

Lärares tankar vid arbete med rika problem

Detta är den tredje artikeln i serien om arbete med rika problem. Övriga artiklar var införda i Nämnaren nummer 3, 2004 respektive nr 1, 2005. I denna artikel ges exempel på hur lärare ser på sin uppgift: vilka kunskapsmål och sociala mål de strävar efter att uppnå och tror sig ha uppnått för sina elever, hur lärarna ser på RIMA-problemen och på de Lösingsstrategier som eleverna använder samt vad lärarna själva har upptäckt under projektet.

I denna artikel vill vi främst stanna vid lärarnas tankar i samband med elevernas arbete med problemen, hur lärarnas förväntningar såg ut före lektionerna och hur de efteråt ansåg att dessa förväntningar uppfylldes. Artikeln bygger på de intervjuer som en av oss gjorde med de i projektet deltagande lärarna före och efter problemlösningstillfällena.

Riktlinjer för arbete med problemlösning finns i våra kursplaner och bedömningskriterier. I grundskolans bedömningskriterier kan man bland annat läsa:

Eleven använder matematiska begrepp och metoder för att formulera och lösa problem.

Eleven följer och förstår matematiska resonemang.

(Skolverket, 2000a)

Rolf Hedrén är biträdande professor emeritus i matematikdidaktik, roh@du.se

Kerstin Hagland är universitetsadjunkt i matematikdidaktik, kha@du.se

Eva Taflin är fil.lic och universitetsadjunkt i matematikdidaktik, evat@du.se
Alla vid Högskolan Dalarna.

För gymnasieskolan hittar vi motsvarande i bedömningskriterierna:

Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.

Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.

(Skolverket, 2000b)

Stor vikt läggs i kursplaner och bedömningskriterier vid att eleven kan resonera och argumentera och också kan ta del av andras argument. Eleven ska också kunna, som vi tolkar det, formulera egna matematiskt intressanta problem.

De två tidigare artiklarna i denna serie finns tillgängliga i sin helhet på namnaren.ncm.gu.se Den första, *Problem med Stenplattor*, fanns i nummer 3, 2004. I den finns problemet *Stenplattor* till vilket det finns hänvisningar i denna artikel. I den andra artikeln *Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till?* som fanns i nummer 1, 2005 återfinns problemen *Skolan* och *Godisbitar*.

Lärares tankar kring kunskapsmål

Strävansmål

Under intervjuerna både före och efter lektionerna med rika problem visade lärarna vid åtskilliga tillfällen att de var medvetna om kursplanernas strävansmål och ansåg att de kommit ett bra stycke på väg mot dessa mål.

När eleverna arbetade med problemet *Stenplattor*, som en tidigare artikel handlat om (i nr 3, 2004), yttrade en av lärarna vid förintervjun:

... tycker jag att vi börjar komma någon vart med det här RIMA, då börjar vi verkligen komma in på det här jag citerar – utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande. Jag tycker att det är det vi håller på med hela tiden lite grann att det vi håller på med hela tiden, det är lite grann dit jag vill komma och jag tycker att dom har blivit duktigare.

En annan lärare sade vid efterintervjun i samband med samma problem att det blir mer diskussioner i samband med RIMA-problemen. Eleverna lärde sig att reflektera över vad de gör, de förstod att det är viktigt att det är de själva som tänker och löser uppgifter och att det är väsentligt att de lyssnar på sina kamrater. Eleverna lärde av varandra genom att sätta ord på sina egna tankar. "Dom hör ju att tänker du så ja då stämmer det med vad jag tänker också så." Självt ville han se sig som en naturlig samtalspartner, en sådan som det är bra att kunna vända sig till.

I samband med problemet *Skolan*, som innehåller tal i bråkform samt procent (i nr 1, 2005) menade en lärare att han hade arbetat för en grundförståelse av rationella tal och det som hör ihop med dem, att eleverna behövde veta mer om dem än vad han och skolan i allmänhet erbjuder, att man inte ska ha så bråttom att ta upp mer avancerade moment utan arbeta grundligare. Han ansåg sig kunna lära vilken elev som helst att dividera bråk med varandra, men om han kunde få eleven att förstå det, det var en helt annan sak. Han såg problemet som ett test på om eleverna förstår vad de gör helt enkelt.

Uppnåendemål

Lärarna visade också att de försökte planera och genomföra sina lektioner med rika problem så att eleverna skulle nå vissa av uppnåendemålen. Lärarna gav sina elever följande problem i skolår 7:

Ahlgrens bilar

- 32 Ahlgrens bilar kostar 10 kronor. Hur många bilar får du för 25 kronor.
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

(Se Godisbitar i nr 1, 2005.)

Lärarna valde dessutom att utvidga a-problemet på olika sätt.

Före problemlösningstillfället sade en av lärarna att hon skulle laborera och experimentera och se vad eleverna kunde komma fram till. Hon hoppades komma fram till en grafisk lösning av problemet och ett uttryck för räta linjens ekvation. Hon var väl medveten om att eleverna inte hade arbetat med sådant tidigare men såg problemet som ett utmärkt tillfälle att få eleverna att bekanta sig såväl med grafer som med variablerna x och y . Hon ville att eleverna skulle vara ett stycke på väg, när de så småningom träffar på dessa moment i skolår 8 och 9. Samtidigt menade hon att problemet gav eleverna tillfälle att repetera tidigare inhämtade kunskaper, till exempel kort division. Hon tillade: "Det brukar ju aldrig bli som man har tänkt sig, så då är det väl intressant med alla sidospår om dom nu är på alerten."

Efter lektionen konstaterade läraren att förväntningarna i stort sett hade uppfyllts. För att hjälpa eleverna på vägen hade hon lagt till några extra frågor:

Hur mycket kostar en bil?

Hur många bilar får man för en krona?

Vad kostar 100 bilar?

Hur många bilar får man för 100 kronor?

Hon hade visat eleverna hur de kunde göra en tabell och föra in x och y i den och dessutom rita en graf över sambandet mellan variablerna. Hon nämnde dessutom ett par elever som visat att de hade fattat sammanhanget. Samtidigt var hon medveten om att hon inte hade alla elever med sig och konstaterade självkritiskt att hon nog skulle ha

lagt sig på en något lägre nivå för att ha hela klassen samlad kring den matematik som problemet kunde leda in i.

Samma lärare berättade också att hon kunde dra paralleller till sin undervisning i kemi i klassen. Där hade eleverna värmt vatten till kokpunkten, mätt temperaturen varje minut och lagt in värdena i en graf.

Lärares tankar om elevernas egna strategier

Det var också intressant att få ta del av hur lärarna såg på de lösningsmetoder som eleverna förväntades välja och de som i realiteten sedan användes.

Vid problemet *Stenplattor*, som var en mönsteruppgift (nr 3, 2004) förväntade sig en av lärarna att eleverna skulle börja med att titta på figurerna och räkna plattor, kanske också använda konkret materiel för att komma fram till svaret. Men hon insåg samtidigt att det var en något klumpig metod som inte kunde tillämpas när antalet plattor blev stort. Hon hoppades att eleverna skulle hitta nya metoder, att de med logiska resonemang skulle kunna ta sig fram till en bättre metod, en metod som också skulle kunna föra över till att uttrycka antalet plattor för den n :te figuren med hjälp av variabeln n . En intressant iakttagelse i sammanhanget är att denna lärare inte hade tänkt sig att eleverna skulle komma fram till antalet plattor via en beräkning av plattornas area, vilket det senare visade sig att de i stor utsträckning gjorde.

En annan lärare konstaterade efteråt att eleverna på problemet *Skolan* (nr 1, 2005) ofta hade använt sig av strategin "*gissa, testa och kolla om det stämmer*" för att sedan eventuellt få fram något mönster av det. I ett annat sammanhang kallade han denna metod för "*uttänkta chansningar*". Han ansåg inte att den strategin skulle vara till någon nackdel. Själv bidrog han i flera fall genom att ge eleverna orimliga förslag, 150 respektive 301, som uppenbarligen inte stämde med villkoren, detta gjorde han för att leda in eleverna på vettiga spår. Han ville också att eleverna skulle komma fram till *alla* lösningar och kunna visa att det inte fanns några fler, att lösningarna helt enkelt var de tal

mellan 300 och 400 som var delbara med 15. Han konstaterade att vissa grupper närmade sig denna lösning men att ingen hade nått riktigt ända fram.

Han lade också märke till en annan intressant sak, att verkligheten kunde påverka elevernas problemlösning. Många elever började fundera på hur många elever det fanns i deras egen skola. Att han i problemtexten hade använt sig av det verkliga numret på en buss, som gick förbi skolan, trodde läraren kunde ha bidragit till elevernas sidospår. (Lärarna hade möjlighet att göra smärre justeringar i problemtexten.)

Kanske kan lärarnas tankar helt kort sammanfattas med detta uttalande från en av lärarna: "*... dom får känna att dom löser ett problem med de strategier och grundkunskaper som dom har tillgängliga, och sen kommer dom att använda dom för att diskutera och utveckla strategier och grundkunskaper ännu mer.*"

Hur såg lärarna på RIMA-problemen?

Lärarna såg gärna att problemen passade in med de moment som de höll på med i den vanliga matematikundervisningen. En lärare sade till exempel så här inför arbetet med *Stenplattor*: "*... då blir det något helt, inte bara något som man plockar in som inte har något sammanhang med det dom håller på med, sen det här med area ...*". Hon planerade också för att ge ett prov med liknande uppgifter som även behandlade övergång mellan olika areaenheter.

En av lärarna menade att det blir "*mer ordentligt gjort*" när eleverna arbetar med RIMA-problemen. Han påpekade att arbetet med problemet blir mer omfattande, samtidigt som det blir mindre stressigt. Man hinner kanske mindre under ett lektionspass, men det blir bättre kvalitet på det som görs. Han framhöll också fördelarna med grupparbete: "*Speciellt om två tror att de har rätt och argumenterar för sin sak, då lär dom sig mycket, så det där skulle man vilja få fram mera.*" Men han funderade också på om några elever kunde förlora på arbetet med rika problem, kanske de riktigt högpresterande skulle kunna utnyttja 45 minuter på ett effektivare sätt. Motsvarande tankar kom

fram hos en annan lärare: "För de högpresterande gäller det att utnyttja lektionen på rätt sätt om de ska få ut någonting av den."

En lärare menade: "... i boken finns det också lite problem, men det här blir mer omfattande och framför allt så stöter dom på en sån här uppgift i boken då blir det lätt så att dom antingen ser en lösning och så går dom vidare snabbt utan att reflektera eller också så får dom problem och kanske frågar mej och så kanske dom förstår och så har man fler att hjälpa." Han ansåg därför att det var lätt hänt att han tog till lotsning när eleverna räknade ur boken.

Flera lärare framhöll att de automatiskt får en nivågruppering i klassen genom att problemen innehåller delproblem och genom att eleverna får möjlighet att hitta på egna matematiskt likartade problem. En lärare formulerade sig så här: "Det är väl som, det här tycker jag är bra typ av individualisering när man ser att en del kommer in på ganska väldigt avancerad matte för årskursen och lösa samtidigt som andra elever löser samma uppgift och också får rätt fastän på ett annat sätt." En lärare hade lagt märke till att även de svagpresterande kunde arbeta bra under hela problemlösningspasset, "dom sa själva att det var jättebra att man kunde hjälpas åt och se olika sätt". En lärare uttryckte att "det ska vara ett brett problem så att det finns många olika sätt att lösa det på, ... och att lösningarna ska vara så tydliga så att det känns när man har gjort rätt". Läraren ville att alla elever skulle kunna få den känslan.

Flera lärare framhöll också att matematiken blir roligare med problemlösning och att eleverna ser att de kan använda matematiken till någonting. Men vi vill också föra fram ett svar som intervjuaren fick på frågan om vad som var det bästa med lektionen kring ett RIMA-problem: "Att dom är fokuserade, att dom jobbar med matte."

Vad upptäckte lärarna under RIMA-projektet?

En viktig iakttagelse som många lärare gjorde var att eleverna gärna "tjuvlyssnade" på varandra och lärde sig matematik på det sättet. Någon uttryckte det så att det räckte med att läraren sade någonting till en grupp så hade det snabbt spritt sig till alla de andra

grupperna. En lärare menade också att eleverna har olika strategier för att få hjälp, en del tjuvlyssnar, en del tar kamraten till hjälp, andra tar hjälp av läraren medan "en del väntar till lektionen tar slut och dom andra börjar gå, då kan dom komma smygande, och en del kommer tidigt så att dom kan passa på att fråga då".

En lärare hade tankar kring förklaringsmodeller i samband med problemet *Stenplattor*:

Det känns lite spännande för mig nu, hur många som greppar det här med n, och det ska bli väldigt spännande att se hur mycket som jag måste förklara för dom. Jag har lite grann att ta på nu när det gäller förklaringar som inte är svar utan att hjälpa dom vidare i tankegången.

En lärare påpekade att mycket i matematiken kan vara självklart för läraren men inte för eleven. I samband med problemet *Skolan* gav han exemplet "för även om dom kan säga att hundra är en tredjedel av tre hundra, så är dom inte medvetna om att det är så man gör", det vill säga delar tre hundra med tre för att erhålla svaret hundra.

Ibland blev lärarna överraskade över att eleverna kom längre än vad lärarna hade förväntat sig eller att eleverna löste problemen fortare än vad läraren hade tänkt sig. Någon gång var det enstaka elever som förvånade läraren: "Ja, det trodde jag kanske att kanske någon men inte just dom skulle lösa det aktuella delproblemet."

Lärares sociala mål

Flera lärare påpekade att det är viktigt att alla elever kommer igång, att alla arbetar med problemet. De menade att det är viktigt att alla kan komma någonstans med problemen samtidigt som även de allra mest högpresterande kan se problemen som en utmaning. Ingen elev ska känna att hon eller han misslyckas, då är risken alltför stor att eleven ger upp helt och hållet vad gäller matematiken. Tvärtom ska problemlösning hjälpa till att stärka elevernas självförtroende, vilket lärarna också trodde sig ha sett exempel på. Se följande i intervju framför en videoinspelning.

Intervjuare:

Vad händer här, har du kommit fram till en grupp?

Lärare:

Jag påkallar hans uppmärksamhet. Han är så osäker och tror inte att han klarar någonting. Jag hoppas att jag kan stärka hans självförtroende.

Någon lärare var rädd för att hon inte skulle hinna med alla grupper vid problemlösandet, speciellt då hon ansåg att problemet *Stenplattor* snabbt blev svårt. Hon menade att eleverna inte får bli sittande och vänta på hjälp så länge att de tappar sugen, intresset och nyfikenheten.

När lärarna lät eleverna arbeta individuellt gjorde de detta för att var och en skulle få arbeta i sin takt och efter sin förmåga. Vid grupparbete lade lärarna mer vikt vid att eleverna fick tillfälle att öva på samarbete. (Lärarna kunde själva välja arbetsform.) I samband med arbete i grupp hade lärarna dock litet olika åsikter. En del ansåg att eleverna ska bilda grupper precis som de sitter, just för att de ska öva sig att samarbeta med vem som helst. Någon lärare lät eleverna bilda grupper själva men upptäckte att det ibland inte slog så bra ut. Någon elev kunde hamna bredvid andra som var alltför dominerande, så att hon eller han helt fick stå tillbaka för dessa. En lärare gav följande motivering: *"Det är så skönt för eleverna när lärarna gör gruppindelningarna, det är inga diskussioner, ... dom behöver inte favorisera varann, dom behöver inte gå omkring 'att hon vill nog att jag ska vara med henne'."*

Avslutande kommentarer

Det var intressant för oss att se att lärarna inte bara hade vissa i förväg givna kunskapsmål som de ville att deras elever skulle uppnå vid problemlösningstillfällena. De var också starkt medvetna om att de kunde komma in på helt andra matematiska moment beroende på de idéer eleverna förde fram och på elevernas reaktioner på lärarens och kamraternas förslag. Lärarna hade dessutom inte bara uppnåendemålen för ögo-

nen, de var också inriktade mot strävansmålen, till exempel att utveckla elevernas förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang.

Lärarna lät gärna sina elever arbeta med intelligenta gissningar eller *"uttänkta chansningar"* som en av dem uttryckte sig. De försökte vara noga med att inte lotsa sina elever fram till svaren utan i stället nöja sig med att ge dem råd och tips. De råde till exempel eleverna att göra en tabell, när de hade samlat på sig en mängd olika fall som de inte kunde bringa reda i. Ett annat sätt att stötta utan att lotsa var att ge förslag på svar, som uppenbart inte stämde med de givna förutsättningarna, detta för att eleverna skulle bli medvetna om att det var just dessa förutsättningar som de skulle utgå ifrån.

I stort sett var lärarna positiva till att arbeta med RIMA-problemen och de kunde se många olika fördelar med detta sätt att arbeta. Trots att hela klassen arbetade med samma problem, ansåg lärarna att det var ett sätt att individualisera undervisningen, genom att varje elev hade möjlighet att använda *sina* kunskaper och ta till sig *de* av kamraternas och lärarens *idéer* som passade in med just hennes eller hans förkunskaper. Lärarna ansåg dock att det var viktigt att problemen passade in i den övriga undervisningen. Trots att vi hela tiden diskuterade uppläggningsen med lärarna kunde detta i vårt projekt bereda en del svårigheter, eftersom fyra klasser från två olika skolor deltog och vi av praktiska skäl ville ge alla klasser samma problem ungefär samtidigt. Dessutom var flera av problemen medvetet gjorda så att de skulle kunna lösas med hjälp av kunskaper inom olika matematiska områden. Eleverna kunde då givetvis komma in på moment, som just då inte behandlades i undervisningen.

Vi vill också påpeka att lärarna inte bara såg till att eleverna skulle få bygga upp kunskaper i matematik i samband med problemlösandet. De sociala målen var också viktiga för dem. Mycket ofta nämnde de vikten av att ingen elev misslyckades, att ingen elev blev sittande utan att komma någon vart med problemet. Problemlösningen skulle tvärtom hjälpa till att stärka elevernas självförtroende.

Till slut vill vi tillägga att det sällan går att slumpvis välja ut de lärare som är villiga att delta i ett forskningsprojekt. Därför var vi också hänvisade till lärare som hade en speciellt positiv inställning till att arbeta med problemlösning. Det kan givetvis inte uteslutas att resultaten hade blivit annorlunda om vi verkligen hade studerat helt slumpvis utvalda lärare. Å andra sidan var vi givetvis intresserade av att studera vad problemlösning kan ge elever och lärare, om den läggs upp på ett så klokt sätt som möjligt.

Kanske kan följande citat vara en sammanfattning av lärarnas tankar:

Intervjuare

Vad ser du då för vinster med att alla gör samma uppgifter samtidigt, eller är det inga vinster?

Lärare

Det är diskussionerna man samlas runt. Man får mer möjligheter och jag får mer möjligheter att säga till hela gruppen.

Intervjuare

Du får alltså en annan lärarroll i den här gemensamma problemlösningen?

Lärare

Ja, o ja. ... Ja, jag tror mer och mer att det inte alls är så dumt att prata med hela klassen.

LITTERATUR

- Hedré, R; Taflin, E. & Hagland, K. (2004). Problem med stenplattor. *Nämnamnaren* 31(3), 12 – 17.
- Hedré, R; Taflin, E. & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till? *Nämnamnaren* 32 (1), 36 – 41.
- Hagland, K., Hedré, R. & Taflin, E. (2005) *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.
- Skolverket (2000a). *Grundskolan – kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2000b). *Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier för kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan och inom gymnasial vuxenutbildning*. SKOLFS 2000:5.

Matematisk problemlösning i skolan

Kurs 5 poäng distans
Högskolan Dalarna

Kursens övergripande mål är att de studerande skall bygga upp fördjupade kunskaper om matematisk problemlösning i skolan. Kursen är tänkt för både blivande och verksam lärare inom såväl förskola, grundskola, gymnasieskola som högskola.

Den studerande skall även få möjligheter att uppöva sin egen förmåga att lösa matematiska problem, sin förmåga att redovisa och motivera strategier och lösningar med hjälp av flera olika uttrycksformer samt sin förmåga att tolka och kritiskt granska andras matematiska idéer, argument och uttrycksformer.

Under kursen får de studerande även möjligheter att utveckla sin förmåga att kreativt och självständigt skapa, anpassa och utvidga olika typer av matematiska problem.

Kursen behandlar också hur lärare utifrån skolans styrdokument kan planera, genomföra, utvärdera och utveckla undervisning i matematik via matematisk problemlösning. De studerande får då även tillfälle att fördjupa sig i hur lärare via matematisk problemlösning kan tillfredsställa olika elevers och undervisningsgruppers skilda behov, hur de kan stimulera och underlätta för elevers matematiklärande samt hur de kan bedöma elevers matematiska kunskaper i samband med matematisk problemlösning.

Undervisningen sker i huvudsak på distans via dator, e-post och kurshemsida. Vid några tillfällen kommer föreläsningar och seminarier på Högskolan Dalarna att erbjudas.

Intresserade är välkomna att kontakta Kerstin Hagland, kha@du.se

Mer information finns på
Anslagstavlan Nämnamnens nätplats.