

Avancerade räknare – en naturligt verktyg i gymnasiets matematikundervisning.

Svar på debattartikel av Thunberg & Lingefjärd.

Med utgångspunkt i Skolverkets beslut att symbolhanterande räknare ska vara tillåtna vid delar av de nationella proven från och med nästa läsår, går Hans Thunberg och Thomas Lingefjärd i Nämnaren nr 4, 2006 till ett ganska hårt angrepp mot användningen av grafräknare i gymnasieskolans undervisning. I sin kritik menar de att de utgår från vad forskning och erfarenhet hittills visat, men detta vill jag starkt ifrågasätta.

Min egen bakgrund är att jag varit lärare matematik och fysik i 26 år inom olika skolformer, främst gymnasiet och vuxenutbildningen. Jag har upplevt både introduktionen av datorer och miniräknare i undervisningen. Det är intressant att jämföra skillnaderna mellan hur de två elektroniska hjälpmedlen introducerades för lärarna. De dyra och krångliga datorerna gavs mycket utrymme för kompetensutveckling, medan lärarna helt på egen hand förväntades lära sig hur man använder de förhållandevis billiga och fysiskt lätthanterliga räknarna. Synen ”uppifrån” var nog att det bara var fråga om räknehjälpmedel, och räkna kunde väl matematiklärarna redan? Men det var ju inte så enkelt. Det krävs att lärarna klarar att utnyttja räknarna som det didaktiska verktyg de kan vara, och för det måste utbildning till.

Själv tillhör jag de ganska många lärare som på egen hand satt sig in i hur räknarna fungerar och genom åren utvecklat lämpliga arbetssätt och aktiviteter för dem. Om man dessutom har kunnat diskutera de didaktiska villkoren för räknarna, som jag haft förmånen att få göra tillsammans med min tidigare lärarkollega, Tomas Wennström, har man upptäckt var i matematikkurserna räknarna verkligen kan stärka och utveckla både beräkningsmetoder och begreppsförståelse. Självfallet ser man också sammanhang där räknarna inte bör användas. Detta måste vara ett aktivt val av läraren i undervisningssituationen, och förutsättningarna bör noga diskuteras med eleverna. Alla elektroniska hjälpmedel, inklusive datorer och räknare, har sina begränsningar. Detta kan i vissa situationer ge upphov till missförstånd hos elever, vilket forskningen mycket riktigt visat (se t.ex. Dahland & Lingfjärd, 1996, eller Drijvers, 2000). Det är givetvis lärarens uppgift att för eleverna synliggöra ett verktygs begränsningar och att ta hänsyn till dem i undervisningen.

Under åren har jag mött, och fått bemöta, en rad mindre välgrundade meningar om räknare. De kan komma från föräldrar till eleverna, men man hör dem också från en del företrädare för universitet och högskolor. Ofta går uppfattningarna ut på att elever är för lata för att räkna ut enkla uppgifter i huvudet så de låter räknaren göra jobbet, eleverna blir inte tillräckligt stimulerade och utmanade, och det medför att de inte lär sig grundläggande matematik, vilket i sin tur inverkar menligt på studier på högskolenivå. Att förkunskaperna i matematik hos nybörjarstudenterna vid högskolan förändrats med åren finns ju klart belagt (Brandell, 2002), men är det verkligen räknarnas ”fel”? Jag kan inte se att den kopplingen är visad med någon forskning, och jag menar att man måste se på faktorer som förändringar i kursplaneinnehåll och målbeskrivningar, timtilldelning i gymnasiekurserna, och även samhällsförändringar i stort som exempelvis inställningen till studier hos allmänheten.

Egen erfarenhet och forskning

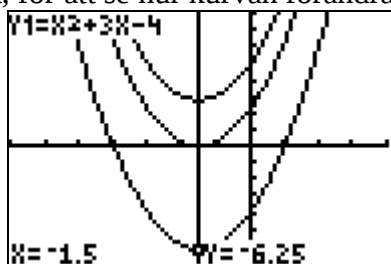
Genom åren har jag arbetat med en rad räknarmodeller av varierande märken. Vägledande för valet av räknare har alltid varit hur väl de passar in i mitt sätt att bedriva undervisning och vilka möjligheter de ger för metodutveckling. De ska också vara lätta för eleverna att arbeta

med, samtidigt som de är tillräckligt avancerade för att vara användbara i många sammanhang, även i andra ämnen som exempelvis fysik.

En förutsättning för en framgångsrik användning av räknarna är att man lägger tid och ansträngning i början på att sätta eleverna väl in i deras grundfunktioner och arbetssätt (numeriskt, symbolhanterande?). Sedan bygger man på efterhand på ett strategiskt och väl genomtänkt sätt (när ska nya funktioner, redskap och finesser introduceras?). När man väl tänkt igenom detta en gång, blir det med tiden allt lättare att genomföra och även utveckla.

Jag har också bedrivit klassrumsforskning på min egen och andras undervisning sedan 1998. Mitt huvudområde är algebra på gymnasienivå, och där kommer frågan om räknarna naturligtvis upp, även om de inte utgör mitt huvudfokus. Speciellt intressant är det för mig att se hur de symbolhanterande räknarna och de symbolhanterande datormjukvarorna påverkar algebralärandet. Första gången jag på allvar uppmärksammades på detta var i en artikel av Herget m.fl. (2001) i tidskriften Elementa, i vilken man ifrågasatte i vilken utsträckning elever behöver kunna räkna för hand när det finns datoralgebra (CAS). I min forskning om algebra har jag berört räknarna och hur eleverna uppfattar dem. En särskilt tydlig episod jag beskrivit är hur en pojke, som inte haft det så lätt med matematiken på naturvetenskapsprogrammet, spontant säger när vi diskuterar algebra i slutet av årskurs 3: "Jag skulle aldrig ha förstått vad algebran gick ut på om vi inte hade haft grafräknarna" (Persson, 2005).

Det skulle vara möjligt att här ge många exempel från min egen undervisning, men jag ska nöja mig med ett par. Låt säga att en lektion handlar om kvadratiske polynom och vi ska undersöka det kvadratiske polynomet $x^2 + 3x - 4$. Vad betyder då detta matematiska objekt och vad kan man göra med det? Låt oss pröva med att låta x fungera som en variabel och beräkna värdet av uttrycket (detta kallas allmänt funktionsperspektivet inom algebraforskningen). Vilka värden kan uttrycket anta? Kan olika x ge samma värde? Blir uttrycket lika med noll för något x , och för vilket/vilka i så fall? Räknaren är här till god hjälp. Man låter $Y1$ vara lika med uttrycket och låter räknaren rita upp funktionen. Nollställena, minsta värde och symmetri ser man med en blick, och räknarens inbyggda verktyg ger snabbt värdena. Man kan också prova att variera parametrarna, exempelvis genom att byta ut -4 mot andra tal, för att se hur kurvan förändras:



Om man vill försäkra sig om exakt symmetri kan man exempelvis använda räknarens tabellfunktion. Nu kan man gå vidare och ställa frågan om hur många nollställena kvadratiske uttryck kan tänkas ha och undersöka vad som bestämmer det. Här behövs nu en algebraisk modell, som faktiskt har rötter ända tillbaks i Al-Kwarizmis framställning av andragradekvationers lösning, nämligen kvadratkomplettering. Detta kan göras helt konkret med en geometrisk figur, parallellt med att andragradsekvationen löses, och det hela utmynnar i den bekanta formeln. Intressant är nu att gå tillbaka till grafen och se hur formeln passar in där. Första termen ger ju faktiskt symmetrilinjen, och rotuttrycket ger avståndet mellan denna och nollställena, såvida inte det inte är ett negativt tal under rottecknet, för då...

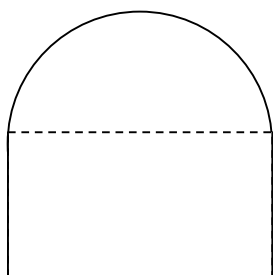
Självfallet ska eleverna få upptäcka allt detta på egen hand, fast med hjälp av strategiskt ställda frågor till eleverna. Viktigt är också att resultaten av undersökningarna diskuteras, kanske gruppvis, men också i helklass. Sedan kan man bygga vidare i olika riktningar,

exempelvis med icke-linjära ekvationssystem. Eleverna kanske kan ta reda på varför det är så svårt att finna en lösning till:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 \\ y = -x^2 - 4x - 2 \end{cases}$$

Detta, eller liknande sätt, att arbeta med andragsuttryck tror jag känns igen av väldigt många lärare. Det är ingalunda så sällsynt som Thunberg & Lingefjärd vill påskina.

Maximi- och minimiproblem kommer egentligen inte förrän i matematik C-kursen, när derivata införts. Men det går att arbeta med sådana långt tidigare. Ett enkelt sådant problem är följande: Ett rektangulärt fönster ska ha den invändiga omkretsen 400 cm. Vilka mått har fönstret med största möjliga area och denna omkrets? Här kan man införa en variabel för ena sidan, och bilda ett uttryck för arean. På grafräknaren kan man sedan undersöka detta med hjälp av tabellfunktion och med graf, för att konstatera att en kvadrat ger största möjliga area. Men jag har med naturvetarelever sedan gjort problemet lite svårare: Antag att fönstret istället ska ha formen av en halvcirkel ovanpå en rektangel, fortfarande med omkretsen 400 cm:



Detta har jag gjort i AB-kursen, i samband med funktionsläran, och min erfarenhet är att eleverna med räknarens hjälp på ett ganska tidigt stadium förstått den här problemtypen, och även kunnat ge ett numeriskt svar på en uppgift som är lite tekniskt krånglig om man löser den analytiskt.

Överhuvudtaget har jag inte, vare sig i min lärargärning, eller när jag forskat på algebraundervisningen, sett några spår av att räknarna på något sätt försämrat elevernas matematiska förmåga. Tvärtom är min erfarenhet att den på många sätt, inte minst när det gäller förståelsen, är betydligt förbättrad. Visst finns det nya typer av svårigheter man som lärare måste tackla när man börjar använda nya verktyg i undervisningen, men det är väl ingen nyhet inom didaktiken? Är det någon som minns hur det var med räknestickorna, t.ex.?

Man måste komma ihåg att matematikkurserna inom gymnasieskolan inte bara är till för dem som senare ska studera på matematikintensiva högskoleutbildningar. Jag har själv använt grafräknare i A-kursen på exempelvis hotell- och restaurangprogrammet och på fordonsprogrammet. Där har det varit lite svårare, eftersom grafräknarna bara fått lånas under vissa kursavsnitt och prov. Det egentligen inte bra om man på nationella prov plötsligt ska använda en räknare men inte är förtrogen med, men kursplanen kräver det. Men min erfarenhet var att eleverna efter lite inledande tveksamhet sedan tyckte det var både roligt och intressant att arbeta med en mer avancerad räknare, och så förstod de ju någorlunda det där besvärliga funktionsavsnittet.

Andras forskning

Thunberg och Lingefjärd påstår att forskningen inte på något tydligt sätt kunnat påvisa några generella positiva effekter på matematisk begreppsbildning och förståelse vid användning av avancerade räknare. Detta menar jag är en tvivelaktig slutsats, och frågan är hur mycket den baseras på vad som verkligen kommit fram i nyare forskning? Thomas Bergqvists forskningsöversikt från 2002 citeras, men hans slutsatser relateras inte. I hans förslag till

åtgärder, baserade på bl.a. relevant forskning fram till denna tidpunkt, finner man för nationella prov:

- *Symbolhanterande räknare bör bli tillåtet hjälpmedel på nationella prov i matematik, gymnasiets matematikkurser A – E.*
- *Proven bör även i fortsättningen ska vara tvådelade, med en räknarfri del och en del där räknare får användas.*
- *På den senare delen bör alla typer av räknare tillåtas, såväl grafritande som symbolhanterande. (Bergqvist, 2002, s.15)*

Faktum är alltså att Skolverket i sitt beslut bara följt expertutredarens rekommendationer. Jag menar att beslutet är riktigt av samma skäl som man anger från Skolverket. Om inte symbolhanterande räknare får användas vid de nationella proven, så lägger man ett effektivt hinder för att dem används i undervisningen. För att det ska vara någon mening med att införa dem, måste man utnyttja dem under elevernas hela gymnasietid, och då inser man lätt hur fel det blir om eleverna just under nationella proven tvingas använda en räknare som arbetar på ett helt annat sätt än de är vana vid.

En annan forskningsöversikt, som är välkänd och väl citerad, är den som gjordes av en grupp under ledning av Gail Burrill (2002), som tidigare varit president för den inflytelserika amerikanska matematiklärarorganisationen NCTM. Tyvärr försöker Thunberg och Lingefjärd misstänkliggöra rapporten, eftersom den fått forskningsmedel från Texas Instruments, men om man läser den inser man att gruppen haft helt fria händer. Ett antal relevanta studier sorterades ut med hjälp av stränga vetenskapliga kriterier, och av de 47 som uppfyllde dessa (bl.a. Dahland & Lingefjärds!) gjorde man en syntes med åtföljande rekommendationer för undervisningen. Studierna innehöll för räknarna både positiva och negativa faktorer, men de positiva övervägde klart, vilket framgår av slutsatserna.

Det har skett, och sker, en hel del ny forskning, inte minst kring CAS (både räknar- och datorstödd), dock mycket lite i Sverige. Det finns forskargrupper i bl.a. Nederländerna, Tyskland, Österrike, Frankrike och USA. Ett mycket betydelsefullt arbete är Paul Drijvers doktoravhandling från 2003, *Learning algebra in a computer algebra environment*, i vilken han grundligt analyserar undervisning med CAS. Hans slutsatser innebär att CAS verkligen förstärker och ökar elevernas begreppsförståelse, symbolkänsla och problemlösningsförmåga, under förutsättning att läraren arbetar med didaktiskt väl anpassade metoder. I själva verket är det läraren och inte verktyget som är nyckeln till elevernas framgång, något som vi känner väl till sedan tidigare!

Drijvers har publicerat en hel del artiklar i ämnet (se t.ex. Drijvers 2002a; 2002b), även tillsammans med i algebrasammanhang välkända Carolyn Kieran (Kieran & Drijvers, 2006). Den franska gruppen kring Michele Artigue har publicerat en del på engelska (t.ex. Artigue, 2002; Lagrange, 1999; Guin & Trouche, 1999). En del har kommenterats av Ruthven (2002). Den intresserade, som vill bilda sig en egen uppfattning om vad forskningen säger, rekommenderas att studera några av dessa. Examination av elever finns bl.a. i dokumentationen från en konferens om CAS (Kokol-Voljc m.fl., 2000). Guin m.fl. (2005) slutligen är redaktörer för boken *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators – Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Det är ju faktiskt detta vi diskuterar.

Lärarytbildning

Bergqvist (2002) gav i sin utredning också rekommendationer för lärarytbildningen:

- *Vi föreslår att blivande gymnasielärare undervisas om och med symbolhanterande räknare under sin utbildning.*
- *Detta ska gälla såväl inom ämnesteoritiska kurser som inom didaktiska och pedagogiska kurser.*

- *Det kan vara lämpligt att införa en kurs i numeriska metoder, eller motsvarande, där studenterna får lära sig hur räknare fungerar i olika situationer. (s.16)*

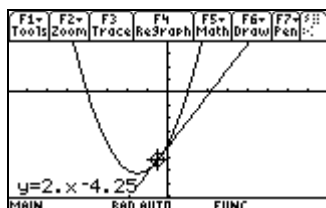
Jag arbetar sedan drygt tre år vid Lärarutbildningen i Malmö, till stor del med blivande gymnasielärare (nej, jag är inte en av de "konsulenter" som debattörerna ondgör sig över). Självklart ingår förtrogenhet med grafräknarna och deras användning i gymnasieundervisningen i samtliga våra matematikdidaktiska kurser, inklusive numeriska metoder. Under femte terminen går vi också djupare med de brännande frågorna om hur räknarna didaktiskt används/bör användas mot bakgrund av vad bl.a. forskning och erfarenhet visat. På samma sätt gör vi för övrigt också med olika typer av mjukvara för datorer, som kalkylprogram, geometriprogram, avancerade matematikprogram m.m.

Det är min övertygelse att man inom landets samtliga lärarutbildningar ger blivande matematiklärare sådana didaktiska kunskaper att man kan hantera räknare på ett bra sätt i undervisningen. Att tyst, enskild räkning förekommer i hög grad i klassrummen idag är välkänt. Men varför ska man som debattörerna förutsätta att ett av alla kritiserat arbetssätt kommer att bli det allmänna framöver? Tvärtom tror jag att det finns en stark önskan hos dagens verksamma lärare att få möjlighet att utveckla både sin ämnesteoretiska och sin didaktiska kompetens, inte minst vad gäller just räknarna. Detta kan bli en viktig ingrediens i den nationella kompetensutvecklingsinsats som planeras framöver!

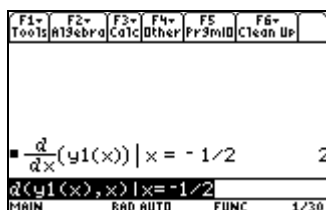
Utveckling

Användning av symbolhanterande räknare i matematikundervisningen är ett område jag och många andra har relativt lite erfarenhet av. Det har egentligen bara varit under några få lektioner inom D- och E-kurserna som jag introducerat dem för elever, då som tillfälligt lån. Men hur kan en mer genomtänkt undervisning se ut? På Lärarutbildningen har en grupp, i vilken jag ingår, i höst dragit igång ett projekt för att utveckla våra egna lärarkurser och även ta fram undervisningsmodeller för olika gymnasiekurser (inklusive matematik A!) i vilka symbolhanterande räknare ingår. Meningen är att dessa med hjälp av lärarstudenter ska provas på någon gymnasieskola i Malmö. Resultatet kommer sedan att presenteras på lämpligt sätt.

Jag skulle kunna ge ett exempel vi diskuterat i projektet på hur man skulle kunna arbeta, och som är en fortsättning på mitt första exempel. I C-kursen undersöker man olika funktioner med hjälp av derivata, och man studerar då bl.a. tangenter till kurvor, i detta fallet funktionen $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Detta görs på en symbolhanterande räknare på liknande sätt som på en grafräknare. Antag nu att vi väljer två punkter på kurvan, $(-3, -4)$ och $(2, 6)$, och beräknar riktningskoefficienten för linjen genom dessa. Den fås enkelt till $k = 2$. Sedan beräknar vi riktningskoefficienten för tangenten till kurvan i mittpunkten mellan de två x-värdena, $x = -\frac{1}{2}$. Detta kan naturligtvis göras som derivatan i punkten, alternativt genom att man använder tangentverktyget:



Tangentens ekvation har räknaren bestämt numeriskt, vilket den markerar med en decimalpunkt efter talet 2. Om man istället använder deriveringsverktyget får man ett exakt värde:

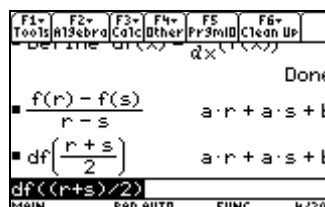
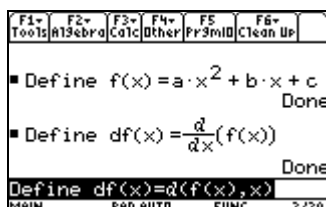


Observera att man måste använda bråkformen! Om man anger $x = -0,5$ kommer räknaren att arbeta numeriskt.

Det blev samma värde på de två lutningarna, och man kan undra om det gäller även när man väljer andra punkter på kurvan. Och gäller det även andra funktioner av andra graden? Detta får eleverna undersöka. Då man inte lyckas finna något motexempel, kan man tänka sig att gemensamt i klassen formulera ett generellt påstående:

- Om man tar två godtyckliga punkter på kurvan till en allmän andragradsfunktion, är riktningskoefficienten för linjen genom dem alltid samma som för tangenten till kurvan genom den punkt, vars x -värde är mittpunkten mellan de två punkternas x -värden.

Hur kan då räknaren användas för ett bevis för detta? Vi antar att den allmänna funktionen är $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ och de två punkterna har $x = r$ resp. $x = s$.



Som synes blir uttrycken identiska, vilket visar att påståendet är sant! Detta är t.ex. bakgrunden till att man vid numerisk derivering av andragradsfunktioner med symmetriskt intervall alltid får ett exakt värde. Men sedan kommer nästa fråga: Gäller påståendet även för tredjegradsfunktioner eller för polynomfunktioner av högre grad? Läsaren utmanas att undersöka detta!

Något man snart inser när man arbetar med en symbolhanterande räknare är man måste ha med sig grundläggande kunskaper om vad derivata innebär och dess koppling till tangenter, hur riktningskoefficienter beräknas, m.m. En annan nödvändig sak är att man noga planerar de olika stegen och skriver ner dessa. Det kommer nästan att påminna om ett flödesschema för programmering. Flera av Polyas (2004) viktiga punkter för god problemlösning, som att bygga på tidigare kunskaper och planering av tillvägagångssätt, kommer alltså att explicit tränas!

En väg att gå vidare med problemet är att från tre givna punkter i planet rekonstruera den andragradsfunktion, som exakt går genom dessa. Traditionellt görs det kanske med ett ekvationssystem med tre obekanta, men resultatet ovan visar på ett annat sätt. Om man har tre punkter $(r, f(r))$, $(s, f(s))$ samt $(t, f(t))$, kan man beräkna riktningskoefficienterna k_1 och k_2

mellan r och s resp. s och t . Parametern a fås då som $\frac{k_2 - k_1}{t - r}$, vilket enkelt kan visas med

räknaren. Därefter beräknas lätt b med hjälp av uttrycket för något av k -värdena, varefter c till sist fås med vanlig insättning.

Vi lever idag i ett samhälle där vi omges av informations- och medieteknik av alla slag. Våra elever och studenter har vuxit upp med detta, och ser det som naturligt, och även nödvändigt, att använda sig av alla tillgängliga resurser. Gränserna suddas också alltmer ut mellan olika teknikformer, exempelvis mellan räknare och datorer. Räknarna tar över det som tidigare bara fanns på datorer, som Derive och Cabri, och datorerna används för att underlätta

användningen av räknarna och undervisningen kring räknarna. Det finns nu möjlighet att utnyttja mjukvara som emulerar en räknare projicerad på ett s.k. smartboard, så att man kan ”trycka på tangenterna” direkt på tavlan. Helt nya lösningar kommer att introduceras, som t.ex. matematikprogram avsedda för mobiltelefoner. Och förmodligen kommer även helt nya typer av räknare att dyka upp ganska snart, med bättre skärmupplösning och bättre programvara. Varför ska vi försöka hejda denna utveckling?

Litteratur

- Bergqvist, T. (2002). MaBIT: Matematisk begreppsbildning och IT. Skolverket, Dnr 2000:1780: Stockholm.
- Brandell, L. (2002). *Matematikkunskaperna 2002 hos nybörjare på civilingenjörsprogrammen vid KTH – bearbetning av ett förkunskapstest*. Rapport, KTH, Stockholm.
- Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K. & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology at the secondary level: Research findings and implications for classroom practice*. Dallas, Texas: Texas Instruments.
- Drijvers, P. (2000) Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 5: 189-209.
- Drijvers, P. (2002a) Algebra on a screen, on paper and in the mind. I J. Fey m.fl., (red.) *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. Reston: NCTM.
- Drijvers, P. (2002b) Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 221-228.
- Drijvers, P. (2003) *Learning algebra in a computer algebra environment*. Doktorsavhandling. Utrecht: Freudenthalinstitutet.
- Dahland, G. & Lingefjärd, T. (1996). Graphing calculators and students' interpretations of results: A study in four upper secondary classes in Sweden. *Nordisk Matematikdidaktik* 4, nr 2/3, 31-50.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999) The complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3: 195-227.
- Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B. & Lehmann, E. (2000). I vilken utsträckning behöver elever kunna räkna för hand när det finns datoralgebra. *Elementa* 01, nr 3, 116-124.
- Kieran, C. & Drijvers, P. (2006) The Co-emergence of Machine Techniques, Paper-and-pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of CAS Use in Secondary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11: 205-263.
- Kokol-Voljc, V. (2000) *Exam Questions & Basic Skills in Technology-Supported Mathematics Teaching*. Proceedings, 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenien.
- Lagrange, J-B. (1999) Complex Calculators in the Classroom: Theoretical and Practical Reflections on Teaching Pre-Calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4: 51-81.
- Persson, P-E. (2005) *Bokstavliga svårigheter – Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande*. Licentiatuppsats. Luleå tekniska universitet.

Polya, G. (2004). Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande. Stockholm: ePan.
(ursprungligen utgiven 1957)

Ruthven, K. (2002) Instrumenting mathematical Activity: Reflections on Key Studies of the Educational Use of Computer Algebra Systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7: 275-291.