_1 och L_2 dvs

$N_3 = (2 + 4 + 4 + 1) + 4 + 2.$

Detta skriver vi kortare

$N_3 = 2 + 3 \cdot 4 + 1 + 2.$

Med ännu en linje har vi

$N_4 = (2 + 3 \cdot 4 + 1 + 2) + 4 + 3$

dvs

$N_4 = 2 + 4 \cdot 4 + 1 + 2 + 3.$

Om vi sammanfattar kan vi börja leta efter mönster

$N_1 = 2 + 1 \cdot 4 = 6$

$N_2 = 2 + 2 \cdot 4 + 1 = 11$

$N_3 = 2 + 3 \cdot 4 + 1 + 2 = 17$

$N_4 = 2 + 4 \cdot 4 + 1 + 2 + 3 = 24$

Man anar strukturen:

2 + antalet linjer · 4 + 1 + 2 +3 + … +(antalet linjer – 1).

Dvs med n stycken linjer

$N_n = 2 + n \cdot 4 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1).$

Kan vi uttrycka detta enklare? De elever som sett

$S_{99} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 = 99 \cdot 100 / 2$

och helst även

$S_m = 1 + 2 + 3 + \ldots + m = m \cdot (m + 1) / 2$

kan då känna igen den sista delen av uttrycket och då får vi:

$N_n = 2 + 4n + n(n - 1)/2$

$N_n = 2 + ((8n + n^2 - n)/ 2 = 2 + (n^2 + 7n)/2$

$N_n = (n^2 + 7n + 4)/2$

Formeln bör testas mot några kända värden, helst utan räknare!

$N_0 = 2$

$N_1 = 6$

$N_2 = 11$

Formeln $N_n = 2 + 4n + n(n - 1)/2$ ger kanske lättare beräkningar utan räknare.

$N_3 = 2 + 4 \cdot 3 + 3(3 - 1) / 2 = 17$

$N_4 = 2 + 4 \cdot 4 + 4(4 - 1)/2 = 24$

Att både metoden med noggrant ritande och den med strukturtänkande med sin formel ger samma värden, gör att metoderna stärker varandra.

Ett annat angreppssätt är att arbeta numeriskt. Om eleverna ”rakt fram” bestämmer antalet skärningspunkter till 2, 6, 11 och 17, kan man låta dem gissa nästa antal genom att studera sviten för att se att de successiva differenserna blir:

$6 - 2 = 4$

$11 - 6 = 5$

$17 - 11 = 6$

Om differensen ökar med ett ger detta:

$N_4 = 17 + 7 = 24$

Hur kan man veta att differensen fortsätter att vara ett? Låt de intresserade eleverna räkna på

$N_{n+1} - N_n = 2 + 4(n + 1) + (n + 1)n / 2 - (2 + 4n + n(n - 1)/ 2) = 4 + n$

$N_{n+1} - N_n = 4 + n$

som ju ger differenserna 4; 5; 6; 7 …