

Elever har rätt att få lära sig räkna

Algoritmernas vara eller inte vara diskuteras flitigt. Behövs algoritmer nu när miniräknare kan utföra beräkningar? Här ges ytterligare perspektiv och historiska anknytningar, för att fördjupa diskussionen. Referenser, litteratur och länkar som legat till grund för denna artikel finns samlade på Nämnares webbplats.

Få frågor om innehållet i vår matematikundervisning har under åren diskuterats så mycket som de fyra räknesätten. Särskilt livlig har debatten varit kring algoritmräkningens mål, innehåll och omfattning. Vilka standardalgoritmer skall eleverna ha rätt och möjligheter att lära sig i skolan? Och vem skall bestämma det? Hur skall mål och undervisning avvägas mot huvudräkning, mot andra sätt att bokföra delberäkningar och mot omskrivningar som förenklar beräkningarna? Hur skall målen för huvudräkning, överslagsräkning och räkning med papper och penna balanseras mot beräkningar med hjälp av miniräknare? Vilka förkunskaper krävs för att eleverna skall uppnå rimlig snabbhet, säkerhet och förtrogenhet vid olika val? Och hur skall mål och undervisning i räkning och övrig aritmetik balanseras mot tillämpningar, problemlösning och andra angelägna delar i en modern kursplan i matematik?

Jag kommer inte att försöka besvara alla dessa frågor i denna artikel utan begränsar mig till frågor om elevernas rätt att få lära sig räkna. Samtidigt uppmanar jag Nämnares läsare att problematisera och bidra till diskussionen. Vidga gärna diskussionen till att beröra andra relevanta och hithörande frågor än de jag valt att lyfta fram.

Ett historisk perspektiv

Historiskt sett har diskussionen om algoritmer i vårt land dominerats av frågor kring för- och nackdelar med olika varianter av divisionsalgoritmen. Det började med sk galärddivision i våra första räkneläror på 1600-talet – en slags ”kort division”.

Bild 1. *Divisio per galea*



På 1700- och 1800-talet introducerades olika varianter med bokförda delsubtraktioner, *long division*, för att underlätta det stegvisa arbetet med att bestämma resterna. Det som skiljde varianterna åt var främst nämnarens och kvotens placering relativt täljaren. När undervisningen om tal i decimalform tog fart blev frågor om decimaltecknets placering i kvoten en allt viktigare fråga. Utvecklingen av enhetsskolan och grundskolan följdes av försöksverksamhet och utredningar som resulterade i rekommenderad gemensam standardalgoritm i hela landet. Först *Trappan* på 1960-talet och sedan *Liggande stolen* i Matematikterminologi i skolan 1979. Båda hade fördelen att decimaltecknet lättare hamnade rätt – *Liggande stolen* dessutom den fördelen att frekvensen omkastningsfel mellan täljare och nämnare minskade.

Liggande stolen lanserades som en innovation från Skolöverstyrelsen. I själva verket finns den i stort beskriven för heltal i en italiensk räknelära redan 1491. Detta är ett exempel på den historielöshet som många gånger kännetecknat förändringar i svensk matematikundervisning.

Bild 3. Calandri's long division

Uicenne

$$\begin{array}{r} 5349 \overline{) 00644} - \frac{45}{81} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 534 \overline{) 498} \quad \boxed{83} \\ \underline{369} \\ 332 \\ \underline{332} \\ 0 \end{array}$$

Bild 2. Sex olika varianter av divisionsalgoritmen, 834/6

$\begin{array}{r} 834 : 6 = 139 \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$ Celsius	$\begin{array}{r} 6 \overline{) 834} \quad (139 \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$ Celsius	$\begin{array}{r} 834 \overline{) 6} \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$ Italiensk
$\begin{array}{r} 139 \\ 834 : 6 \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$ Ehlin	$\begin{array}{r} 139 \\ 6 \overline{) 834} \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$ Trappan	$\begin{array}{r} 139 \\ 834 \overline{) 6} \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$ Liggande stolen

Fördelarna med standardalgoritmer gemensamma över hela landet var uppenbara. Man skulle slippa flera problem vid byte av lärare, lärobok, skola och skolform. Olof Magne var en av flera som efterlyste enhetlighet. En annan var C. E. Sjöstedt

När det gäller att välja metod är jag långt ifrån säker på att det är av utslagsgivande betydelse att välja den bästa metoden. Där tror jag istället att det är klokare att generellt införa en allmänt vedertagen metod, bara den inte är alldeles galen, och det kan den ju knappast vara, om den blivit allmänt vedertagen. Det kommer nämligen att erbjuda stora svårigheter att genomgående få en ändring till stånd. Enstaka lärare kan lätt åstadkomma detta, men under tiden kan det komma att bli ett förskräckligt kaos.

Den ökande invandringen i vårt land har medverkat till att vidga diskussionen ytterligare när det gäller frågor om föräldrarnas möjligheter att stödja sina barn i deras skolarbete. I rapporten *Hur räknar du, människa?* från 1985 och i en Nämnarenartikel 1986 med samma namn beskrev Kurt-Allan Paulsson standardalgoritmer i bruk runt om i världen – ett värdefullt arbete till stöd bl a för lärare som undervisar minoritets elever.

Frågor om vilken variant av standardalgoritm som är bäst och återkommande förändringar kom tyvärr att skymma sikten för algoritmer som kraftfulla matematiska idéer. Att förkunskapskraven i stort är desamma negligerades. Fokus har legat mera på hur man kan minimera feltyper med något modifierade rutiner än på förebyggande och grundläggande taluppfattning, räknelagar, laborativt arbete och räknesättens innebörd och inbördes relationer.

Debatten i Nämnaren

Algoritmräkningen har diskuterats vid ett flertal tillfällen i Nämnaren. Den mest intressanta ägde rum i nr 4, 1988 och nr 2–4 1989 där Göran Emanuelsson, Stig Mellin-Olsen och Jan Unenge diskuterade algoritmernas vara eller inte vara. Unenge betonade värdet av att eleverna får möjlighet att utveckla olika kreativa lösningar – en undervisning som vill ge eleverna talen och matematiken i stället för siffrorna, symbolerna

och reglerna. Unenge ville befria eleverna från "slavande" i algoritmer som de inte förstår och som är en trolig källa till matematikångest.

Mellin-Olsen betonade vikten av att skilja på elevernas "egna" algoritmer och standardalgoritmer. Mot bakgrund av frågan: Hvem bestämmer hvilken algoritme elevene skal bruke? menade Mellin-Olsen att man absolut inte skall hindra elever att använda en standardalgoritm som eleven gjort till sin "egen", med eller utan undervisning.

Göran Emanuelsson menade att standardalgoritmerna i högsta grad är matematik och problemet inte ligger i själva algoritmerna utan i undervisningen. Denna bild kom också fram som ett resultat av PUMP-projektets klassrumsstudier. Om läraren själv uppfattar algoritmer som ett mekaniskt och onaturligt manipulerande med siffror och regler utan annan mening än att komma fram till ett korrekt svar, utan grund i positionssystemets egenskaper och talmönster och utan att eleverna först fått möjlighet att utveckla nödvändiga förkunskaper, kommer resultatet att bli därefter.

Vad säger våra kursplaner?

Enligt Lgr 80 skulle alla elever under grundskoletiden förvärva grundliga kunskaper och färdigheter i additions- och subtraktionsalgoritmerna för tal upp till en miljon och upp till tre decimaler, i multiplikationsalgoritmen med två flersiffriga faktorer och i divisionsalgoritmen ensiffrig nämnare.

Beslutet om decentraliserad målstyrning innebar ökad tilltro till lärarprofessionen att i samverkan med elever och föräldrar ta större ansvar för undervisningens innehåll genom konkretiseringar av kursplanens mål. Stor tilltro sattes samtidigt till en fungerande lärarutbildning och kompetensutveckling. Mot denna bakgrund ansågs de nationella målen kunna reduceras i antal och få en mera övergripande karaktär. Mål och innehåll är därför inte alls lika detaljerade i Lpo 94 som tidigare i Lgr 80.

Strävan skall ... vara att eleven utvecklar sin tal- och rumsuppfattning samt sin förmåga att förstå och använda ... grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal, närmevärden, proportionalitet och procent,

Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det femte skolåret

- kunna räkna med naturliga tal – i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare,

Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret

- ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel.

Vad säger man utomlands?

Eleverna i vårt grannland Finland har som bekant lyckats mycket väl i internationellt jämförande studier i matematik som PISA. Hur ser deras kursplan i matematik på algoritmräkning i den grundläggande utbildningen? För årskurskurserna 3–5 finns som Mål att eleverna skall lära sig grundläggande räknefärdigheter. Som *Centralt innehåll* inom området Tal och operationer finns algoritmer och huvudräkning.

Nyligen kom frågan om algoritmräkning upp i ett antal möten mellan ledande matematiker och matematikdidaktiker i USA. Man enades bl a om ställningstaganden kring tabellkunskaper, miniräknare, algoritmer, bråk, tillämpad matematik, undervisningsmetoder och lärares yrkeskunskande. Mötena resulterade i ett sammanfattande dokument som utgångspunkt för fortsatta diskussioner. För algoritmer enades man om följande text:

Learning algorithms: Students should be able to use the basic algorithms of whole number arithmetic fluently, and they should understand how and why the algorithms work. Fluent use and understanding ought to be developed concurrently. These basic algorithms were a major intellectual accomplishment. Because they embody the structure of the base-ten number system, studying them can reinforce students' understanding of the place value system.

More generally, an algorithm is a systematic procedure involving mathematical

operations that uses a finite number of steps to produce a definite answer. An algorithm can be implemented in different ways; different recording methods for the same algorithm do not constitute different algorithms. The idea of an algorithm is fundamental in mathematics. Studying algorithms beyond those of whole number arithmetic provides opportunities for students to appreciate the diversity and importance of algorithms. Examples include constructing the bisector of an angle; solving two linear equations in two unknowns; calculating the square root of a number by a succession of dividing and averaging.

Att bannlysa algoritmer i skolans matematikundervisning som ibland sker i den svenska debatten har alltså inget stöd bland dessa experter, tvärtom. Det har heller inget stöd i de svenska kursplanerna.

En historia från klassrummet

Vid ett besök i en skola för ett antal år sedan träffade jag en lärare som medvetet undanhållit divisionsalgoritmen för sina elever. Istället hade han låtit dem arbeta med huvudräkning och relativt fritt med att bokföra delberäkningar som de ansåg sig behöva. Jag fick under mitt besök tillfälle att hålla en lektion på egen hand med lärarens klass i årskurs 5. Jag skrev upp 834/6 på tavlan och bad eleverna lösa uppgiften. De visade på tavlan upp ett stort antal varianter. Ingen elev använde den av Skolöverstyrelsen då rekommenderade *Liggande stolen*. På en direkt fråga från mig om det fanns något annat sätt räckte en elev upp handen, gick fram till tavlan och utförde snabbt och säkert divisionen i *Liggande stolen*. Det blev stor uppståndelse i klassen. Flera elever uttryckte spontant "va smart". På min fråga vem som lärt honom räkna på detta sätt svarade han "Pappa", matematiklärare på skolan och kollega till den lärare vars klass jag besökte. Pappan hade "i smyg" lärt sonen divisionsalgoritmen i strid mot den arbetsplan lärarna på skolan enats om och som förbjöd undervisning om standardalgoritmer.

Problemet med algoritmerna är inte matematiken utan undervisningen.