

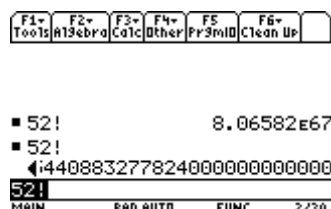
Avancerade räknare - Debattinlägg 2

Thunberg och Lingefjärd har i sitt andra debattinlägg mildrat sina tidigare kategoriskt negativa påståenden om grafräknare och symbolhanterande räknare. Istället ställs en rad frågor kring räknarnas användning i undervisningen, frågor som verkligen är av stor vikt, men som just i Sverige blivit väldigt lite undersökta. Men, som jag i mitt tidigare inlägg påpekat, finns det i den modernaste internationella forskningen en slutsats som verkar vara gemensam: Det är lärarens uppfattning om hur matematikundervisning ska bedrivas och dennes sätt att genomföra den som är avgörande för om räknarna används på ett didaktiskt fruktbart sätt. Och givetvis är även lärarens kunskaper i såväl matematik som didaktik grundläggande, och detta inkluderar räknar användningen.

När man planerar och genomför matematikundervisning med eller utan räknare är det viktigt att kunna se möjligheterna och inte bara koncentrera sig på svårigheterna. För att illustrera det, ska jag använda de tre exempel som T & L gav i andra debattinlägget där de är "oroliga för att själva innebörden av matematik som är ett ämne avsedd att utveckla och använda våra hjärnresurser lätt går förlorad om eleverna tror att det är räknaren som är bäst."

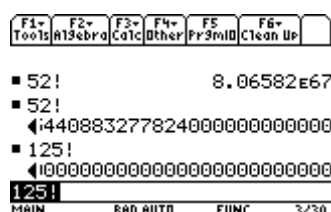
Alla maskiner består av ändliga system, och kan därför inte inrymma oändligheter annat än som symboler. En räknare såväl som en dator har alltså en begränsning i hur stora eller små tal de kan behandla och hur många siffror i ett tal de kan producera. Genom att medvetet välja exempel som går strax utanför maskinernas arbetsområde, kan man ju alltid "bevisa" hur dåliga eller ofullständiga de är. Exempelen T & L valde är just sådana. Men de glömde nog bort möjligheterna...

Vi antar att en klass börjat arbeta med sannolikhetslära och då kommit in på kombinatorik. Man funderar på hur många sätt det går att blanda en kortlek på 52 kort och kommer fram till att det finns 52! olika sådana. Talet är mycket stort, ungefär $8,1 \cdot 10^{67}$, vilket i sig tål att funderas på. Men klassen har turen att arbeta med symbolhanterande räknare som kan ge samtliga siffror i talet, och någon upptäcker att detta slutar på ett antal nollor, närmare bestämt 12 st. Varför är det så många nollor på slutet, och varför just 12 i det här fallet?



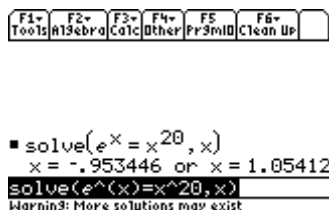
Detta kan nu läraren fånga upp som en undersökande aktivitet med de symbolhanterande räknarna som laborativt verktyg. Vilka fakulteter slutar på en eller flera nollor? Ja, det är ju frågan och med 5! När kommer nästa nolla? När blir det 3, 4, osv? Om det kommer en ny nolla med vart femte tal borde det väl vara 10 st i 52!? Var kommer de två "extra" ifrån? Javisst ja, ett tal kan ha mer än en faktor 5. Finns det något mönster i detta?

Här kan nu eleverna på egen hand skapa ett teoretiskt bygge, som sedan kan bekräftas t.ex. genom att se hur många nollor talet 125! slutar på:



Jodå, efter lite noggrant räknande bekräftas det rätta svaret, 30 st. Därifrån är steget inte långt till att med teorins hjälp beräkna antalet nollor i 1000! eller varför inte 1000 000!

Ekvationen $e^x = x^{20}$ är ett alldeles utmärkt exempel på användbarheten hos grafitande räknare. Man kan nämligen lätt göra något som manuellt är väldigt tidsödande, att rita om grafer i olika skalor. Skalning är ett viktigt begrepp inom tillämpad matematik, och en situation ser väldigt olika ut beroende på vilken enhet man sätter för grafen. Men låt oss nu se vad som händer om man använder solve-kommandot på räknaren:



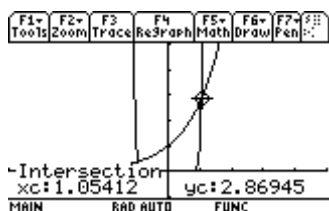
```

F1- F2- F3- F4- F5- F6-
Tools Math Calc Other Pr3mID Clean Up

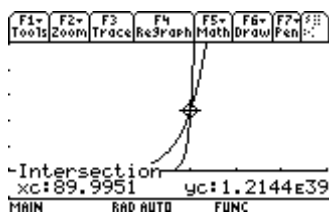
■ solve(e^x = x^20, x)
x = -.953446 or x = 1.05412
solve(e^(x)=x^20,x)
Warning: More solutions may exist

```

Man får mycket riktigt bara två lösningar, men räknaren ger längst ner en varning: "More solutions may exist". Det är alltså upp till användaren att finna dem, och då med grafiska metoder. Hur ser problemet ut om man klyver ekvationen i två funktioner och söker deras skärningar?

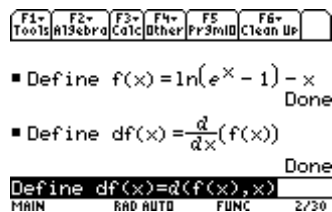


Jodå, de två skärningarna ger de två lösningar som redan erhållits (skärmbilden visar en av dem). Men finns det en till? Här kommer en viktig vetskap in i bilden, som man inte bevisar förrän i första analyskursen i högskolematematiken. Den kan dock ges en enklare form och med fördel diskuteras redan i gymnasie matematiken: Varje exponentialfunktion med basen större än 1 blir för tillräckligt stora x -värden större än varje polynomfunktion. T.ex. blir $y = e^x$ större än $y = x^{20}$ så småningom, och ännu en skärning måste alltså finnas. Med denna kunskap i bagaget handlar det hela bara om att systematiskt skala om diagrammet tills lösningen hittas:



Tilläggs bör att om man istället använder datormjukvara, får man göra liknande överväganden som för räknarna. Jag provade t.ex. att lösa ekvationen med hjälp av det öppna CAS-programmet MuPAD, och fick då som enda rot $x \approx 89,9951$ om jag inte specifikt angav rätt intervall inom vilket lösningen skulle sökas. Varje försök resulterade dessutom alltid i bara ett svar, och ingen antydning fanns om att fler lösningar kunde finnas. Detta är alltså en kunskap man måste ha, oavsett med vilken metod ekvationen ska lösas.

Slutligen har vi exemplet med ekvationen $\ln(e^x - 1) = x$, som ju saknar lösning. Men $y = x$ är en asymptot till $y = \ln(e^x - 1)$, vilket innebär att ju större x -värde desto mindre blir skillnaden i värde mellan dessa funktioner. Varje numerisk metod slutar därför alltid vid den punkt där beräkningsverktyget inte längre skiljer på värdena. En TI-89 Titanium ger t.ex. värdet $x \approx 245$ med solve-kommandot. Man kan också prova med Newton-Raphsons metod, och definierar:



Sedan börjar vi med förslagsvis punkten $p = 1$ och gör iterationer:



Dessa iterationer kan man fortsätta med ett tag, men till sist stannar p vid ett värde:



Naturligtvis är inte heller detta en lösning, men räknarens kapacitet tog här slut på ett annat sätt. Vad händer om man provar motsvarande med hjälp av en dator? MuPAD svarade *FAIL*, men kan man vara säker på att det inte existerar någon lösning för det (se ovan)? Detta är naturligtvis en utmärkt utgångspunkt för att med elever diskutera svagheter hos alla numeriska beräkningsmetoder och –hjälpmedel. I grunden måste alltid matematiska kunskaper finnas som gör att man kan resonera sig fram till att ekvationen måste sakna lösning.

Till sist vill jag också kommentera inlägget av Simon Fall vid Bollerups Naturbruksgymnasium. Jag är mycket förvånad över det, som jag tycker, fördomsfulla sätt flickors och pojkars sätt att närma sig matematik och räknare relateras. Självt har jag undervisat bl.a. på det naturvetenskapliga programmet och på hotell- och restaurangprogrammet. I båda fallen var det vanligt med en mindre övervikt av flickor i klasserna. Men inte har jag sett några grundläggande könsmissiga skillnader, utan det hela handlar om personliga intressen och förhållningssätt. Inte tror jag heller på att Simon Falls kvinnliga elever har en sådan teknikrädsla som han påstår, eller att de manliga eleverna mest är intresserade av spel!

Ett annat påstående som också förvånar i inlägget är att han inte använder räknarna "i allt för stor utsträckning". Vad det innebär specificeras inte, men i vad som övrigt sägs kan utläsas att det kan innebära "sällan". Hur rimmar det med vad som står i styrdokumentet för ämnet matematik? I kursplanen för Ma A finner man under "Mål som elever ska ha uppnått efter avslutad kurs":

- Eleven skall ha vana att vid problemlösning använda dator och grafitande räknare för att utföra beräkningar och åskådliggöra grafer och diagram.

Om man i sin undervisning utgår från olika problemställningar för att utveckla elevernas matematiska kunskaper och färdigheter, betyder det att grafräknarna måste användas ofta och flitigt. Det finns alltså välgrundade skäl till varför detta skrivits in i kursplanerna. Och för mig som professionell lärare och sedermera lärarutbildare är det en självklarhet att de nationella styrdokumentet följs. Jag hoppas detsamma gäller för alla yrkesverksamma lärare.

Per-Eskil Persson
Malmö Höskola
Lärrutbildningen
per-eskil.persson@lut.mah.se