

Algebraisk förmåga och förståelse, del 2

I en tidigare Nämnarenartikel (nr 2, 2000) presenterades preliminära resultat från en treårig longitudinell undersökning av gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse. Undersökningen är nu avslutad. I den här artikeln ges en sammanfattning av hela undersökningen och slutsatser av det insamlade materialet. Dessutom diskuteras de undervisningsmetoder som använts under perioden.

Vi har under 3 år följt de elever, som höstterminen 1998 började i NV1 vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten har varit att studera hur deras algebrakunskaper utvecklas under gymnasietiden. Totalt har ca 100 elever ingått i studien. Dessa avslutade sina gymnasiestudier i juni 2001. Undersökningen inspirerades delvis av den häftiga debatt om studenternas dåliga förkunskaper i matematik, som utbröt hösten 1997 se t ex (Johansson, 1998) och (Högsköleverket, 1999). Den har varit en del av ett matematikdidaktiskt utvecklingsprojekt i nordvästra Skåne som Högsolan Kristianstad och Klippans kommun genomfört tillsammans, se (Grevholm & Wennström, 1998; 1999).

**Per-Eskil Persson och
Tomas Wennström är
matematiklärare vid Klippans
gymnasieskola.**

Undersökningen har presenterats i fem rapporter (Persson & Wennström, 1999; 2000a; 2000b; 2000c; 2001). Den första av dessa beskriver läget då eleverna började gymnasieskolan i augusti 1998. Den andra beskriver läget ett år senare och vilka förändringar som inträffade under första året i gymnasieskolan. Den tredje rapporten är en detaljerad studie av 10 elevers utveckling under första året. I den fjärde och femte rapporten diskuteras framför allt vilka algebrakunskaper som är stabila och hur eleverna lyckats med sina matematikstudier i gymnasieskolan. Intresserade läsare hänvisas till dessa rapporter för detaljer. För en översikt om algebrainläring, se t ex (Bergsten et al, 1997), (Wagner & Kieran, 1989), (Kieran, 1992) och (Bednarz et al, 1996).

Att "lyckas" med algebra

När man genomför en undersökning av det här slaget, påverkas naturligtvis de frågor man ställer och hur man tolkar dem av ens erfarenhetsbakgrund. En akademisk forskare och en lärare har troligtvis olika utgångspunkter. En orsak till detta är att läraren inte enbart är observatör utan också deltagare i en inlärningsprocess. Det är viktigt att man är någorlunda klar över vilket ens perspektiv är. Vårt är praktikerens – lärarens i klassrummet. Därför är vårt huvudintresse hur vi kan förbättra *våra* elevers algebrainläring och *vår* undervisning.

I en undersökning som sträcker sig över flera år kan de ursprungliga frågeställningarna behöva ändras. Man kan bli varse att en fråga är olämpligt eller felaktigt ställd. Ett exempel på detta är den fråga vi ställde i vår första rapport:

Finns det en minsta nivå på förkunskaperna från grundskolan för att en elev skall lyckas med sina matematikstudier i gymnasieskolan?

Med "lyckas" menar vi i detta sammanhang att minst uppnå ett klart godkänt resultat på de olika matematikkurserna, som finns på NV-programmet. Ganska snart insåg vi att frågan inte går att besvara. Hur man lyckas är ett komplicerat samspel av både kognitiva och affektiva faktorer. Frågan borde kanske i stället vara:

Kan man klara NV-programmet med relativt dåliga förkunskaper och vad skall skolan och eleven göra i det sammanhanget för att underlätta lärandet?

Finns det vissa faktorer, som är av speciell betydelse för att elever med dåliga förkunskaper skall lyckas? En annan fråga av intresse är vilka *förkunskaper* som är speciellt viktiga för algebrainläringen. Det kanske inte är så att eleverna när de kommer från grundskolan behöver vara speciellt duktiga på att skriva om algebraiska uttryck? Det är kanske andra kunska-

per och färdigheter som är av större vikt som tex god talförståelse – även av negativa och rationella tal, prioriteringsregler och parentesers betydelse, förståelse för vad bokstäver står för och förmåga att översätta till ett algebraiskt uttryck samt likhetstecknets betydelse? Den väsentligaste frågan är naturligtvis hur vi – utgående från varje elevs individuella förutsättningar – kan ge en god algebraisk kompetens. Att en sådan behövs om man skall lyckas med sina matematikstudier på NV-programmet och senare på högskolan är nog de flesta överens om. Betydelsen av *sk affektiva faktorer* skall inte underskattas. Motivation och självförtroende är mycket viktiga vid matematikinläring. Ofta har man nog negligerat detta i matematikundervisningen. Hur kan vi då ordna elevernas studier i algebra och matematik så att deras självförtroende stärks?

Andra frågeställningar av intresse är om det finns några *speciella hinder* som försvårar respektive underlättar inläringen av algebra. Är tex algebrainläring något som sker sprängvis så att när man övervunnit ett visst hinder gör man väsentliga framsteg? För vissa elever verkar så vara fallet. Andra frågor av vikt är hur pass stabila algebrakunskaperna är och vad vi kan göra för att bibehålla uppnådda färdigheter.

Frågan om hur *hjälpmedel* som datorer och räknare – grafitande såväl som symbolhanterande – skall påverka undervisningen i algebra är också av intresse. Vilka manuella färdigheter behöver eleverna i dag och hur säkra skall de vara i att utföra dem? Ökad säkerhet fordrar mer tid för övning och den tiden skulle kanske hellre användas för att tex öka begreppsförståelsen och träna mer problemlösning. Hur och vilken färdighets träning som behövs för förståelse i algebra är inte på något sätt klarlagt av forskningen.

Våra testresultat

Studien har huvudsakligen varit kvalitativ även om en hel del kvantitativa resultat finns. Data har samlats in med hjälp av bla test, enkäter, intervjuer och observationer. För en mer detaljerad metoddiskussion hänvisar vi till vår femte rapport.

Totalt har fyra test genomförts vid olika tidpunkter – samtliga utan hjälpmedel (räknare och formelsamling). Sammanställningen nedan ger en översikt över testen, tidpunkten för dessa och deras huvudsakliga syfte.

Test 1 (NV1 i aug. HT 98) algebraisk förmåga och förståelse vid starten i NV1 (se Persson & Wennström, 1999).

Test 2 (NV2 i aug. HT 99) förändringar under första året i gymnasieskolan (se Persson & Wennström, 2000a).

Test 3 (Sluttest NV2 i maj VT 00) vilka algebrakunskaper är stabila (se Persson & Wennström, 2000c).

Test 4 (Sluttest NV3 i mars/april VT 01) vilka algebrakunskaper är stabila (se Persson & Wennström, 2001)

I den här artikeln kommer endast några sammanfattande resultat att presenteras. För en detaljerad analys av materialet hänvisas till originalrapporterna.

- Lösning av vanliga ekvationer som tex $4x - 15 = 75 - x$ och $x/5 - 6 = 14$ fungerar tillfredsställande. De flesta fel som förekommer är slarvfel. Förmågan att lösa denna typ av ekvationer är stabil sedan högstadiet.
- De flesta elever förstår vad en lösning till en ekvation är och kan genom provning hitta lösningar till ekvationer av tex typen $x^x + 3 = 7$. Det gjorde de i allmänhet inte, då de började i gymnasieskolan. Lite fundersam blir man dock, när endast några få elever direkt kan hitta lösningarna till en ekvation av typen $(x - 3)(2x + 1) = 0$.

- Merparten av våra elever behärskar grundläggande förenklingsalgebra och kan förenkla uttryck som $3(4 + 3x) - 4(3 - 4x)$ och $(2x - 5)(3x + 4)$ samt lösa ekvationer av typen $4(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 39$. Dessa färdigheter har huvudsakligen förvärvats under första året i gymnasieskolan. Säkerheten vid manuell räkning har dock en del brister!
- Fel på enklare förenklingsalgebra beror i de flesta fall på småslarv och dålig talförståelse av negativa tal – minus-tecknets olika roller.
- Förmågan att hantera bråk och rationella uttryck är mycket bristfällig. Tex använder de flesta decimalform i stället för bråk då de skall lösa ekvationen $2x^2 + x - 3 = 0$, vilket medför att de fastnar då de utan hjälpmedel skall beräkna $-0,25 \pm \sqrt{1,5625}$. Endast 20% kan korrekt förenkla uttrycket $(2x^2 - 8)/(x - 2)$. Orsaken till de dåliga resultaten på detta avsnitt är bristande förkunskaper i bråkräkning. Tiden i NV2 räckte helt enkelt ej till för att vi skulle kunna ge eleverna den grund i bråkräkning som är nödvändig för att det skall bli meningsfullt att arbeta med rationella uttryck.
- Förmågan att ställa upp och tolka algebraiska uttryck är relativt hyfsad, men bör förbättras. Exempel på problem i detta sammanhang är:

Av en ståltråd med längden 12 cm klipps biten x cm av. Av biten med längden x bildas en cirkel och av den andra biten en kvadrat.

a) Bestäm cirkelns radie uttryckt i x .

b) Bestäm kvadratens sida uttryckt i x .

Äpplen kostar a kr/st och päron b kr/st. Förklara vad uttrycket $3a + 5b$ betyder.

Hur vi undervisade

När en studie av elevers lärande görs på fältet, använder man sig inte så sällan av annorlunda undervisningsmetoder, som man gärna vill visa resultatet av. Hur intressant studien än är, måste man därför fråga sig hur överförbara resultaten egentligen är till det dagliga arbetet i skolan. Kanske dessa metoder bara fungerar under vissa omständigheter med en viss grupp elever? I så fall blir det svårt att omsätta studiens resultat till praktisk användning. Därför vill vi gärna understryka, att vi inte anser att den undervisning de elever fått, som ingår i vår studie, skiljer sig på något avgörande sätt från det som brukar betecknas "traditionell undervisning" inom ämnet matematik. Eftersom fyra olika klasser med fyra olika lärare deltagit, är det naturligtvis omöjligt att avgöra om våra något skilda sätt att genomföra matematikundervisningen också givit något skilda resultat. Det har dock vid samtal med de övriga lärarna inte framkommit något, som tyder på att våra arbetssätt varit särskilt olika.

I matematikundervisningen har vi lagt stor vikt vid det *didaktiska samtalet* med eleverna kring begrepp, metoder, problemlösning mm. Detta samtal bör ske i varierande grupperingar och mellan olika personer i klassrummet. Vissa övergripande diskussioner kan ske med hela klassen, andra i mindre grupper. Viktigast för den enskilde elevens utveckling är kanske ändå dialogerna lärare – elev och elev – elev. Ett arbetssätt där eleven får tillräckliga möjligheter att berätta hur de tänker och jämföra med andras sätt att tänka är nödvändigt. Läraren får härigenom möjlighet att hjälpa eleven att komma vidare i sin begreppsutveckling på den nivå hon/han befinner sig. Detta gäller givetvis också i högsta grad de abstrakta begrepp vi finner i algebran. Vi ansluter oss i grunden till det konstruktivistiska synsätt, som innebär att vi ser kunskap som en av individen själv uppbyggd meningsfull tanke-

värld. Därför måste varje elev själv arbeta med att bygga t ex en funktionsduglig konstruktion som heter "Algebra". Men detta arbete måste, för att det ska bli meningsfyllt och leda framåt, ske under kommunikation med andra människor. Därvid ansluter vi oss till Vygotskys tankar om den stora betydelse språket har som verktyg för tänkandet i lärandeprocessen (Vygotsky, 1986).

Det matematiska samtalet har traditionellt förts mellan lärare och elev, där läraren styrt samtalet till största delen. Här ser vi nog, att det är viktigt att läraren är mera lyhörd för elevens tankegångar och i högre grad bygger på dem i diskussionen. Annars är risken stor att dialogen förvandlas till en monolog, vilket inte främjar elevens tankebygge. Eleven kommer då inte vidare i sin matematiska utveckling och befäster kanske till och med felaktiga uppfattningar. För att lösa upp sådana felaktigheter och hjälpa elever förbi "trösklar", måste läraren ständigt utgå från den enskilde elevens tankar i sin dialog. Ibland blir det lättare om diskussionen förs mellan elev och elev, antingen parvis eller i grupp. Det är därför viktigt att det i klassrumsarbetet ges tid och utrymme för detta. Vi har uppmuntrat våra elever till att arbeta tillsammans mer eller mindre organiserat. Till exempel har elever fått lösa problem i grupper på 3 – 4 st. Man har diskuterat och försökt lösa problemet tillsammans, men oftast är det någon i gruppen, som först får en idé om hur det ska lösas. Instruktionen har då varit, att den eleven skulle förklara lösningen för samtliga andra i gruppen, så att var och en kan visa lösningen för hela klassen. Det är vanligen prestationsstarka elever, som först klarar problemet, men dessa upplever att de förstår lösningen ännu bättre när de fått förklara för någon annan. Denna upplevelse kan sedan användas i det fortlopande arbetet i klassrummet. Utan någon speciell organisation har elever uppmunats att hjälpa varandra, vilket ofta utmynnat i att en starkare elev visar sitt sätt att tänka

för den svagare. Här är det naturligtvis av yttersta vikt att man har ett positivt klassrumsklimat med vi-känsla och utan konkurrenstankar. Både den starkare och den svagare eleven uppfattar denna dialog som mycket positiv, och den stärker också bådats självförtroende vad det gäller att klara nya arbetsuppgifter. Denna samarbetsinlärning har en del lärare valt att göra i en ännu mera organiserad form, *cooperative learning*, men det steget har vi inte tagit med våra elever.

Stödtimmen – en framgångsrik modell

För att möta problemet med att elevernas färdighets- och begrepps nivåer i en klass är så olika, är det ganska vanligt idag att man i matematik nästan helt överger en sammanhållen undervisning. Eleverna får arbeta fullständigt individualiserat och "i egen takt". Detta innebär att man arbetar mycket läroboksstyrt med huvudsakligen enskilt tyst räknande och att målet med matematiken är att man ska komma så snabbt "framåt" som möjligt och klara ett godkänt betyg på kursen. Vi anser, att ett sådant arbetssätt ger väldigt ytliga och instrumentella färdigheter med dålig eller ibland felaktig begreppsbildning som följd. De "duktiga" eleverna upplever matematiken som ett slags hastighetstävling, medan de "svaga" eleverna blir lämnade på efterkälken. De "svaga" är här oftast de språksvaga, vilket i sin tur innebär de, som kommer ur svaga samhällsgrupper. Kanske en duktig och erfaren lärare klarar att ge dessa elever en god matematikundervisning genom sina dialoger med dem, men vi sätter ändå generellt ett frågetecken för ett sådant arbetssätt.

I de fall man har parallellklasser, som våra fyra NV-klasser, förekommer det på många skolor att man gör en nivågruppning. Lärarna får då möjlighet att bedriva undervisning i grupper, som har relativt homogena kunskaper och färdigheter. Vi har dock haft invändningar mot den här metoden bla av skäl som redovisats ovan.

Elever befinner sig inte på en konstant "nivå" i förhållande till sina kamrater i exempelvis algebra, utan tankekonstruktionen sker ojämnt och i språng. Vissa delar är kanske mer utvecklade än hos en kamrat, medan andra delar är mindre utvecklade. Det kan vara direkt hämmande för en elev att placeras i en viss "nivå", även om hon/han för stunden får en undervisning, som är ganska väl anpassad vad gäller färdigheterna. Men hur går det på sikt? Och hur går det med de stora fördelarna med samarbetsinlärning?

Vi använder en annan modell för NV-klasserna på vår skola, nämligen en *extra stödtimme* i veckan under årskurs 1 för de elever som behöver det. Lärarna tar ut dessa elever på grundval av test, prov, samtal med mera. Stödgrupperna får inte vara statiska, utan måste revideras fortlöpande beroende av elevernas behov. Grupperna bör dock inte överstiga 10 elever i antal, eftersom den undervisande läraren måste få tillräcklig tid för samtalen med de enskilda eleverna. Hur stödgrupperna fungerat och vad eleverna tyckt om dem har vi utförligare beskrivit i vår andra rapport (Persson & Wennström, 2000a). Avsikten har varit att kompensera dessa elever genom att ge dem mer tid, både för diskussioner och för att prova andra angreppssätt för sina svårigheter. Det har också varit viktigt att stärka deras självförtroende och göra matematiken mer positiv, dvs vi har satsat medvetet på de affektiva faktorerna. Modellen har nu använts några år, och vi anser att den slagit väl ut. De syften vi har vad gäller elevernas utveckling verkar vi uppnå i stor utsträckning. Vi ser därför inga skäl att överge modellen, utan vi kommer att använda den även i fortsättningen.

Våra slutsatser

Slutsatserna nedan grundas på allt material vi samlat in under tre års studier med bla test, enkäter och observationer vid olika tidpunkter. Man kan, som vi konsta-

terat tidigare, inte definiera någon minsta nivå på förkunskaperna vid gymnasiestarten för att lyckas med algebran och matematiken. Även en elev med ett dåligt utgångsläge kan lyckas om hon/han är motiverad och får visst stöd på den nivå hon/han är. Både lärare och elev måste tro att det är möjligt att klara av matematiken. Därför är det viktigt att skapa situationer, där eleven kan lyckas och även om det blir fel måste läraren försöka lyfta fram det positiva i elevens försök.

Detta gäller självfallet inte enbart elever med dåligt utgångsläge utan alla elever. Vi har nog alltför ofta i matematikundervisningen underskattat de affektiva faktorernas betydelse. Motivation och självförtroende är oerhört viktigt om man skall lyckas. I detta sammanhang är tidsfaktorn mycket viktig. Om man, vilket ofta är fallet i matematik, på grund av alltför ambitiösa kurser tvingas gå fram för fort, blir många elever stressade och deras inläring försämras. Tyvärr har detta nog också drabbat en del av våra elever. Vid enkäter och samtal har många elever framhållit att de har upplevt både C- och D-kursen som mycket stressiga. Vi kan inte annat än hålla med den elev som säger "Vi skulle alltså enligt mig ha försökt att minska ner det vi skulle lära oss och koncentrera oss på det allra viktigaste". I en del fall har tyvärr stressen också bidragit till att den positiva attityd, som många elever fick till matematik i NV1, förändrades i negativ riktning under NV2. De hinner inte smälta stoffet, vilket medför att både motivation och självförtroende undergrävs. Risken är stor att de tappar lusten för matematik. Därför bör nog alla som sysslar med matematikutbildning ställa sig frågan om man inte bättre skulle kunna anpassa kursomfånget till den disponibla tiden. Kanske mer kvalitet än kvantitet skulle ge bättre resultat i längden?

Vi anser att vår undersökning ger stöd för uppfattningen att gymnasieskolan kan klara nästan all förenklingsalgebra. Ofta börjar man med förenklingar för tidigt

utan att eleverna har någon riktig förståelse för vad bokstäver står för och vad ett algebraiskt uttryck är. Man går också fram för fort. Liknande synpunkter har framförts i andra undersökningar tex av Ekenstam och Greger.

The customary way of teaching elementary algebra has to be reassessed: algebraic transformations and manipulations, described at the beginning of this article seem to be introduced too early and too quickly.

(Ekenstam & Greger, 1987, sid 312)

I grundskolan bör eleverna få viss förståelse för variabelbegreppet och lära sig använda bokstäver i olika sammanhang (tex enkla formler och ekvationer) gärna med hjälp av laborativt material. I det här sammanhanget vill vi också understryka prealgebrans betydelse och att algebralärning är en lång process.

Betydelsen av god talförståelse för att lyckas med algebran – även av negativa och rationella tal – kan inte nog betonas. Utan ordentlig talförståelse blir mycket av förenklingsalgebran obegriplig och eleven kommer hela tiden att göra fel. Om det finns brister i grundläggande talförståelse, måste dessa repareras innan det blir meningsfullt att systematiskt träna förenklingar. Om man i matematikundervisningen skyndar vidare utan att ha försäkrat sig om att eleverna har de nödvändiga förkunskaperna – vilket sker alltför ofta – blir resultatet dåligt. Ett exempel på detta är förenklingar av rationella uttryck. Området behandlades i början av NV2 och med den korta tid som stod till förfogande hann vi inte reparera bristerna i bråkräkning. Därför blev, vilket framgår av flera test, behållningen av avsnittet liten för de flesta elever.

Vi har sett exempel på att en liten detalj tex en missuppfattning av hur man hanterar negativa tal, kan försvåra algebraiska förenklingar. Eleven gör hela tiden fel. När missuppfattningen klarats upp fungerar förenklingarna bra. Detta påverkar både elevens självförtroende och motiva-

tion positivt. Inlärnigen sker språngvis och när ett hinder har övervunnits, gör eleven väsentliga framsteg. Därför är det mycket viktigt att man ordentligt analyserar elevens fel och verkligen finner grundorsaken till varför eleven gör fel. Gör man inte det är risken stor att man inte sätter in rätt åtgärder. Beror felet på tex bristande talförståelse och man enbart ger eleven mer träning i att förenkla algebraiska uttryck så befäster man troligtvis elevens felaktiga föreställningar. Träningen blir destruktiv.

De algebrakunskaper som är stabila är de eleverna har med sig från NV1. Testet både i slutet av NV2 och NV3 visar att eleverna i de flesta fall klarar enkel förenklingsalgebra med hantering av binom och polynom och tillhörande ekvationer. I början av gymnasieskolan hade merparten av eleverna stora brister på dessa områden, men under första gymnasieåret uppnådde de flesta en rimlig färdighet i denna del av algebran. Däremot har eleverna inga stabila kunskaper i hanteringen av rationella uttryck. Som vi framhållit tidigare beror detta på att eleverna hade dåliga förkunskaper i att hantera rationella tal. Avsnittet var därför ganska meningslöst för de flesta.

På frågan om hur datorer och räknare skall påverka innehållet i algebraundervisningen har vi inga slutgiltiga svar. Det finns anledning att fundera över vilka manuella färdigheter eleverna skall behärska och hur säkra de skall vara. Är det tex väsentligt att eleverna manuellt kan lösa

$$\text{ekvationen } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Ändrar vi ekvationen till } x + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{2}.$$

så kan de inte lösa den manuellt. Däremot kan båda ekvationerna enkelt lösas med samma metod på en grafitande räknare (tex genom att bestämma skärningen mellan två kurvor). En metod som kan användas på en mängd olika ekvationer. Ny teknik förändrar hela tiden villkoren

för verksamheten och det finns en risk att vi av tradition anser viss kunskap som oundgänglig, även om så inte är fallet. Med algebran är det nog så att vi i dag bör förskjuta perspektivet från *omskrivning* till *översättning*. Räknare och datorer klarar alla de omskrivningar, som ingår i traditionella skolkurser i algebra. Däremot klarar de inte av att översätta från ett problem till ett algebraiskt uttryck. Vi bör definitivt ha en ständigt pågående debatt om *vad* som är viktig matematisk kunskap och *varför*. Troligtvis bör vi också i vår undervisning ta hänsyn till att behoven är olika för dem som har matematik som huvudintresse och för dem som är intresserade av matematikens tillämpningar inom naturvetenskap och teknik, se tex (Andersson, 2000). Viss manuell algebraisk förmåga är troligtvis fortfarande nödvändig – men vilken och hur kommer synen på detta att förändras med tiden.

Vi sammanfattar våra viktigaste slutsatser i punktform:

- Man kan inte definiera någon minsta nivå på förkunskaper för att lyckas med algebran. De viktigaste faktorerna för att klara upp ett dåligt utgångsläge är att både elev och lärare tror det skall gå och att man får visst stöd på den nivå man är.
- God förståelse för variabelbegreppet och användningen av bokstäver samt god talförståelse är viktiga förkunskaper – viktigare än att kunna omforma algebraiska uttryck.
- Motivation och självförtroende är mycket viktigt om man skall lyckas med algebran.
- Ofta sker algebrainlärnigen språngvis. Det finns trösklar man skall passera.
- Det är mycket viktigt att noga analysera elevernas fel. Om tex felen vid algebraiska förenklingar beror på dålig förståelse av negativa tal är det meningslöst att öva mer på förenklingar –

det kan tom vara skadligt. Elevens problem med negativa tal måste lösas innan man kan gå vidare.

Slutligen vill vi upprepa vårt förslag från vår första rapport om ett ökat erfarenhetsutbyte om lärande och undervisning i matematik mellan lärare från olika skolformer från förskola till högskola. Vi menar då ett utbyte på lika villkor med respekt för respektive skolforms egenart och inte ett där det högre stadiet upprättar orealistiska "önskelistor". Eftersom alla är överens om att matematikinläring är en lång process, är det nödvändigt att vi – för att höja kvalitén på matematikutbildningen i landet – samverkar mer. Formerna för detta kan diskuteras, men NCM borde kunna ha en central roll i detta sammanhang.

REFERENSER

- Andersson, M. (2000). Nya former för matematikstudier. *Nämnan* 27(4), 52 – 57.
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.
- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. NämnanTEMA*. Kungälv: NCM, Göteborgs Universitet.
- Ekenstam, A., & Greger, K. (1987) On children's understanding of elementary algebra. *Journal of Structural Learning* 9, 303-315.
- Grevholm, B. & Wennström, T. (1998) Samverkan Högskola - Skola. *Nämnan* 25(3), 30 – 31.
- Grevholm, B. & Wennström, T. (1999) Samverkan Högskola – Skola II. *Nämnan* 26(4), 36 – 39.

- Högskoleverket (1999). *Räcker kunskaperna i matematik?* Stockholm: Högskoleverket.
- Johansson, B. (1998). *Förkunskapsproblem i matematik?*. Stockholm: Skolverket.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Persson, P. & Wennström, T. (1999). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse*. Rapport Högskolan Kristianstad.
- Persson, P. & Wennström, T. (2000a). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II*. Rapport Högskolan Kristianstad.
- Persson, P. & Wennström, T. (2000b). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse III*. Rapport Högskolan Kristianstad.
- Persson, P. & Wennström, T. (2000c). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse IV*. Rapport Högskolan Kristianstad.
- Persson, P. & Wennström, T. (2001). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse V*. Rapport Högskolan Kristianstad.
- Persson, P. & Wennström, T. (2000d). Algebraisk förmåga och förståelse. *Nämnan* 27(2), 53 - 61
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language*. Cambridge: The MIT Press.
- Wagner, S. & Kieran, C. (1989). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Wennström, T. (2001). Kan gymnasieläraren välja? *Nämnan* 28(1), 30 – 31.

Författarna framför ett stort tack till Gudrun Malmers Stiftelse och Skolverket för ekonomiskt stöd vid genomförandet av dessa undersökningar.

Rapporterna kan beställas via e-post: wennstrom.tomas@telia.com