Bengt Ulin

Matematik i musiken

Musik kan ses som en matematisk övning osynlig för själen. Författaren visar på rika möjligheter till integration av musik, fysik och matematik i skolan vad gäller t ex musikupplevelser och olika slag av skalor, rytmer och klanger

På frågan om vad det kan finnas för gemensamma nämnare hos matematik och musik, två till synes vitt skilda fält, är främsta svaret: det omedvetna i oss. I denna uppsats ska vi begränsa oss till kvantitativa verkningar av det omedvetna. En av de stora matematikerna, Leibniz, ansåg att ”musik är den njutning människan själv erfar av att räkna utan att vara medveten om att hon räknar”. I boken *Matematik och musik* [5] ägnas ett kapitel även åt inspirationen, en kvalitativ verkan av det omedvetna.

År 1860 publicerades ett verk som gav upphov till en livlig debatt om själslivet. Boken i fråga, *Elemente der Psychophysik,* hade skrivits av G T Fechner som på 1830-talet var professor i fysik i Leipzig. Sedan han bl a beaktat nya resultat inom experimentell psykologi blev han (vid 81 års ålder!) klar med en ny, förbättrad upplaga av boken.

Fechner byggde själv på psykologiska experiment som genomförts av en äldre kollega i Leipzig, Wilhelm Weber. Om I är intensiteten i vår förnimmelse av ljud- eller ljusstyrka och r betecknar (den yttre) retningens styrka, så gäller för normala sinnesförnimmelser formeln

$$\frac{I}{I_0} = A \log \frac{r}{r_0} \qquad (*)$$

där I_0 är intensiteten vid ett lågt tröskelvärde r_0 och A är en konstant.

I verbal form: Vi logaritmerar retningen i vår förnimmelse (Weber-Fechners lag eller den psykofysiska lagen).

Denna lag gäller även vårt tonöra: den gäller om r får beteckna frekvensen hos en ton och I vår upplevelse av tonhöjden. Det betyder att när vi hör musik, så logaritmerar vi fram såväl tonhöjden som ljudets styrka.

Det är inte svårt att verifiera logaritmeringen av frekvensen. Som bekant låter oktavstegen lika stora när vi spelar en ton och några av dess högre oktaver. Oktavupplevelsen är särskilt viktig för pianostämmaren, som måste avlyssna att oktaven till en ton blir absolut ren. Ett oktavsteg uppåt innebär en fördubbling av

Bengt Ulin har varit lektor vid Lärarhögskolan i Stockholm och vid Kristofferskolan i Bromma

frekvensen, vilket i sin tur medför att storheten log r/r_0 växer med det fixa beloppet log 2, varvid I enligt (*) ökar med konstanten I_0A log 2 då vi går en oktav uppåt.

Om vi tar andra intervallsteg uppåt, t ex kvintsteg, så ökar *I* med ett annat fixt belopp, helt i överensstämmelse med Weber-Fechners lag.

Vårt omedvetna gör alltså något med sinnesintrycken, är alltid aktivt.

I ett brev 1712 skriver Leibniz följande ord, långt före sin tid:

> *Musiken är en förborgad aritmetisk övning hos själen, som därvid ej vet att den umgås med tal. Själen fullgör nämligen många ting i oklar och obemärkt kunskapande verksamhet, som den ej kan lägga märke till genom tydlig varseblivning. Ty de har fel som menar att ingenting skulle kunna ske i själen som vi inte själva bleve medvetna om. Om därför själen inte märker att den räknar, så känner den dock verkan av denna omedvetna räkning, som glädje vid samklang, som betryckthet vid missklang.*

Att det finns grader av samklang var en viktig erfarenhet till grund för pythagoreernas harmonilära, som utformades under 500-talet f Kr.

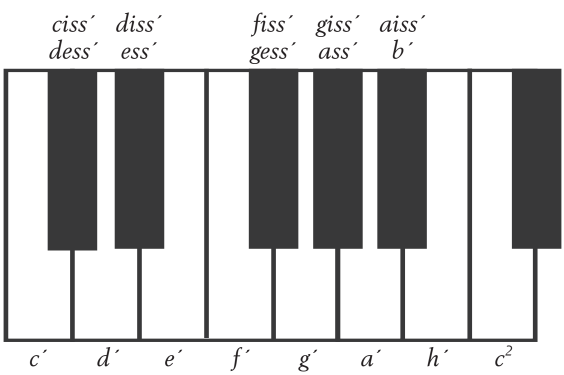
Konsonans och dissonans

Spelar vi a´(ettstrukna a) och dess oktav a^2 (tvåstrukna a) samtidigt, så märker vi att dessa två toner klingar samman som om de bildade en enda ton. Samma fenomen uppträder om vi spelar a´och a (ostrukna a) eller c´och c^2, d´och d^2, osv. Oktaverna är samklingande, symfona, som grekerna sade. Till de symfona intervallen räknade de även kvinten och kvarten, exempelvis ackorden c´-g´ resp c´-f´. Se fig 1 över de tangenter som bildar oktaven från c´ till c^2. (Till skillnad mot boken Matematik och musik kan denna uppsats inte illustreras med ljud; vi får nöja oss med figurer och notskrift. Förhoppningsvis har många tillgång till ett instrument.)

Man hör att graden av samklang är mycket stor hos kvinten och rätt så stor hos kvarten. Violinister stämmer de fyra strängarna i rena kvintintervall. Grekerna betraktade alla övriga intervall, alltså även stor ters och stor sext (t ex c´-e´ resp c´-a´) som diafona intervall; deras fylliga klang vittnar om att de bildas av två toner. I kategoriseringen konsonanta (samljudande) och dissonanta intervall kom förutom oktav, kvint och kvart såväl stor och liten ters som stor och liten sext att räknas till de konsonanta (t ex c´-e´och c´-ess´ resp c´-a´och c´-ass´, fig 1).

Den pythagoreiska harmoniläran

För pythagoreerna var matematik och musik två fält som väver in i varandra. Förvånande nog utvecklade de harmoniläran till en början teoretiskt, ur aritmetiken. Som bekant hävdade Pythagoras att heltalen 1, 2, 3, … utgör en konstituerande princip i världsalltet ("Allt är tal").



Figur 1. Ettstrukna oktaven från c´ till c^2.

De enklaste förhållandena $a:b$ mellan två heltal är sådana där a är en multipel av b. De två därnäst enkla förhållandena (>1) är 3:2 och 4:3. Pythagoreerna stämde sina monokord (ensträngade instrument) så att 2:1, 3:2 och 4:3 motsvarade oktav, kvint och kvart. Som heltonsteg, t ex c´-d´, valde de i regel 9:8. Den kanoniska (mest använda) pythagoreiska skalan hade intervallstegen

1, H, H, k, H, H, H, k, 2

där H är heltonsteget 9:8 och k är ett för oss ganska litet halvtonsteg, nämligen (4:3)/(81:64) = 256:243 ≈ 1,053.

Den diatoniska skalan

De tre förhållandena 2:1, 3:2, 4:3 ingår även i vår diatoniska skala och sägs utgöra rena intervall. Det innebär bl a att förhållandet mellan frekvenserna för kvinten och dess lägre grundton, t ex mellan tvåstrukna e och ettstrukna a på fiolen, är 3:2 (660 Hz/440 Hz). Heltonsteget c´-d´ svarar i den diatoniska skalan mot 9:8 och den stora tersen c´-e´ mot 5:4. En följd av detta är att heltonsteget d´-e´ blir (5:4)/(9:8), dvs 10:9. Den diatoniska skalan har alltså två olika stora heltonsteg H = 9:8 och H- = 10/9. Det mindre heltonsteget förefinns även mellan g´och a´. Den diatoniska oktaven har intervallstegen

1, H, H-, h*, H, H-, H, h*, 2

där 1 svarar mot prim (t ex grundtonen c´) och h* = 16/15 är halvtonsteget från e´ till f´ och från h´ till oktavtonen c^2.

Till skillnad mot den pythagoreiska skalan är den diatoniska osymmetrisk såtillvida att den har olika stora heltonsteg. Denna brist på symmetri blev ett hinder i musiken: det var svårt att gå över från en tonart till en annan. Man var i regel tvungen att hålla sig till en och samma tonart. Vi ska återkomma till detta.

Dur och moll

Näst efter 5:4 kommer 6:5 i talföljden $(n+1):n$. Svarar även 6:5 mot en musikalisk realitet? Ja, mot 6:5 svarar den lilla tersen i den diatoniska skalan. På pianot ger den svarta tangenten mellan d´och e´ den lilla tersen över grundtonen c´(fig 1). Med ett kvartsteg ovanpå den lilla tersen kommer vi till den lilla sexten; den erhålls med den svarta tangenten mellan g´ och a´. Den lilla sexten får därmed förhållandet (4:3)x(6:5) = 8:5. Den stora sexten, t ex c´-a´ erhålls som en kvart lagd till den stora tersen och har således värdet (4:3)x(5:4), dvs 5:3. Därmed kan vi ställa upp följande tabell för den diatoniska skalans intervall:

Prim (c´)	1
Sekund (d´)	9:8
Liten ters (ess´)	6:5
Stor ters (e´)	5:4
Kvart (d´)	4:3
Kvint (g´)	3:2
Liten sext (ass´)	8:5
Stor sext (a)	5:3
Septima (h)	15:8
Oktav (c^2)	2

Jämför man stora tersen med den lilla, så finner man, att den förra har en glad, utåtriktad, strålande karaktär, medan den senare ter sig mjuk, varm och inåtriktad. Det är dessa två terser som bestämmer dur och moll (durters = stor ters, mollters = liten ters). Som exempel kan vi ta början på *An der schönen, blauen Donau* respektive folkvisan *Uti vår hage* . I fig 2 låter vi folkvisan för jämförelsens skull börja på samma grundton d´ som ”valsernas vals”). Visans andra ton ligger ett halvtonsteg under valsens andra ton. Dessa båda melodier visar klart skillnaden i karaktär hos dur och moll, de två tonartstyper som så starkt dominerar västerländsk musik. F ö växlar ackompanjemanget till *Uti vår hage* ofta över från moll till dur i folkvisans avslutande omkväde.

Figur 2. Början på
a) Uti vår hage
b) An den schönen blauen Donau

Tre medelvärden

De grekiska matematikerna var väl förtrogna med de tre viktigaste medelvärdena: det aritmetiska, det geometriska och det harmoniska. Vi betecknar dem här A, G resp H. De definierade dem gärna med följande tre likheter, där a och b är två givna (positiva) tal, $a < b$:

$$A - a = b - A$$
$$a:G = G:b$$
$$(H-a):a = (b-H):b$$

I explicit form gäller

$$A = \frac{a+b}{2}$$

$$G = \sqrt{ab}$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

Om vi låter $a = 1$ och $b = 2$ motsvara prim resp oktav, finner vi genom enkel uträkning och med användning av förkortningarna $A(a, b)$ etc att

kvinten = $A(1, 2)$
kvarten = $H(1, 2)$

vidare att

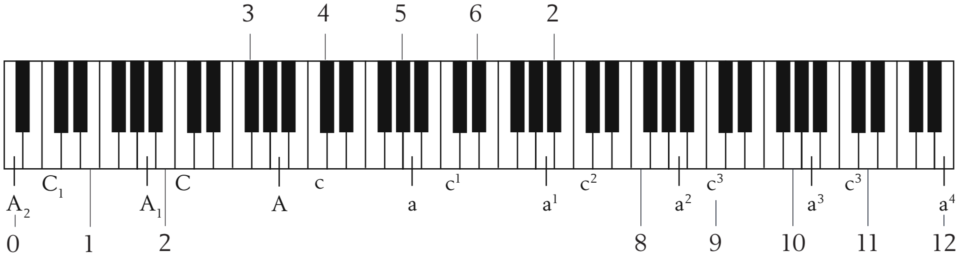
stor ters = $A(1, 3:2)$
liten ters = $H(1, 3:2)$

Alltså är exempelvis lilla tersen det harmoniska medelvärdet till prim och kvint.

$G(1, 2) = \sqrt{2}$ är ett irrationellt tal som försatte den pythagoreiska världsåskådningen i ett krisläge, eftersom detta rotvärde ej kan skrivas i formen $a:b$ med heltal a och b. Har då detta tal en motsvarighet i musiken? Det ska vi klara ut i nästa avsnitt.

Det vältempererade pianot

Utöver det förut omnämnda problemet med den diatoniska skalans asymmetri kände man alltsedan pythagoreernas tid till ett dilemma med rena kvinter och rena oktaver. Man hade upptäckt att 12 successiva kvintsteg, $(3/2)^{12} \approx 129{,}75$, inte överensstämmer med 7 successiva oktavsteg, $2^7 = 128$. Denna diskrepans kallas det pythagoreiska kommat. Såväl problemet kring detta och kring asymmetrin löstes i slutet av 1600-talet genom införandet av s k liksvävande temperatur för tangentinstrument: man gjorde helt sonika alla halvtonsteg (och därmed även alla heltonsteg) lika stora. Eftersom varje kvint omfattar 7 halvtonsteg och varje oktav 12 halvtonsteg medförde den nya stämningen att 7 oktaver = 12 kvinter = 84 halvtonsteg (fig 3). Ett vanligt piano omfattar



Figur 3. 12 kvinter och 7 oktaver från A_2 till a^4.

just 84 halvtonsteg från ett mycket lågt a i basen till ett högt diskant-a. Därmed var det pythagoreiska kommat undanröjt. Samtidigt blev alla intervall sinsemellan lika stora, oavsett från vilken grundton man utgick. Därmed var murarna mellan olika tonarter rivna; man kunde modulera från en tonart till en annan. I början av 1900-talet skapades tolvtonsmusiken: man övergav tonarterna genom att göra oktavens tolv toner likaberättigade.

Pianotonernas frekvenser följer en exponentialfunktion. Det tempererade halvtonsteget, säg t, ska uppfylla potensekvationen

$$t^{12} = 2$$

eftersom oktaven omfattar 12 halvtonsteg. Ekvationen ger värdet

$$t = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}059$$

vilket är något mindre än den diatoniska skalans halvtonsteg

$$h^* = 16:15 \approx 1{,}067.$$

Den tempererade kvinten, som omfattar 7 halvtonsteg, får värdet

$$(h^*)^7 = 2^{\frac{7}{12}} \approx 1{,}498;$$

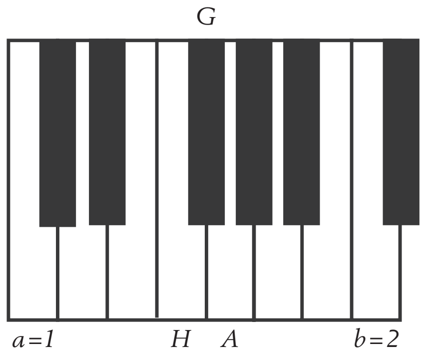
den är alltså en aning mindre än den rena kvinten (1,5).

Pianostämmarens uppgift är faktiskt att stämma alla oktaver rena men alla övriga intervall lagom falska. I jämförelse med den diatoniska skalans intervall är somliga tempererade intervall något för stora, andra något för små.

Om vi går tre heltonsteg uppåt från c´ på pianot kommer vi till ettstrukna fiss (eller gess) på pianot. Det latinska ordet för detta intervall är tritonus. Dess värde är

$$(h^*)^6 = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt{2}$$

Här återfinner vi det geometriska medelvärdet till prim och oktav (1 resp 2). Ackordet c–fiss är starkt dissonant som en ambulanssiren – en märklig ljudparallell till den vånda som det irrationella talet $\sqrt{2}$ vållade pythagoreerna. Fig 5 illustrerar enkelt olikheterna $H < G < A$ då a är skilt från b (här 1 resp 2).

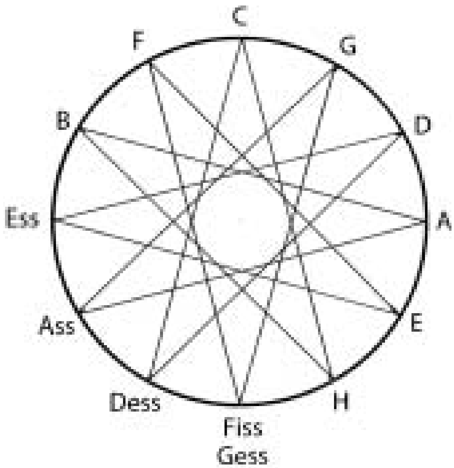


Figur 5.

Bach komponerade det berömda verket *Das wohltemperierte Klavier* i två delar 1722 och 1744. Vardera delen omfattar 24 preludier och fugor i samtliga 12 durtonarter och 12 molltonarter. Varje durtonart har nämligen en tre halvtoner lägre parallelltonart i moll med samma antal förtecken (kors eller b:n som höjer resp sänker ett halvtonsteg). C-dur, som saknar förtecken, har parallelltonarten a-moll. Fig 6 visar en variant av kvintcirkeln. Om vi börjar högst upp med C-dur, så ökar antalet kors när vi går medsols och antalet b:n om vi går motsols. Längst ner sammanfaller fiss-dur med gess-dur, som har 6 kors resp 6 b:n. Om vi i stället följer linjerna i dodekagrammet (den 12-uddiga stjärnan), så sjunker resp stiger grundtonen med ett halvt tonsteg längs varje linje.

Klangfärg

Det är inte svårt att särskilja toner från fiol, piano, klarinett och trumpet. Varje instrument har sin speciella klangfärg och den kan variera inom instrumentets register. Samtidigt med en instrumentton ljuder vissa övertoner. Om tonens frekvens är N, så har övertonerna frekvenser ur följden {kN}, där k = 1, 2, 3, 4, 5, etc. Beroende av uppsättningen av övertoner och deras styrka får instrumenttonen en viss klangfärg. Här ser vi åter ett exempel på de naturliga talens betydelse. Om övertonen med frekvens 7N har någon styrka kan den inverka störande, eftersom den dissonerar med andra övertoner. Genom att pianoklubban slår an strängen på en sjundedel av dess längd, elimineras störningen vid pianospel. Det är nämligen så att när en sträng svänger så svänger även dess hälfter, tredjedelar, etc. De svängande hälfterna, tredjedelarna, etc alstrar övertoner med frekvens 2N, 3N, osv.



Figur 6.

Rytm och takt

När flerstämmigheten inte längre bands till synkronisering ton för ton utan fick fritt varierade stämmor blev indelning i takter nödvändig.

Inom ramen för en taktart, t ex 3/4 eller 4/4, kan en rytm variera starkt. Jazzen karakteriseras av en pulserande kärnrytm (utan taktindelning) i samverkan med en rytm som den improviserande musikern skapar. Ett exempel på olika 3/4-rytmer ger menuetten och trion ur *Mozarts symfoni nr 40 i g-moll*. I motsats mot menuetten dominerar första taktslaget starkt i trion. Polskans 3/4-takt lär uppvisa ett 70-tal olika rytmer. I vissa varianter är taktslag 2 utdraget vilket ger musiken en sugande rytm.

Melodier som går i 6/8-takt visar i regel en lugnare rytm än melodier i 3/4-takt, trots att 6/8 = 3/4 aritmetiskt sett. En analog iakttagelse kan man göra beträffande 2/4- och 4/8-takt.

Till variation av rytmer bidrar förekomst av synkoper, t ex notgruppen

1/8 + 1/4 + 1/8 i början av en 4/4-takt. Synkopen, som medför att betoningen kommer på en ton mellan två taktslag, är mycket vanlig i jazz.

Andra rytmfaktor är pauser och tonernas tidslängd. En punkterad not förlänger tidslängden med hälften, så att exempelvis en punkterad fjärdedel får samma längd som tre åttondelar. Punkterade noter ger spänst åt rytmen. Ett exempel på detta ger *Spel-Olles gånglåt* (Löven de grönska …) och många marscher.

Perioder

Det är mycket vanligt att ett tema omfattar en period om 4 eller 8 takter. Detta gäller praktiskt taget all musik, från visa och marsch till opera och symfoni. Barnvisan *Sov du lilla vide ung* och huvudtemat i första satsen av *Beethovens violinkonsert* uppvisar perioder på 8 takter, i båda fallen enligt modellen försats + eftersats om 4 takter vardera, varvid eftersatsens två första takter upprepar försatsens två första takter. En periodlängd om 4 takter kan vara uppdelad i 2 + 2 takter som i *Bä, bä, vita lamm*. Varför spelar då talet 4 en så viktig roll i både folkvisor och komponerade melodier? Antagligen hänger det samman med att förhållandet mellan vår puls och antalet andetag per minut normalt är 4:1.

Musik och geometri

En direkt koppling mellan musik och geometri visar de figurer som upptäcktes av tysken E. F. F. Chladni och som fått namn efter honom. Chladni drog en stråke vertikalt mot kanten av en kvadratisk, rund eller elliptisk metallplatta som monterats i vågrätt läge på ett stativ.

Hans experiment är lätta att genomföra i skolan. På plattan kan man strö finkornig sand eller något fint pulver. Stråken försätter plattan i svängningar och alstrar en ton. Beroende av bl a tonens frekvens, plattans form och fastsättning varierar det mönster av nodkurvor, i vilket partiklarna samlas.

Chladnis bok *Akustik* (1802), som handlar om betydligt mer än nodfigurerna, blev banbrytande för akustiken. Ett referat av en artikel i *Scientific American (nr 11/1982)* om de runda pukskinnens svängningar kan man finna i [5].

Integration i skolan

Utöver experiment kring Chladni-figurerna kan undersökningar av den svängande strängen bidra till en fruktbar integration av matematik, musik och fysik i skolan. Pythagoreernas resultat att frekvensen är omvänt proportionell mot stränglängden vid konstant spänning vidgades av matematikern och musikteoretikern M. Mersenne i ett verk (1636-37). Där utökade han den pythagoreiska upptäckten med följande två lagar:

Frekvensen är proportionell mot kvadratroten ur spänningen vid fix stränglängd och omvänt proportionell mot kvadratroten ur strängens vikt, när längd och spänning är fixerade (men genomskärningsarean varieras).

I matematisk notation får dessa rön följande gestalt, om l betecknar stränglängd, *s* spänning, *m* vikten (massan) och *f* frekvensen:

$$f = A \cdot \frac{1}{l} \qquad (1)$$

$$f = B\sqrt{s} \qquad (2)$$

$$f = C \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \qquad (3)$$

där A, B och C är konstanter.

LITTERATUR

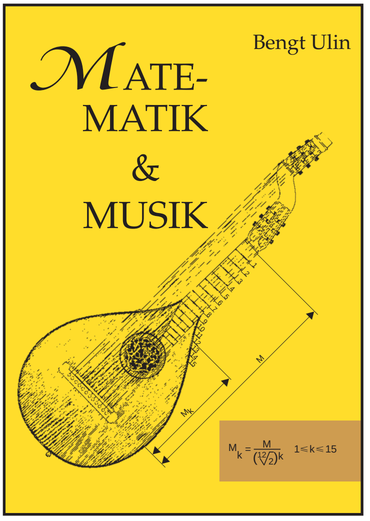
[1] P Bastian, *In i musiken*, Bo Ejeby Förlag 1996.

[2] I Bengtsson, *Från visa till symfoni*, Radiotjänst 1950.

[3] Sir J Jeans, *Science & Music*, Dover 1968.

[4] J Sundberg, *Musikens ljudlära*, Gleerups 1973.

[5] B Ulin, *Matematik och musik*, Ekelunds 2003.



Matematik & musik

Bengt Ulin

Alltsedan Pythagoras upptäckter för 2 500 år sedan har matematik och musik förknippats med varandra. Det finns många samband av yttre, objektiv art. Exempelvis innebär växande tonhöjd växande frekvenstal och bakom den diatoniska, rena, skalans intervall döljer sig enkla heltalsförhållanden. Den digitala återgivningen av ljud innebär ett nytt, aktuellt samband mellan matematik och musik. En annan parallell, av inre art, är fenomenet inspiration som spelar en väsentlig roll i såväl matematiskt som musikaliskt skapande.

En cd-skiva medföljer boken.

Ekelunds förlag
ISBN 646-1907-9