ROLF HEDRÉN, EVA TAFLIN & KERSTIN HAGLAND

Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till?

Den här artikeln ansluter till Problem med stenplattor i Nämnaren nummer 3, 2004 . Här diskuterar vi vad vi menar med ett rikt problem, vilka kriterier som vi anser ska vara uppfyllda för att en uppgift ska vara ett rikt problem. Med några exempel vill vi också visa att de problem vi använt verkligen överensstämt med dessa kriterier.

I förra numret berättade vi om ett forskningsprojekt, *Rika problem i matematikundervisningen*, RIMA, som vi har bedrivit sedan några år tillbaka. Vi gav också ett exempel på ett problem, Stenplattor, och berättade om några matematiska idéer som elever och lärare hade använt för att lösa det. I den här artikeln vill vi berätta litet mer allmänt om forskningsprojektet och visa några resultat som vi hittills kommit fram till.

Ett rikt problem ska enligt vår uppfattning uppfylla vissa kriterier som gör det speciellt lämpat i matematikundervisningen i den elevgrupp där det används. Vi har formulerat dessa kriterier på följande sätt:

1. Problemet ska introducera till viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.
2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
5. Problemet ska kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
6. Problemet ska kunna fungera som brobyggare mellan olika matematiska områden.
7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

Rolf Hedrén *är biträdande professor emeritus i matematikdidaktik.* roh@du.se
Eva Taflin *är fil lic och universitetsadjunkt i matematikdidaktik.* evat@du.se
Kerstin Hagland *är universitetsadjunkt i matematikdidaktik.* kha@du.se
Alla vid Högskolan Dalarna.

När vi formulerat kriterierna har vi framför allt varit inriktade på att hela klassen ska kunna syssla med problemet under en relativt lång tid, en till två lektioner. Alla elever ska engageras i samma problem för att denna aktivitet så småningom ska kunna vara bakgrund till och utmynna i en gemensam avslutande diskussion. Det ska vara en utmaning för alla elever, men samtidigt ska ingen elev behöva känna att hon eller han inte kommer någonstans med det. Ett sätt att åstadkomma detta kan vara att göra delproblem, där några är relativt enkla.

Det har varit viktigt för oss att problemen kan lösas med flera olika strategier, att flera olika matematiska idéer kan komma fram och att olika uttrycksformer kan komma till användning vid lösandet. Problemlösning kan skapa omväxling för både lärare och elever i det ibland likartade arbetet med uppgifter i läroboken. Mångfalden av lösningsmetoder och matematiska tankar gör det också lättare att hitta till varje elevs ”närmaste utvecklingszon”, dvs där eleven bara behöver lite hjälp för att komma vidare för att bygga sin kunskap.

De problem vi valt att arbeta med i projektet har inte varit speciellt verklighetsnära, även om de liksom Stenplattor i förra numret fått en verklighetsbetonad inramning. Vi menar att ett problem inte nödvändigtvis behöver ha anknytning till vardagen för att fånga elevernas intresse, ett rent matematisk problem kan också mycket väl göra det.

Vi vill också framhålla att vi inte är ute efter att testa någon ny revolutionerande undervisningsmetod. Problemlösning är ju inte något nytt i matematikundervisningen. Vår strävan är i stället att se hur lärarnas sätt att arbeta och elevernas möjligheter att lära sig matematik gestaltar sig när de arbetar med några förhoppningsvis rika matematiska problem.

Vår uppläggning av projektet

Vi har följt sammanlagt fyra klasser och deras lärare, på två olika skolor genom skolåren 7, 8 och 9. Under det första och sista skolåret fick eleverna tre rika problem att arbeta med, under skolår 8 fick de fyra. Problemen valdes i stor utsträckning ut i samråd med de deltagande lärarna och ibland anknöt de till den övriga matematikundervisningen. Lärarna och vi diskuterade i allmänhet också våra tidigare erfarenheter av arbete med problemen, innan lärarna lät sina elever ta sig an dem. Lärarna gavs full frihet att lägga upp problemlösningslektionerna som det passade dem och deras elever. Ibland fick eleverna arbeta enskilt med problemen innan de samlades i grupper, ibland arbetade de gruppvis under hela problemlösningstillfället, ibland arbetade eleverna två och två framför en dator, ibland hade de tillgång till konkret materiel, osv. Men alla elever i en klass arbetade samtidigt med samma problem.

För att utvärdera projektet har vi använt flera olika metoder:

- Video- och audioinspelningar av lärare och elever under problemlösningen.
- Intervjuer med lärare före och efter lektionerna.
- Intervjuer med elever efter lektionerna.
- Test och enkäter för eleverna i början och i slutet av försöket.
- Diskussionsträffar med lärarna cirka tre gånger per termin.

Metoderna har utvecklats under försökets gång. Vi har till exempel kommit fram till att det inte varit möjligt för lärarna att skriva dagbok under försökstiden. I början av försöket använde vi oss av ”stimulated recall”, vilket betyder att intervjupersonen får se en videoinspelning med sig själv som agerande och får tillfälle att kommentera vad som händer. Det har ersatts av att lärarna burit en så kallad mygga under hela problemlösningstillfället. På så sätt har vi kunnat spela in all den konversation som ägt rum mellan lärare och elever under hela den tid när eleverna enskilt eller i grupper varit aktiva med att lösa problemet. I några grupper intervjuade vi elever medan de löste uppgifter som anknöt till det aktuella problemet före problemlösningstillfället. Detta visade sig inte ge några användbara resultat och slopades därför senare.

Några resultat i anslutning till kriterierna för rika problem

Sammanlagt har vi använt tio olika problem under projekttiden. Vi har naturligtvis varit mycket intresserade av att veta om de verkligen fungerat som rika problem i de klasser som deltagit och vi kommer därför att i det följande ge några exempel som pekar på att kriterierna uppfyllts. Några kriterier utlämnar vi dock här för att artikeln inte ska bli för lång. Det första kriteriet diskuterade vi utförligt i vår förra artikel och det sista hoppas vi kunna återkomma till i en kommande artikel.

Alla namn på lärare och elever är fingerade. Att ett irrelevant stycke är överhoppat markeras med ... Betonad text har kursiverats och våra egna anmärkningar står inom klammer.

Kan problemen ge en utmaning samtidigt som alla kan arbeta med det?

För att belysa denna fråga visar vi här två intervjuer gjorda omedelbart efter det att några elever arbetat med ett problem som handlade om byteshandel.

Maja: ... Först förstod jag inte riktigt [paus].
Intervjuare: Nehej.
Maja: Men sedan gick det jättebra och då gjorde jag olika lösningar på den. Och så hjälpte jag Lotta och dom andra.
...
Kajsa: Ja, det var väl typ, likadant. Det gick inte riktigt först men sen så, när jag läste den igen, då förstod jag. Men jag kom bara fram till en lösning. [Kajsa ler.]
Intervjuare: Men en lösning klarade du?
Kajsa: Mm.

(Skolår 8, ht 2002)

Intervjuare: ... Är det någonting annat som kamraterna har gjort i dag som insats, då tänkte jag både dom som satt i den lilla gruppen [en av grupperna i klassen] och dom andra?
Olle: Alla borde ha gjort en bra insats eftersom dom fick fram en lösning i och för sig.
Intervjuare: Ja, jo, det är sant. Det har du helt rätt i. Jag förstår hur du menar. Dom satt där och jobbade och när dom hade fått fram en lösning hade dom faktiskt gjort en insats. Och dessutom redovisade den, så att ni fick reda på den.
Olle: Ja.
Intervjuare: Var det många olika lösningar?
Pelle: Mm.
Olle: Ja.

(Skolår 8, ht 2002)

Kan problemen lösas på olika sätt och med olika representationer?

Den här frågan illustrerar vi med en annan intervju, som också ägde rum efter problemlösningstillfället. Eleverna hade denna gång arbetat med Godisbitar, ett problem som förr ofta löstes med reguladetri.

Godisbitar

32 godisbitar kostar 10 kronor.

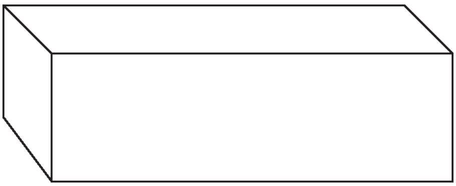
a) Hur många bitar får du för 25 kronor?

b) Hitta på ett liknande problem och lös det.

Intervjuare: Kan ni se någonting positivt med att jobba med sådana här uppgifter?
Maja: Man märker att det finns fler sätt att räkna ut på.
Kajsa: Mm.

(Skolår 7, ht 2001)

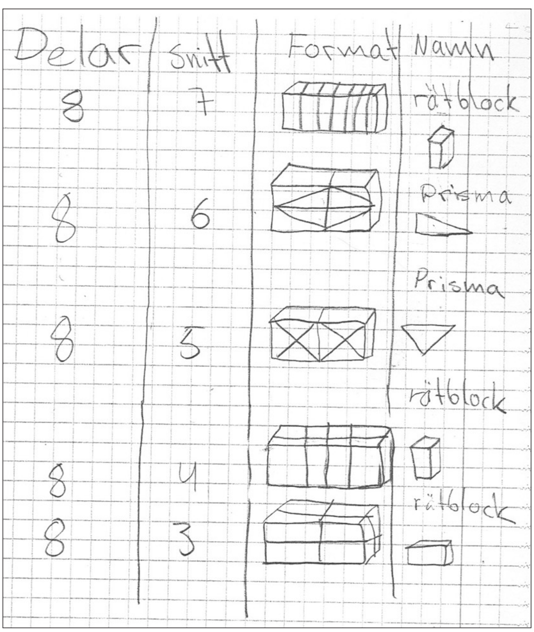
Sockerkakan



En avlång sockerkaka ska delas rättvist mellan åtta elever. Varje elev ska få en bit. Ingen bit ska bli över eller ges bort till någon annan. Man använder en kniv och skär raka snitt.

a) Hur kan delarna se ut? Föreslå så många olika lösningar du kan!
b) Hur många snitt behövs vid varje lösning?
c) Hitta på ett liknande problem och lös det.

En elev redovisade detta problem på följande sätt.



Hon har använt olika uttrycksformer, representationerna tabell, siffror, bilder och ord.
(Skolår 7, vt 2002)

Kan problemen initiera en matematisk diskussion?

Vi kunde se tydliga tecken på att problemen orsakade diskussioner både mellan elever och mellan lärare och elever. I det första exemplet gällde det för eleverna att räkna ut hur många samlarbilder fem ungdomar kunde ha, när man visste att medianen och typvärdet av deras antal var 20, medelvärdet var 22 och högsta värdet 40.

Alexander: Fem gånger tjutvå, då får man väl ut vad alla har, tillsammans.
Patrik: Fem gånger.
Tim: Är det fem styckna?
Patrik: Är det fem stycken då?
Alexander: Ja, fem elever.
Patrik: Jaha, fem elever, ja det hade vi redan, okej. [Ohörbart] tie [ohörbart] hundratie, säkert det är det, jaha. Skriv hundratie. Men om du delar det i fem, då får du fortfarande tjutvå. Ja, för nu kan du ju ta tjutvå, får jag prova?
Alexander: Alla kan ju inte ha tretti [ohörbart].
Patrik: Alltså, en har förti. Hundratie minus förti, sjutti.
Alexander: Mm.
Patrik: Och sjutti. Sjutti genom fyra [lång paus]. Det kan det ju inte bli. Det, nu, genomsnitt som varje skulle ha eller om fyra elever skulle dela på sjutti bilder, som var kvar, det är sjutton komma fem, men
Alexander : Ja men, ma
Patrik: Ja men just det. Vi har två på tjuge, då tar vi bort förti till.
Alexander: Då är det tretti kvar.
Patrik: Då har vi tretti kvar, då, då har dom andra femton. Då har vi ju löst det.
(Skolår 8, ht 2002)

I det andra exemplet låter vi eleverna komma till tals i den efterföljande intervjun. Problemet handlar om byteshandel, där ett antal golfbollar ska bytas mot tennis- och/eller pingisbollar enligt vissa givna normer.

Bollbyte

Allan har slutat spela golf. Nu vill han byta bort sina golfbollar mot tennisbollar och pingisbollar. Bodil byter gärna sina tennisbollar mot Allans golfbollar. Werner byter gärna sina pingisbollar mot Allans golfbollar.

De kommer överens om att Allan kan byta

3 st golfbollar mot 5 st tennisbollar,
2 st golfbollar mot 7 st pingisbollar.

a) Hur många tennisbollar och pingisbollar kan Allan få om han byter bort alla sina 26 st golfbollar?
Visa ett exempel på byte.
b) Visa alla byten som är möjliga. Varför tror du att det är alla byten som finns? Berätta!
c) Hitta på ett eget matematiskt liknande problem.
Varför är det liknande, tycker du? Berätta!

Intervjuare: Är det något annat som kamraterna gjorde för att ni skulle lyckas och ni skulle lära er?
Maja: Det jag tycker är bra, det är att diskutera med en annan för [paus] jag och Lotta vi brukar diskutera lösningarna och sådant. Och det är jättebra.
...
Lotta: Ja, om vi ska räkna ut till exempel det där med golfbollarna.
Intervjuare: Ja.
Lotta: Så har jag kommit fram till ett svar, kanske 49, säger vi, och hon har kommit fram till 29.
Intervjuare: Ja.
Lotta: Då sitter vi och diskuterar varför det blir så. Och sedan frågar vi Birgitta [läraren] vem som har rätt.
...
Intervjuare: Är det någonting mer som gör att man lär sig väldigt bra?
Lotta: Om man inte förstår någonting så får man hjälp och när dom förklarar för en, då lär man sig.

(Skolår 8, ht 2002)

Kan problemen fungera som brobyggare?

Elever och lärare utnyttjade ofta problemen som brobyggare mellan olika matematiska områden.

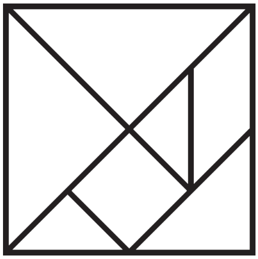
Skolan

Du får veta några saker om en skola:
– Exakt en tredjedel av eleverna går i 8:an.
– Exakt 20 % av eleverna kommer till skolan med buss.
– Fler än 300 elever och färre än 400 elever går på den här skolan.

a) Hur många elever kan det gå på den här skolan? Ge ett exempel.
b) Försök finna en regel för hur många elever som kan gå på skolan.
Ange alla antal elever som är möjliga.
c) Hitta på ett liknande problem och lös det.

Lärare: Ska vi kolla 330. Hur många går i åttan?
Alexander: 110.
Lärare: 330 delat på 3. Det här då 330 delat, det står fem där.
Alexander: Mm.
Lärare: Hur kommer det sej att du har delat med fem?
Alexander: Ja, tjuge procent är en femtedel.
Lärare: Alldeles riktigt, bra. Och det blev 66.
Alexander: Mm.
Lärare: Det verkar att stämma.
[Läraren kommer tillbaka efter det att gruppen arbetat en stund på egen hand.]
Lärare: Vad har ni för lösningar?
Alexander: Dom här.
Lärare: Det verkar va en väldig massa lösningar, det, oj, oj, oj. Ser man samband mellan dom här lösningarna?
Gustav: Ja, det ska va i femmans och treans tabell.

(Skolår 7, vt 2002)



I det andra exemplet hade eleverna arbetat med problemet Tangram. Det gällde bland annat att bestämma hur stora de olika delarna är i förhållande till den kvadrat som de tillsammans bildar.

Exemplet är hämtat från en intervju med några flickor efter det att de sysslat med problemet.

Intervjuare: ... Och sedan tyckte du att det var lite kul att koppla area till bråk, var det så du menade?
Maja: Ja. Eller det var ju många räknesätt man använde, till exempel bråk och area och procent och [paus].
Intervjuare: Procent kom ni också in på?
Maja: Ja, vi fick ju jobba med procent för vi var klara med allting så [paus] [Maja ler.]
Intervjuare: Jaha, ja. Var det lite lurigt att koppla bråk och procent och area?
Lotta: Nej.
Maja: Nej, det gick bra.

(Skolår 8, vt 2003)

Avslutande kommentarer

Alla de tio problem, som vi använde i projektet och som vi tidigare hade erfarenheter av från andra sammanhang, visade sig i minst en klass ha de egenskaper som vi krävt för att vi skulle kalla dem rika. Vi har här ovan bara kunnat ge antydningar till att det varit så. Att kriterierna uppfylls hänger till stor del på läraren. Hon måste vara medveten om dem och välja både problemet och sättet att presentera det på så att det passar hennes klass. Självklart går det också att finna många fler rika problem än dem vi utnyttjade.

Att problemen har kunnat lösas med olika strategier och representationer har varit viktigt för oss just för att de kunnat leda till intressanta och givande matematiska diskussioner såväl mellan elever som mellan elever och lärare; vid enskilt arbete, vid grupparbete och vid gemensam klassdiskussion. Därigenom har eleverna fått möjlighet att sätta sig in i, förklara och argumentera för sina egna och andras lösningar. Våra kursplaner i matematik framhåller det som en viktig del av undervisningen.

Vi tror också att problemens egenskap att medverka till att bygga broar mellan olika områden i matematiken har varit väsentlig. Alltför ofta tar vi upp ett matematiskt område i taget och berövar våra elever möjligheten att se samband mellan olika delar. Här visade det sig till exempel i problemet om skolan att eleverna spontant kunde utnyttja att 20 procent är detsamma som en femtedel. De kunde dessutom se att de tal som angav antalet elever måste återfinnas både i treans och i femmans tabell.

Vi vill anknyta till vår förra artikel och peka på att när eleverna arbetar med problem med de här nämnda egenskaperna har de också möjlighet att fördjupa och utvidga sina kunskaper i matematik. Vi vet att tiden för matematikundervisning i skolan kan kännas knappt tilltagen. Just därför är det viktigt att eleverna känner att de genom att tillsammans arbeta med rika problem verkligen gör framsteg i sitt lärande av matematik.

Till slut vill vi också påpeka att det är väldigt lätt att göra ett rikt problem ”fattigt” genom att förenkla problemet för mycket eller ge eleverna alltför mycket hjälp. I det här fallet får lärare inte vara alltför ”snälla”.