Nämnarens adventskalender 2010, lösningar

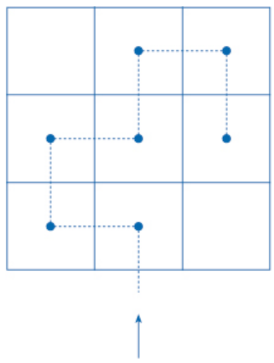
1. Svar: 60,75 cm.
   Lösning: Haralds amaryllis växer med 50% varje vecka. Man kan tänka att dess höjd multipliceras med 3/2. Efter 3 veckor är den 27cm, efter 4 veckor 40,5 cm och efter 5 veckor 60,75 (eller 60 och ¾) cm.
   Vi har fått in väldigt många svar men de flesta kom faktiskt fram till ett annat svar, 58cm. Det bygger på antagandet att tillväxtens ökningar bildar en aritmetisk följd. Ett lite klurigare resonemang (av Dagmar Louise) ledde till 64cm. Man kan inte förutse sådant med full säkerhet. Vi låter Harald fortsätta sina mätningar. Framtiden kommer att utvisa vem som hade rätt. En sak som några missade var att Harald mätte sin amaryllis första gången så snart han satte den, efter den första veckan mätte han den för andra gången och efter fem veckor blir det en sjätte mätning (inte den femte).

2. Vi fick många insända svar. Flera har testat individuellt, i en liten grupp eller med hela klassen. Andra resonerade sig till svaret. De flesta tyckte att det tar lite längre tid att räkna tiotal till 300 därför att varje räkneord tar längre tid att uttala.

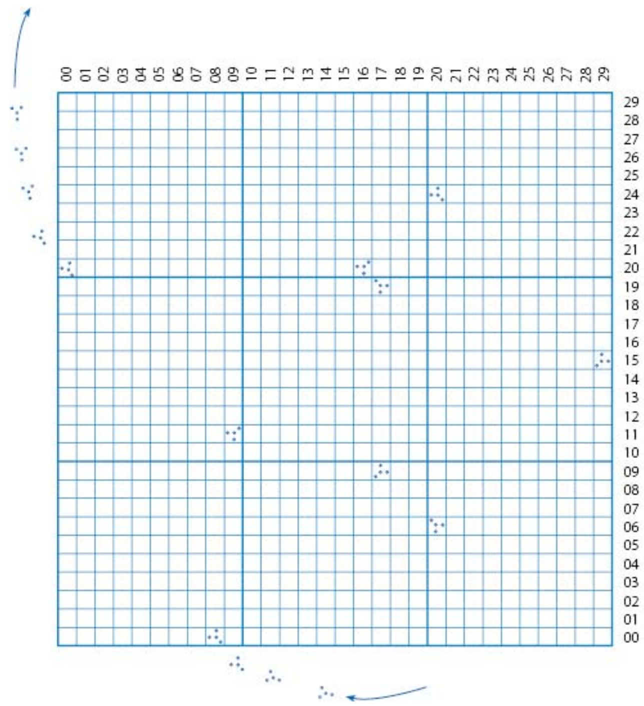
3. Svar: Det finns flera svar till uppgiften, några är
   1+5+9=2+6+7=3+4+8 eller
   1+6+8=2+4+9=3+5+7.
   Lösning: Eftersom alla bokstäver står för olika siffror från 1 till 9 gäller följande: a+b+c+d+e+f+g+h+k=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. Dvs summan av följande tre uttryck a+b+c, d+e+f och g+h+k är 45. Av ekvationen framgår också att de är lika stora. Det betyder att var och en av dem har summa 15. a+b+c=15, d+e+f=15 och g+h+k=15. Det är lätt att hitta tre olika siffror som har summan 15. Det finns åtta sådana kombinationer: 1+5+9, 1+6+8, 2+4+9, 2+5+8, 2+6+7, 3+4+8, 3+5+7 och 4+5+6. För att få tre kombinationer med alla 9 siffror, tar vi två kombinationer sådana att alla 6 siffror är olika, till exempel 1+5+9 och 3+4+8. Den tredje kombinationen behöver vi inte leta efter, vi tar de 3 tal som saknas, deras summa blir automatiskt 15 (2+6+7=15). Detta ger följande lösning till vår ekvation: 1+5+9=3+4+8=2+6+7. Den är inte identisk men liknar det första som står i svaret. Man behöver bara låta den andra och den tredje summan byta plats. Varje lösning till ekvationen liknar en av de två som står i svaret, man behöver ändra ordningen av termer inom en eller flera av summorna.

4. Svar: Minst 10 %.
   Lösning: 15 % har inget vitt öra, 20 % saknar en vit fläck på pannan, 25 % har inget framben som är vitt och hos 30 % har bakbenen annan färg än vit. Sammanlagt 15+20+25+30=90 % saknar minst ett av de vita kännetecknen. Det kan också vara färre, än 90 % om det finns renar som saknar flera av de vita kännetecknen. De återstående minst 10 % har alla dessa kännetecken

5. Svar: 7 till 9 beroende på hur man tolkar spelreglerna.
Lösning: Karin, Ulrica, Calle, Anders och jag testade spelet på skolgården. Ibland blev det 5 eller 6 rutor men snart kom vi på ett sätt att besöka 7 rutor. Sedan blev det stopp, det gick inte att besöka 8 eller 9 rutor trots att vi försökte på olika sätt. Till slut kom Susanne, som går i nian, och förklarade att det aldrig kommer att gå. Eftersom man svänger 90 grader efter varje hopp så hoppar man varannan gång vågrätt och varannan gång lodrätt. Anta att första hoppet är lodrätt. Man hoppar in i en rad, svänger och hoppar vågrätt och hamnar i en annan ruta i samma rad. Sen svänger man och hoppar ur raden. Man har alltså besökt två rutor i den första raden. Samma sak händer i den andra och i den tredje raden som man besöker, det ger 6 besökta rutor. När man hoppar lodrätt för fjärde gången så hamnar man i en rad som man redan har besökt, man hamnar kanske i den sjunde "lediga" ruta men då är de övriga 2 rutorna i raden redan besökta. Det blir aldrig fler än 7 rutor. Vi gav upp! På mattelektionen ritade vi våra rutkvadrater på papper och de vägar längs vilka vi förflyttade oss. Vi numrerade kvadratens tre kolumner med 0, 1 och 2 och kvadratens rader med 0, 1 och 2 och då kunde varje ruta få ett namn bestående av dess kolumnnummer och radnummer och vi kunde beskriva våra hoppvägar genom att skriva listor av de rutor som vi besökte. En sådan väg var tex (1,0), (0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,1).



Jag tittade ut och såg en hare skutta på skolgården. Den stannade vid en av våra kvadrater, gjorde några språng i kvadraten och skuttade vidare. På rasten gick vi ner igen för att titta på harens spår. "Den har hoppat i alla nio rutor, en gång i varje" sa Karin. "Och den gjorde en 90 graders sväng efter varje språng, men den har hoppat diagonalt hela tiden och har aldrig landat mitt i en ruta utan intill kanten varje gång" sa Ulrica. "Spelreglerna säger inte att man måste landa mitt i varje ruta eller att man måste hoppa parallellt med kvadratens sidor men det står att man ska hoppa in i den ruta som är närmast och det har den inte gjort varje gång" sa Calle. "Det hade inte vi heller gjort, reglerna menar bara att man måste hoppa i den ruta som är närmast i den riktning man har valt, alltså hoppa i en ruta bredvid och inte över den. Jag tycker att haren har vunnit spelet" sa Anders. Det tyckte vi alla. Vi tog ett kort på kvadraten med harens spår. På nästa lektion ritade vi stora kvadrater, 15cm*15cm, på rutat papper. Som tidigare delade vi dem i 3*3 rutor men nu var varje kolumn delad i 10 smala kolumner a' 5mm vardera och varje rad i 10 smala rader. Därmed var varje ruta indelad i 100 små rutor. Vi numrerade de smala kolumnerna från 00 till 29 så att första siffran i kolumnnumret visade vilken av de breda kolumnerna den tillhörde. Vi gjorde likadant med raderna och varje liten ruta fick ett namn bestående av två stycken tvåsiffriga tal. Vi ritade av harens spår från fotot på kvadraten och vi kunde då exakt beskriva harens väg genom kvadraten i snön. (08;00), (17;09), (20;06), (29;15), (20;24), (16;20), (17;19), (09;11), (00;20).

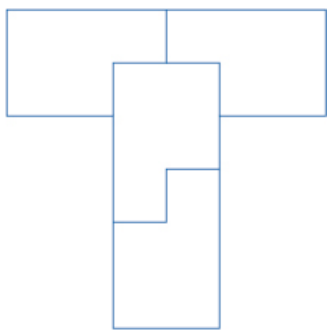


6. Svar: 7 barn, sex döttrar och en son.

7. Svar: Resultatlistan kan se ut så här:

Lopp 1	1 Castor	2 Buster	3 Astor
Lopp 2	1 Astor	2 Castor	3 Buster
Lopp 3	1 Buster	2 Astor	3 Castor
Lopp 4	1 Castor	2 Buster	3 Astor
Lopp 5	1 Astor	2 Castor	3 Buster
Lopp 6	1 Buster	2 Astor	3 Castor

8.

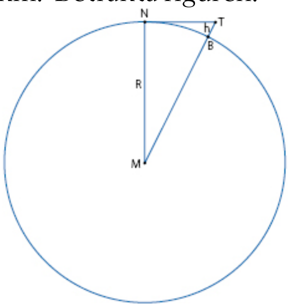


9. Svar: Detta problem har många lösningar, några av dem är:
99+99/99
9*9+9+9+9/9
99+9-9+9/9
9*99/9+9/9
Bland flera förslag från klass 9C, Eriksdalskolan, Skövde finns svaret 99.9999 ≈ 100. Man kan diskutera om det är ett rätt svar eller bara ett nästan, nästan rätt svar. Ett avrundningstecken hade varit på sin plats här. Många författare föreslår tex ”[” och ”]” och då skulle det bli [99,9999] = 100. Andra möjligheter är 99,999(9) eller 99,9999… som betyder att nian upprepas oändligt många gånger.

10. Svar: 11 gånger.
    Lösning: Timvisaren går ett varv runt, minutvisaren 12 varv och den varvar timvisaren 11 gånger.

11. Svar: 52525.
    Lösning: Ingen siffra i det sökta talet kan vara 0 för då skulle sifferprodukten vara 0 och inte börja på 5. Talet är delbart med 55, alltså även med 11 och med 5. Sista siffran är inte 0, alltså är den 5.
    Talet kan skrivas så här: 5abc5, där a, b och c är siffror 1-9. Sifferprodukten ligger mellan 5*1*1*1*5 = 25 och 5*9*9*9*5 = 18225 och börjar på 5. Alltså tillhör talet en av intervallerna 50-59, 500-599 eller 5000-5999. Alltså a*b*c (sifferprodukten/25), är lika med 2 eller tillhör en av intervallerna 20-23 eller 200-239.
    5abc5 är delbart med 11. Nu gäller det att minnas vad som gäller för delbarhet med 11. Summan av siffror i udda positioner minus summa av siffror i jämna positioner är delbar med 11. 5+b+5-a-c är delbart med 11, alltså antingen
    a+c=b-1 eller
    a+c=b+10.
    Vi gör en sammanställning av våra slutsatser om a, b och c:
    (A) a, b och c är heltal och $1 \leq a \leq 9$ och $1 \leq b \leq 9$ och $1 \leq c \leq 9$.
    (B1) a*b*c=2 eller
    (B2) 20 ≤ a*b*c ≤ 23 eller
    (B3) 200 ≤ a*b*c ≤ 239
    (C1) a+c=b-1 eller
    (C2) a+c=b+10
    För att talet 5abc5 ska uppfylla problemets premisser måste a, b och c uppfylla (A) och en av (B1), (B2) och (B3) samt antingen (C1) eller (C2).
    Vi undersöker villkoret (B1) a*b*c=2 = 1*1*2, dvs antingen gäller b=1 och a+c=3 eller b=2 och a+c=2. Inte i något av dessa fall blir (C1) eller (C2) uppfyllt.
    Nu undersöker vi (B2). 20 ≤ a*b*c ≤ 23, vilket splittras i 4 fall: Fall 1: a*b*c = 20 = 1*4*5 = 2*2*5. Här har vi en matchning! Med a=2, b=5 och c=2 blir (C1) uppfylld alltså talet 5abc5 = 52525 uppfyller problemets premisser!
    Vill vi se om det finns fler sådana tal. Vi får fortsätta undersökningen lite till.
    Fall 2: a*b*c = 21 = 1*3*7 ger varken (C1) eller (C2) oavsett vilket av de 3 tal 1,3 eller 7 väljer vi till b.
    Fall 3 och 4: Varken 22 = 2*11 eller primtalet 23 är en produkt av tre ensiffriga tal. Återstår gör nu (B3) 200 ≤ a*b*c ≤ 239. Om (C1): a+c=b-1 så kan a*b*c vara som mest 4*9*4 = 144<200, alltså är (C1) är oförenlig med (B3). Om (C2): a+c=b+10 så får vi undersöka 2 fall, b>=5 och b<=4. I första fallet är a*b*c som minst, 6*5*9=270>239. I andra fallet som mest 7*4*7=198<200. Alltså är även (C2) oförenlig med (B3).
    Det enda tal som uppfyller premisserna är alltså talet 52525.

12. Svar: 40 km.
Lösning: Avståndet till horisonten har ett samband med jordens dimensioner. Avståndet från Nordpolen till ekvatorn är 1000 svenska mil eller 10000km, ekvatorns längd är 40000km, jordens diameter är $D=40000/\pi = 12732$km, jordens radie är $R= D/2= 6366$ km. Vi antecknar också att tornets höjd är 125 m = 1/8 km. Betrakta figuren:



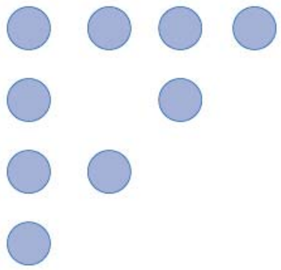
M är Jordens centrum, B - tornets bas i Tomtebo, T - tornets topp, h= BT är tornets höjd.
Att Nordpolen ligger vid horisonten betyder att den är en av de mest avlägsna punkter från Tomtebo på jordens yta som kan ses från tornets topp. Det i sin tur betyder att den räta linjen genom N och T tangerar jordens yta just i punkten N. Men i så fall måste vinkeln MNT vara en rät vinkel. Enligt Pythagoras sats är avståndet NT lika med $\sqrt{((R+h)^2-R^2)}= \sqrt{(D*h+h^2)}$.
Man kan fråga sig, vad som menas med avståndet Tomtebo-Nordpolen? Är det längden av sträckan NT eller sträckan NB eller båglängden NB? Formeln för sträckan NB är lite svårare att härleda. Sträckans längd är $NB = R*\sqrt{(2h/(R+h))}$, båglängden NB är $R*\arccos(R/(R+h))$.
När tornets höjd är 1/8 km, vilket är väldigt lite i relation till R, så är dessa tre längder nästan lika stora och det finns en fjärde formel, enkel och lätt att komma ihåg som ger ungefär samma resultat: avstånd till horisonten = $\sqrt{(D*h)}$. Varje av dessa fyra formler ger 39894 m eller 40 km eller 4 mil.
En inskickad lösning från Jakob Norstedt-Moberg är ytterligare en tumregel som man kan använda sig av: "En grov tumregel: kvadratroten ur höjden, mätt i fot, = avståndet till horisonten i distansminuter (1852m). Då blir roten ur 400 fot = 20nm dvs c:a 40km."

13. Svar: Senast om sju och en halv dag.
Lösning: Staffan har hö till sex hästar i 30 dagar, dvs 180 "dagsransoner" . De två hästar som han tänker behålla till vårbetet ska till dess äta upp 2*75=150 dagsransoner. De fyra hästar som är till salu får dela på de återstående 30 ransonerna i 30/4= 7,5 dagar. Senast den åttonde dagen måste de säljas.

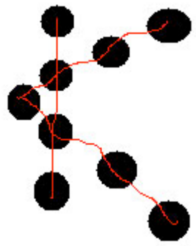
14. Svar: En av dem var både far och son. Det kunde till exempel vara en pojke, hans far och farfar.

15. Svar: 4.
Lösning: Om de skulle få två grisar till så skulle det räcka till alla om de tog två grisar var, men om de tog en var så skulle det bli 3 grisar över. Det betyder att nissarna är tre st och i så fall är grisarna fyra.

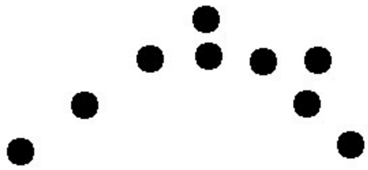
16. Lösning: Det räcker att flytta två av pepparkakorna. Man har 9 pepparkakor. Man lägger 3 pepparkakor så att de bildar en triangel. Vilken som helst triangel. Då har man 3 rader med 2 pepparkakor i varje och 6 pepparkakor kvar. Man lägger 2 pepparkakor till i varje rad. Man kan göra hur som helst med varje rad, lägga de 2 extra mellan de ursprungliga eller en mellan och en utanför eller både utanför på olika sidor eller på samma sida i jämna avstånd eller ojämna. En speciell lösning är att utgå från den givna figuren och flytta bara 2 pepparkakor. Resultatet kan se ut så här:



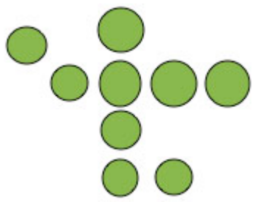
Denna typ av lösning har vi fått från Lukas Johansson, Anna Palm Cousins, Annika Lundberg, Carina Colebring och Fanny Oskarsson.
Några andra lösningar lösningar har vi också fått, den första från Robert Norrman:



... och en från Christel Bergstrand:



Och till slut en från Jonathan Carlsson:



17. Svar: 19.
Lösning: Det minsta och det enda jämna primtalet är 2. Det är inte summan av tre olika primtal, alltså måste det sökta primtalet vara udda. Ett udda tal kan vara en summa av tre udda tal eller av två jämna och en udda. Men det finns inte två olika jämna primtal utan det måste vara en summa av 3 udda primtal. De tre minsta udda primtalen är 3, 5 och 7. Deras summa är 15 vilket inte är ett primtal. Därför måste ett av de tre primtalen (termerna) vara större än 7. Det minsta bland udda primtal som är större än 7 är 11 och tillsammans med de två allra minsta udda primtalen ger 11+3+5=19. 19 är ett primtal.

18. Lösning: Först fördelar man de fulla tunnorna så rättvist som möjligt, två tomtar får två tunnor var och den tredje får tre. Nu fördelar man de halvfulla, de som bara fick två fulla får tre var och den tredje får en. Nu har alla lika mycket färg (tre och en halv tunnor) men de två första har det i fem tunnor var medan den tredje har lika mycket färg i endast fyra tunnor. Då tar han tre tomma tunnor och de första två bara två och nu är allt fördelat rättvisst.

19. Svar: 11 kr tillbaka.
Lösning: Linda fick 3 bollar för 84 kr, så en boll kostade 84/3= 28 kr. Karin spenderade 54 kr på en bil, ett pennfack och en boll, så en bil och ett pennfack kostade 54-28= 26 kronor. Jämför vi detta med Jennys nota så ser vi att dockan kostade 35 kronor. Maria spenderade 80 kr, alltså ett pennfack kostade 80-28-35= 17 kronor. En bil kostade då 26-17= 9 kronor. Nu har vi klappar för 28, 35, 17 och 9 kronor att pussla ihop så att summan blir 100. En matematiker kanske tänker så här: 100 ger resten 1 vid division med 9. För att spendera en summa som ger resten 1 vid division med 9 måste man köpa en boll mer än antalet pennfack och dockor tillsammans. Alltså, en boll eller två bollar och ett pennfack eller två bollar och en docka och sedan bilar för resten av pengarna.
I orginaltexten hade ett fel smugit sig in. Nora köpte då en bil, pennfack, boll och ett tuggummi. Då skulle man kunna resonera enligt nedan. Svar: 45 kronor.
Lösning: Karin fick 46 kr tillbaka. Nora gjorde samma inköp men det blev slut på enkronor i kassan så hon fick 45 kr och ett tuggummi istället. Att köpa tuggummi för 100 kr känns inte så spännande.

20. Svar: 22 år. Vi betecknar sonens ålder med S. Dottern är dubbelt så gammal, hennes ålder är 2*S. Jag är dubbelt så gammal som dottern, min ålder är 4*S. Om 22 år kommer min son att vara S+22 år gammal och jag 4*S+22 år gammal men samtidigt ska han vara hälften så gammal som jag. Det betyder att 4*s+22 = 2 *(S+22) vilket ger att S=11. Sonen är 11 år och dottern 22.

21. Svar: 6 eller -7.
Lösning: 21 är medelvärdet av x och x*x, alltså x + x*x = 2*21 = 42. Men x+x*x= x*(x+1), dvs x * (x+1) = 42 = 6*7. Den självklara lösningen är x=6 och x+1 = 7 men vi har även -6 * -7 = 42 och därför kan också x vara det minsta av talen -6 och -7.

22. Svar: 480.
Lösning: Eftersom två smaker som är lika har samma smak så måste vi välja två olika smaker till en tomtebägare. Dem kan vi välja på 240 sätt, den första kan vi välja på 16 sätt och den andra som måste vara olik den första på 15 sätt. Men å andra sidan har vi då räknat med att varje kombination av två olika smaker kan väljas på två sätt, först den ena och sen den andra eller tvärtom. Alltså finns det dubbelt så många sätt att välja som det finns möjliga par av två olika smaker. Det betyder att det endast finns 120 sådana par. För varje par av olika smaker väljer vi en topping på fyra olika sätt och det ger 480 möjliga tomtebägare.

23. En oktaeder består av 8 sidor som är triangelformade. Varje sida gränsar alltså till tre andra sidor. Dessa angränsande sidor ligger inte kant emot kant mot varandra, de möts endast i ett hörn. Alltså kan de angränsande sidorna ha samma färg, men det måste vara en annan än färgen på den triangel vi betraktade från början. Med två färger färglägger vi alltså fyra sidor. De återstående fyra sidorna målas på motsvarande sätt, med samma två färger.

24.