INGVAR PEHRSON

Parabelns kvadratur

Arkimedes visade för ungefär 2200 år sedan ett sätt att areabestämma en parabel. Här får vi följa med i hans tankegångar men med modern algebra till hjälp, något som Arkimedes inte hade tillgång till. Artikeln kan användas i klassrummet med elever som läser Ma D.

Antikens grekiska matematiker försökte förgäves lösa tre geometriska konstruktionsproblem med hjälp av passare och linjal:

1 Cirkelns kvadratur, vilket innebar att hitta en kvadrat med exakt samma area som en cirkel.

2 Fördubbling av kubens volym, vilket innebar att hitta en kub med exakt dubbelt så stor volym som en given kub.

3 Vinkelns tredelning, vilket innebar att dela en given vinkel i tre lika stora delar.

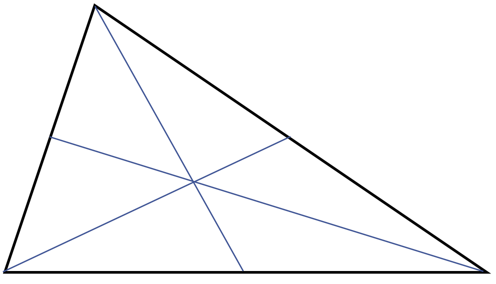
Senare har det bevisats att dessa tre konstruktionsproblem är omöjliga att utföra. Ett snarlikt problem är att bestämma parabelsegmentets kvadratur och dess exakta area.

Archimedes (287 – 212 fKr) löste detta problem i sin skrift Metoden. Denna skrift har varit känd genom att andra antika matematiker indirekt har refererat till den. År 1907 hittade dansken Ludwig Heiberg i Konstantinopel en kopia av Archimedes originaltext. Denna text var skriven cirka år 975 av en präst på grekiska ön Patmos. Archimedes text är nu översatt till engelska av filologen Reviel Netz från Cambridge.

Med hjälp av modern matematisk notation ska vi nu följa Archimedes framställning. Beviset på parabelsegmentets area kan delas upp i två steg och ett lemma; en hjälpsats.

Lemma

En triangels tyngdpunkt ligger alltid i medianernas skärningspunkt. Medianen går från ett hörn i en triangel till mittpunkten på motstående triangelsida.



Medianernas skärningspunkt finns på avståndet 2/3 av medianens längd räknad från triangelns hörn.

Denna hjälpsats kommer vi att använda längre fram i beviset.

Steg 1

Nu kommer det första, ganska lätta steget i själva beviset: I figuren nedan finns ett parabelsegment ABC. I detta segment är en triangel ABC inskriven.

Linjen BD är parabelns symmetriaxel som är förlängd till punkten E.

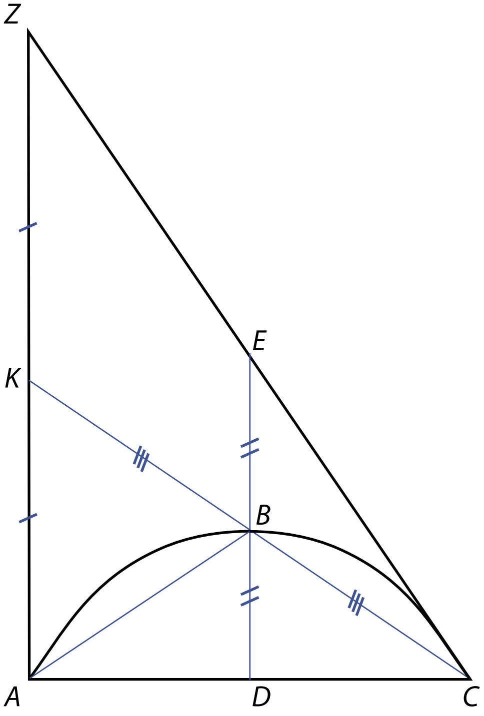
Den rätvinkliga triangeln ACZ har en median KC som delas mitt itu av parabelns vertex B.

Vidare delas DE mitt itu i punkten B.

Triangeln DCE är likformig med triangeln ACZ. Längskalan är 1/2 mellan de likformiga trianglarna. Detta medför att areaskalan är $(1/2)^2$ alltså 1/4.

Triangeln ABC har samma area som triangeln DCE. Basen är dubbelt så stor i triangeln ABC men detta kompenseras av att höjden är hälften så stor som i triangeln DCE.

Slutsatsen av bevisets första steg är att triangeln ABC har en area som är en fjärdedel av triangeln AZCs area.



Steg 2

Bevisets andra steg visar Archimedes särklass. Figuren är nu kompletterad med linjen KT som är en förlängning av KC så att längden av KT är samma som KC, se figuren på nästa sida. Linjen XM är en slumpmässigt vald linje genom parabelsegmentet. Linjen HS är lika lång som linjen XO. Dessa två linjer har samma riktning. Punkten P på medianen KC är tyngdpunkten i triangeln ACZ.

Archimedes fortsätter nu beviset med en blandning av matematik och fysik – hans egen hävstångslag. Vidare för han ett resonemang som ligger mycket nära det som i modernt språkbruk kallas gränsvärde.

Nu kommer först likformighet och därefter glider vi över i hävstångslagen. Glöm inte att njuta av den 2200-åriga framställningen. Archimedes nämner först följande faktum vad gäller parabelns egenskaper:

$$\frac{MX}{OX} = \frac{AC}{AX}$$

eftersom linjen CZ är en tangent till parabeln. Från likformighet gäller

$$\frac{AC}{AX} = \frac{KC}{KN}$$

Men KC = KT vilket medför

$$\frac{MX}{OX} = \frac{KT}{KN}$$

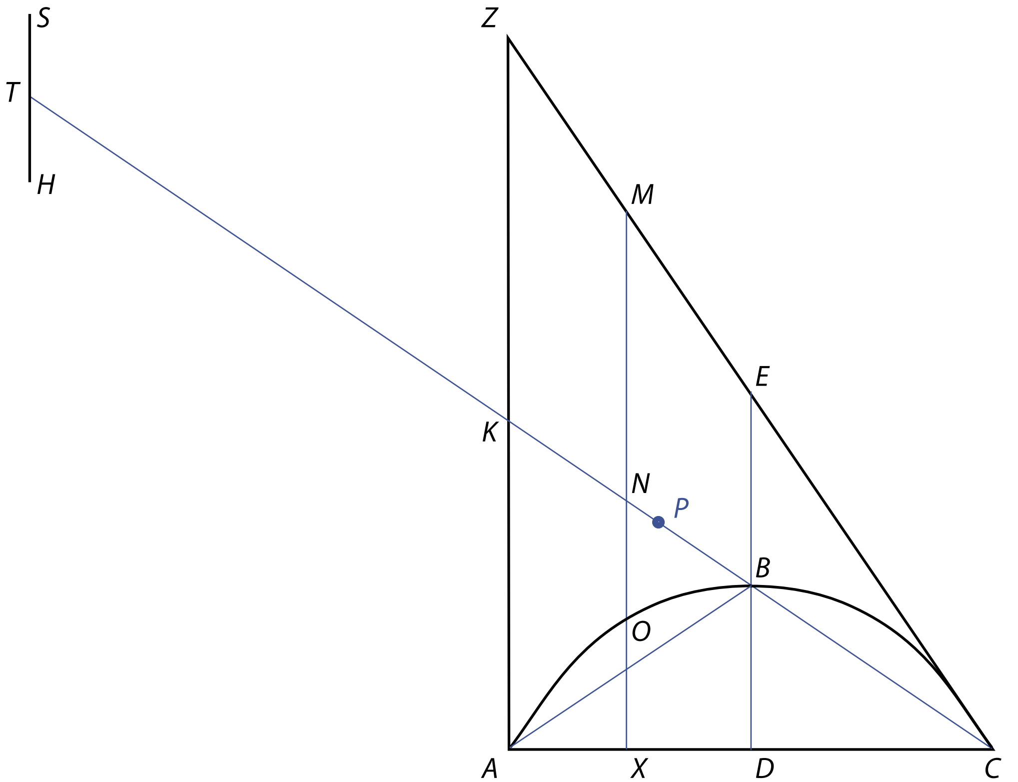
Enligt figurens konstruktion gäller att linjerna OX = SH. Då blir det senaste uttrycket

$$\frac{MX}{SH} = \frac{KT}{KN}$$

Nu kommer Archimedes att gå över till fysik och hävstångslagen. Han formar om ovanstående uttryck. Tänk på att han klarade detta helt utan att använda algebra!

$$MX \cdot KN = SH \cdot KT$$

Där KN och KT är hävarmar med vridningspunkten K. MX och SH tolkar han som krafter eller ytors storlek, vilket vi är intresserade av just nu.



Vi skrev tidigare att linjen MX var slumpmässigt vald. Om vi gör oändligt många sådana val och adderar alla dessa vikter, så bildar längderna MX och SH tillsammans ytorna för triangeln ACZ respektive parabelsegmentet ABC, eftersom SH är lika stor som OX.

Archimedes väger alltså ytorna för triangeln respektive parabelsegmentet med hjälp av hävstångslagen. Då återstår slutligen hur långa hävarmarna är för respektive yta.

Parabelsegmentet representeras hela tiden av längden KT för vänstra hävarmen. Högra hävarmen blir KP till triangelns tyngdpunkt. Men denna längd är:

$$KP = \frac{KC}{3} = \frac{KT}{3}$$

Högra hävarmen är alltså alltid 1/3 av vänstra hävarmen. Om hävstångslagen skall gälla måste alltså högra ytan ACZ vara 3 gånger så stor som vänstra ytan som var parabelsegmentet ABC, eller

$$ABC = \frac{\Delta ACZ}{3}$$

Från steg 1 i beviset har vi

$$\Delta ABC = \frac{\Delta ACZ}{4}$$

Det är nu dags att göra den slutliga sammanställningen av parabelns kvadratur:

$$\text{Parabelsegmentet } ABC = \tfrac{4}{3}\Delta ABC$$

Om parabelsegmentet omslutes av en rektangel blir slutsatsen att parabelsegmentet ABC = 2/3 rektangelarean. Trots att parabeln inte bildas av räta linjer kan ändå dess yta uttryckas med ett exakt svar vilket alla som läst integraler i Ma D vet!

LITTERATUR

Netz, Reviel. *The Archimedes Codex*
ISBN 978-0-297-64547-4.