

Kvalitet i matematikundervisningen

Gard Brekke och Helge Støren

I detta norska projekt är syftet att analysera elevers missuppfattningar i matematik och stödja lärares arbete med dessa. Man utvecklar skriftliga test och fortbildningsmaterial som behandlar användning, arbetssätt och aktiviteter för att förbättra undervisningen. Här kan vi ta del av arbetet inom det första området, Tal och räkning. Svenska läsare inbjuds att delta och pröva ett urval testuppgifter som presenteras på UPPSLAGET.

Projektmål

Inom det norska KIM-projektet (KIM = Kvalitet i matematikundervisningen), som startade 1993, utvecklas diagnosinstrument och utarbetas handledningsmaterial för att stödja lärare i grundskolan.

Projektet har flera olika mål. Några av målen har delmål som kan nås relativt snart. Andra kan nås först efter en omfattande insats på basis av forsknings- och utvecklingsarbete.

Huvudmålen är

- att utveckla ett integrerat test- och fortbildningspaket som kan användas av lärare för intern utvärdering
- att utveckla diagnoser som kan utgöra utgångspunkten för planering av undervisningen inom olika delar av ämnet
- att kartlägga inställning och uppfattningar som elever har till och om matematik och matematikundervisning
- att rapportera hela spektrat av elevkunskaper inom olika delar av ämnet, inte bara om en minimikunskap.

Gard Brekke är en av projektledarna och **Helge Støren** en medarbetare i KIM-projektet. Översättningen är gjord av Bo Rosén.

Syfte och innehåll

Projektet drivs i ett långsiktigt perspektiv. Syftet är att bygga upp ett system av test (diagnostiske prøver), som kan vägleda undervisningsaktiviteter i klassrummet. Testen ska bilda bas för en nationell kartläggning av matematikämnet. Uppgifterna kommer att vara knutna till olika ämnesområden. Det första är *Tal och räkning* och nästa blir *Funktioner*.

Syftet med den del av KIM-projektet, som innebär att utveckla diagnostiska test och handledningsmaterial, är att ge lärarna instrument i undervisningen. De diagnostiska uppgifterna kan gärna ges innan man startar undervisningen inom ett ämnesområde och användas för att

- identifiera och visa på uppfattningar som eleverna har även om det inte har förekommit någon undervisning inom det moment som diagnostiseras
- ge lärare information om lösningsstrategier som eleven använder vid lösandet av olika typer av uppgifter
- styra undervisningen mot att kartlägga och korrigera missuppfattningar samt att visa på nya metoder för att utveckla elevernas existerande strategier
- mäta om undervisningen gjort att eleverna blivit av med missuppfattningarna. Denna kontroll görs genom att man använder samma test både före och efter undervisningsmomentet.

Uppgifter och resultat

Testen innehåller uppgifter som elever ofta har problem med att lösa korrekt. Man ställer inte frågor där eleven kan få rätt svar utifrån felaktiga begreppsuppfattningar. Det är därför viktigt att skilja mellan uppgifter med och utan diagnostiskt perspektiv.

Uppgiften $0,24/2$ är en uppgift som ger liten diagnostisk information. Eleven kan få rätt svar även om $0,24$ uppfattas som ett par av hela tal (0 och 24). Å andra sidan är $0,12/2$ en god diagnosuppgift för den avslöjar dessa elever. En elev med den ovan beskrivna tankeformen kommer att svara 0,6.

Testuppgift

a) Sätt en ring runt det minsta talet

0,625 0,25 0,3753 0,125 0,5

b) Förklara varför det är minst?

Uppgift 19 i Tal, åk 8

Förhållandevis många elever väljer 0,3753 och ger förklaringen att det talet har längst decimaldel. Eleven uppfattar decimaltecknet som ett bråkstreck eller ett divisions-tecken. Några av dessa elever förklarar att då är talet delat i så många delar att varje del blir liten. ”0,3753 är 10 000-delar och det är väldigt lite”.

Andra ringar in 0,5 och förklarar med att detta tal har den minsta decimaldelen (5 är mindre än 25, som är mindre än 125,...). Detta avslöjar att eleven uppfattar ett tal i decimalform som ett talpar av hela tal med decimaltecknet som skiljetecken.

Elever som ringar in 0,125 anger att detta tal har minst antal tiondelar kan anses ha förstått en viktig egenskap hos ”siffrornas position” i decimalformen.

I en del uppgifter kan tolkningen av svaret tyckas enkel, men det ger ändå mycket information om uppfattningar elever har om tal i decimalform och tillhörande räkneoperationer. Huvudproblemet för en del elever tycks antingen vara att man inte kan

delat med ett tal som är mindre än 1 eller att man inte kan få ”ett större tal” som resultat av divisionen. Nästa uppgift är en sådan.

Testuppgift

Skriv svaret som ett heltal eller ett tal i decimalform. Skriv NEJ om du inte tror att det går att räkna ut något svar.

d) $3/0,5 = \dots$

Uppgift 2d i Tal och räkning

Var sjunde elev i åk 8 skriver ”Nej”, det finns inte något svar på uppgiften. I stället för att svara 6 väljer en del att skriva 0,6.

Man kan som elev undvika att dividera med ett tal som är mindre än ett på flera sätt. En del väljer att multiplicera och svarar med 1,5. Svaret 0,15 kan tolkas att man valt multiplikation och ser på decimaldelen som ett självständigt tal. Svaret 0,166 tyder på att man kastat om ordningen och räknat ut $0,5/3$. Svaret 2,5 uppstår genom subtraktion.

Vilka uppfattningar har elever om räkneoperationer som kan utföras med tal i decimalform?

Testuppgift

Sätt en ring runt alla uttryck som passar till uppgiften:

d) 1 kg köttfärs kostar 69 kr. Karin köper 0,6 kg. Hur mycket kostar det?

$69 \cdot 0,6$ $69/0,6$ $0,6/69$ $0,6 \cdot 69$ $69 - 0,6$

Uppgift 4d i Tal och räkning, åk 6 och åk 8

Både $69 \cdot 0,6$ och $0,6 \cdot 69$ är korrekta svar. Över hälften av eleverna i åttonde klass ger ett eller bägge dessa svar. För en del är det ett problem att få ett mindre tal som produkt. Kan detta vara orsaken till att ungefär var fjärde elev i åk 8 svarar $69/0,6$?

Uppgiftstexter kan också belysa om eleven kan koppla ett uttryck i decimalform till en aktuell problemställning. Uppgiften på nästa sida, för åk 6, är ett exempel på detta.

Testuppgift

Skriv en berättelse som passar till följande beräkning:

a) $18/4,5 = 4$

Uppgift 10a i Tal och räkning, åk 6

En del svar pekar på att elever anser att problemet har med innehållsdivision att göra. Många har använt köp av choklad i berättelsen. *Man har 18 kr, köper chokladbitar för 4,50 kr/st och får 4 bitar.*

Andra elever låter innehållet vara en räkneuppgift i skolan. *Läraren frågar vad 18 dividerat med 4,5 blir. Karin säger att svaret är fyra.*

Inte så sällan förekommer att man vänder på talen. En del skriver en berättelse till $4,5/18$ medan andra väljer $18/4$. På det sättet undgår man innehållsdivision.

Det är inte ovanligt att man undviker problemet med innehållsdivision genom att låta en person få hälften av det de andra får. *Fyra arbetare och en lärling skall dela på ... eller Fyra klasskamrater skall dela 18 kakor. En av dem hade med sin lillebror. Lillebror fick bara halv ranson.*

Uppgiften avslöjar att många elever har vaga föreställningar om innehållsdivision som tankemodell och att många av dessa troligen kommer att få problem med att välja räknesätt i samband med textuppgifter.

Ett test bör enligt vår mening innehålla relativt många uppgifter, där eleverna kan ge fel svar. Det är därför viktigt att eleverna känner till något om syftet med testet och att detta skiljer sig från vanliga uppgifter.

Många elever tycks uppfatta decimalform som par av tal. Det är talet och inte siffrornas betydelse som är det avgörande. Följande uppgift kan illustrera detta.

Testuppgift

En klocka visar 8.59 (eller en minut i nio).

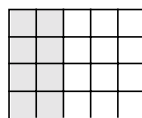
- a) Är det ett tal i decimalform? ...
b) Förklara hur du vet om det är ett tal i decimalform eller ej.

Uppgift 28 i Tal, åk 6 och åk 8

Över hälften av eleverna i sjätte och åttonde klass menar att det är decimalform, medan ca 40 % menar att det inte är det. De flesta (av dem som svarat) i dessa elevgrupper förklarar det utifrån utseendet av talet. Bara 12 % av eleverna i åttonde och 6 % i sjätte klass hänvisar till totalssystemet i sina förklaringar. Var fjärde elev i åttonde och var tredje i sjätte klass av de som har svarat ”nej” på fråga a) ger en förklaring som syftar på utseendet hos talet.

Uppfattningen att ett tal i decimalform kan representera storlek testas på flera sätt.

Testuppgift



a) Sätt en ring runt det tal som visar hur stor del av hela rektangeln som är skuggad.

- A 8,12 B 0,4
C 8,20 D 0,8

b) Förklara varför det är det rätta svaret

Uppgift 16 i Tal, åk 6 och åk 8

I åttonde klass svarar omkring 40% av eleverna 0,4. Var fjärde elev svarar 8,20. Det senare tyder på att de tolkar komma som ett skiljetecken – åtta av tjugo. Var åttonde elev svarar 8,12. Också här kan kommat tolkas som ett skiljetecken – åtta skuggade och 12 oskuggade. De flesta av dessa elever gav förklaringar i överensstämmelser med förklaringen ovan. Var femte elev svarar 0,8. Bara några av dessa ger en förklaring över huvud taget.

Ett annat exempel som ger god diagnostisk information är nästa uppgift.

Testuppgift

Skriv ett uttryck som passar för att lösa följande uppgift

Anna köper bananer i en butik. Bananerna kostar 13,50 kr/kg. Hur mycket kan Anna köpa för 10,50 kr?

Uppgift 15e i Tal och räkning, åk 8

Det korrekta uttrycket, 10,50/13,50, kunde bara 20 % av eleverna i åttonde klass ställa upp medan 42 % skrev 13,50/10,50. Detta pekar på föreställningen att man bör ”dividera det största talet med det minsta” är förhärskande när det gäller att gå från en situation i en text till att teckna hur problemet ska lösas. Beräkningen kan göras med räknare.

Testmaterialet kan brukas på flera sätt. De bör uppfattas som en samling diagnostiska uppgifter som kan vara ett redskap för att vinna kunskap om elevtänkande – både hos den enskilde eleven och om hur utbredda dessa uppfattningar är i klassen. Testen behöver därför inte genomföras på en gång utan kan också betraktas som en samling uppgifter som har visat sig ge rik undervisningsinformation, både när de löses i samtal med läraren och när de är en del av ett skriftligt test. Det bör påpekas att varje diagnostisk uppgift är knuten till ett speciellt problemområde.

Fortbildningsmaterial

Det finns olika versioner av testen i åk 4, åk 6 och åk 8. De uppgifter som för närvarande är framtagna är riktade mot förståelse av de fyra räknesätten och talsystemet. Dessa uppgifter är samlade i två testhäften kallade *Tall* respektive *Tallregning*.

Fortbildningsmaterialet har tre komponenter som är knutna till de testuppgifterna.

1. Den *första komponenten* har en genomgång av testuppgifterna följt av en diskussion om olika elevsvar och missuppfattningar. Till varje uppgift finns en svarsfördelning från en nationell standardisering.
2. I den *andra komponenten* finns en generell diskussion av matematisk kompetens, inläring i matematik, arbetssätt och arbetsformer i ämnet samt användningen av testen.
3. I den *tredje komponenten* beskrivs en undervisningsaktiviteter med kommentarer och uppslag i syfte att åtgärda de svårigheter som testen avslöjat.

Det är möjligt att använda sig av testen i undervisningen utan att först ha läst alla delar av fortbildningsmaterialet. Ett klargörande av följande frågor har en central plats i materialet.

- *Vad är diagnostiska uppgifter?*
- *Hur fungerar en diagnostisk uppgift?*
- *Hur ska man använda de diagnostiska uppgifterna i klassrummet?*
- *Vad är missuppfattningar?*
- *Vilka pedagogiska konsekvenser får våra kunskaper om missuppfattningar?*
- *Hur ska man genomföra en undervisning utifrån kunskaper om den enskild elevs missuppfattningar?*

För att projektets mål, att förbättra, fördjupa och utveckla matematikundervisningen skall nås måste komponenternas innehåll studeras av lärare på studie- och fortbildningsdagar. Först då man på allvar tar upp frågor, diskuterar och analyserar tillsammans och för en kontinuerlig diskussion av ämnesinnehåll på lärarrummen kan vi få till stånd förbättringar.

Det finns ett stort behov av fortbildning av lärare i samband med att KIM-komponenterna ges ut. Denna fortbildning kan genomföras dels genom direkt fortbildning eller indirekt genom instruktörer. Behovet av instruktörer och handledare är beroende av hur lättillgängligt ämnesinnehållet görs i de olika komponenterna, vilken motivation lärare har för att ta de nya hjälpmedlen till sig samt hur fortbildningen blir organiserad. Det som skulle ge bäst genomslag för projektet vore kanske att ha en grupp på ett hundratal, kommunalt anställda instruktörer.

Två användningar av testdata

Kärnan i KIM-projektet är de nyutvecklade testen kring förståelsen av och inställningen till matematik. All information som fås kan användas på minst två sätt:

- Enskilda elever testas för att kartlägga vilka svårigheter eleven har. Detta ger viktig information till först och främst eleven och läraren, men i förlängningen också till läromedelsförfattare, lärarutbildare och forskare.
- För att finna samband mellan testresultat och förklaringsmodeller. Detta ger viktig information i första hand till skolmyndigheter och de som arbetar i skolan.

Projektet skall ge bidrag till bättre matematikundervisning. KIM vänder sig till lärare för att få till stånd en mera genomarbetad undervisning kring grundläggande begrepp. Vår uppfattning är att en sådan undervisning, som knyter an till centrala begrepp, kommer att leda till en bättre förståelse av matematik. Diagnoserna i komponenterna ger lärare redskap att på ett systematiskt sätt finna var eleverna har speciella svårigheter. Till diagnoserna hör också konkreta råd och ideér till hur man kan avhjälpa dessa.

På detta sätt försöker projektet att förbättra matematikundervisningen från grunden. Genom de erfarenheter som man får efterhand genom att testen utprövas och används, kommer KIM-resultaten också att ge viktig information till läromedelsförfattare, lärarutbildare och forskare.

För att testen skall vara bra att använda måste de vara standardiserade. I standardiseringsarbetet av ett test måste man använda ett stort antal elever och ha kontroll över en rad bakgrundsdata av typ kön, religion, skol- och klasstorlek, glesbygd respektive tätort, mm för att säkra att urvalet är representativt. Man får därmed automatiskt in de data som kan användas till analyser enligt punkt 2 ovan. Vill man lägga vikt vid detta är det möjligt att utvidga omfånget av bakgrundsdata. Man kan då utpröva testen på ett ännu större urval än det som krävs i en standardiseringssituation.

KIM-projektet genomförs vid Institutt for lærerutdanning og skoleutvekkling (ILS), Oslo och Telemarksforskning – Notodden (TFN) på uppdrag av Kyrkje-, utdannings- og forskningsdepartementet (KUF).

Vilken information ger KIM?

Vid ett möte med representanter för KIM-projektet och stadsråden tog de senare upp att det skulle vara intressant att få kunskaper om prestationer i matematik hos elever på olika stadier. Man vill också att det skaffas bakgrundsdata som kan medverka till att förklara skillnader mellan elever. I första fasen av projektet har arbetet med standardiseringen gått så långt att det är omöjligt att få med frågor som ger data om ytterligare variabler. I kommande studier i projektet är detta möjligt.

Det bör påpekas att om man skall kunna uttala sig om samband mellan alla dessa variabler och matematikprestationer med hög säkerhet krävs det ett större urval av elever än själva standardiseringsarbetet kräver. Genom den första standardiseringen har man

- 1 En nationell kartläggning av begreppsförståelse och missuppfattningar inom olika delar av ämnet.
- 2 Bakgrundsvariabler – kön, region, skol- och klasstorlek, tät/gles bebyggelse och struktur för bosättning – som lätt kan studeras.
- 3 Anteckningar om de elever som har anorlunda språkursprung än norska. Denna elevgrupp kan studeras särskilt.
- 4 Information om vilka läromedel som använts av olika elever.

I projektplanen för KIM är det planerat att upprepa den nationella standardiseringen om några år. Detta kan ge oss indikation på att det har skett förändringar, men det kan vara vanskligt att peka på orsakerna till dessa.

Referenser

- Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Nasjonalt lærermiddelsenter.
- Brekke, G. (1995). *Veiledning til diagnostiske prøver. Tall og tallregning*. Oslo: Nasjonalt lærermiddelsenter.
- Diagnostiske prøver 4. klasse, 6. klasse og 8. klasse. Oslo: Nasjonalt lærermiddelsenter.