

Varför nöja sig med mindre än att förstå algoritmer?

Denna artikel syftar till att förstå principerna hos algoritmer för multiplikation, subtraktion och addition.

Mot räkning med standardalgoritmer brukar vändas att de (1) inte främjar kreativitet och att de (2) inte främjar talförståelse och huvudräkning samt (3) ”det är för många regler och undantag att hålla reda på”. Med det senare menas att man räknar från olika håll i addition och subtraktion och att uppställningen i algoritmen för multiplikation inte helt följer platsvärdesprincipen.

Den första invändningen kan bemötas med att inte allt i livet ska vara problem som kräver intellektuella ansträngningar. Den som har försökt att dra åt en insexskruv med plattång eller sax vet vad jag menar. Det främjar visserligen kreativiteten: Man kan ju försöka använda tången både som polygrip och som insexnyckel. Däremot skapar det mer frustration än arbetsglädje. Precis som en insexnyckel kan en standardalgoritm kännas lite andefattig, men dess ändamålsenlighet går inte att ta miste på. Syftet med algoritmer är att göra rutinuppgifter av problem, dvs slippa intellektuella utmaningar! Det finns ett överflöd av andra och lämpligare matematiska övningar att träna sin kreativitet på.

Hur är det då med talförståelsen och huvudräkningen? När de arabiska siffrorna infördes i Europa, använde man en geometrisk metod för att multiplicera [1]. Lite förenklat kan den framställas som en utvidgad distributiv lag.

	30	+5
8	$30 \cdot 8 = 240$	$5 \cdot 8 = 40$
+0,4	$30 \cdot 0,4 = 12$	$5 \cdot 0,4 = 2$

Multiplikerar 35 och 8,4.

Precis som med vanliga tal, kan man gruppera faktorernas tiotal, ental etc. i fallande ordning. Man kan också rita rutornas längd och bredd någorlunda i rätt proportioner så att tiotal är åtminstone tydligt större än ental. Att ställa upp på detta sätt har kanske inga fördelar i bokföringen av siffrorna. Dock ger det flera tillfällen till förståelse av matematik och algoritmen för multiplikation. Den viktigaste är kanske hur distributiva lagen fungerar och att det ger ett bildstöd för detta. Det är ju lättare att minnas en figur än en formel. Därtill tränas eleverna att geometriskt att förstå att hundratal är större än tiotal. De tränas i att multiplicera tal med olika tiopotenser, exempelvis $30 \cdot 0,4$, vilket åtminstone MaA-elever på gymnasiet ofta brister i. Metaforen stöder också hur man avrundar tal. Den största rutan i figuren blir ju lite knappt hela produkten. För gymnasiet har jag sett att elever som ställer upp multiplikation av polynom på detta sätt gör betydligt färre slarvfel än dem som ställer upp det på traditionellt sätt med ett virrvarr av pilar, där de tappar bort termer eller gör teckenfel.

Hur är det då med alla regler och undantag? Uppställningens princip är densamma som för standardalgoritmen, men principerna bakom framstår tydligare: (1) Gruppera faktorerna enligt platsvärdesprincipen. (2)

Multiplitera enligt distributiva lagen. (3) Summera. Dessa tre steg är allt.

Hur är det då med addition och subtraktion? Ett exempel från den som räknar klasskassan eller kollekten i kyrkan är lämpligt. Färgstavar är ett annat åskådningsmaterial [3]. (1) Man *grupperar* varje slag av mynt och sedlar för sig. (2) Man *summerar* antalet av varje sort. (3) Man *växlar* 10-tals enkronor mot entals tiokronor etc. Låt oss titta på Julia, 7 år, som räknar fordon:

$$\begin{array}{rcccc}
 & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{1. \text{ gruppera}} & & & \\
 & \textit{lastbil} & \textit{bil} & \textit{cykel} & \textit{mc} \\
 \textit{förmiddag} & 3 & 5 & 9 & 0 \\
 \textit{eftermiddag} + & 0 & 7 & 8 & 4 \\
 \hline
 2. \textit{summera} \{ & = & 3\textit{st} & 12\textit{st} & 17\textit{st} & 4\textit{st}
 \end{array}$$

Julia räknar fordon

Redan ganska små barn har kunskaper nog i pre-algebra att gruppera föremål efter färg, form eller andra egenskaper, [kap 1, 2]. Det är också ganska vanligt att barn i förskoleåldern kan summera ental – additionstabellen – med eller utan fingrar. Vi noterar också att samma principer används när gymnasisten Julia, 17 år, subtraherar polynom:

$$\begin{array}{rcccc}
 & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{1. \text{ gruppera}} & & & \\
 & x^3 & x^2 & x & 1 \\
 & 3 & 5 & 9 & 0 \\
 - & 0 & 7 & 8 & 4 \\
 \hline
 2. \textit{subtrahera} \{ & = & 3x^3 - 2x^2 + x - 4
 \end{array}$$

Julia subtraherar polynom

Samma princip använder civilekonomen Julia, 27 år, i bokföringens kontoplan liksom statistikern Julia, 37 år, i flerfaktorundersökningar. Att kunna gruppera och summera är alltså synnerligen vanligt, användbart och uppenbarligen begripligt.

Det tredje steget i algoritmerna för subtraktion och addition är att växla. Det ska ju stå minst 0 och högst 9 på varje plats i positionssystemet.

$$\begin{array}{rcccc}
 & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{1. \text{ gruppera}} & & & \\
 & \textit{hundra} & \textit{tiota} & \textit{ental} & \textit{tiondel} \\
 & 3 & 5 & 9 & 0 \\
 - & 0 & 7 & 8 & 4 \\
 \hline
 2. \textit{subtrahera} \{ & = & 3 & -2 & 1 & -4 \\
 3. \quad \textit{växla} \{ & = & 2 & 8 & 0 & 6
 \end{array}$$

Julia subtraherar reella tal

1. Gruppera (Förkunskap: Platsvärdesprincipen).
2. Summera (subtrahera) varje grupp för sig. (Förkunskap: additionstabell och subtraktionstabell)
3. Växla till en högre (lägre) valör om positionen är mindre än 0 eller högre än 9. (Förkunskap: Förstå positionssystemet).

För elever med koncentrationssvårigheter eller litet arbetsminne kanske det kan vara enklare att göra steg 2 klart först och sedan växla, som i figuren ovan. Även om detta avviker från den vanliga algoritmen, så är det dock ett sätt att visa att man (undantaget växlingen) faktiskt inte behöver räkna från vänster till höger i subtraktion och tvärtom i addition. Nu är jag inte kunnig i barns svårigheter med standardalgoritmer. Men jag kan tänka mig att en svårighet för barn kan vara att i standardalgoritmen gör man steg 2 och 3 parallellt för en position i taget. Man behöver ständigt byta mellan att subtrahera och växla, vilket belastar elevernas arbetsminne.

Vilken funktion har begreppet algoritmer i arbete och vardag? Att använda en algoritm motsvarar att tolka och följa en instruktion till punkt och pricka. Ett vardagligt exempel på detta är att läsa, förstå och utföra en instruktion i form av ett felsökningsschema för en teknisk apparat, att baka en sockerkaka, att följa en stickbeskrivning eller annan instruktion etc, således högst betydelsefulla aktiviteter i vardag och yrkesliv.

Litteratur

- [1] Hvenekilde, A. (red.) (1991). *Matte på ett språk vi förstår*. Skriptor förlag AB, Stockholm.
- [2] Kilborn, W. (1997). Didaktisk ämnesteorin I matematik, Del 1, grundläggande aritmetik. Liber Ekonomi.
- [3] Malmer, G., Adler, B. (1996). *Matematiksvårigheter och dyslexi*. Lund: Studentlitteratur.