FACIT 2008 års kalender

1. 100 = 111 – 11 är den enda kända lösningen.

2. Kurt och Ola har lika många nötter och Kurt har lika många valnötter som Ola kokosnötter, så om vi tar alla valnötter från Kurt och alla kokosnötter från Ola så har de fortfarande lika många nötter kvar. Nu tar vi också Kurts alla kokosnötter och Olas alla valnötter, då har vi tagit fler nötter fån Ola än från Kurt eftersom Ola hade fler valnötter än Kurt kokosnötter. Nu har Kurt fler nötter kvar än Ola. Och de nötter som de har kvar nu när vi har tagit alla deras kokosnötter och valnötter, det är de hasselnötter som de hade från början. Alltså hade Kurt flest hasselnötter från början. (När vi har räknat färdigt lämnar vi tillbaka alla nötter som vi tog från Kurt och Ola)

3. Pappa var 40 för ett år sedan så nu är han 41, mamma är lika gammal, alltså 41 (fyra och etta). Johans bror är då 14 (etta och fyra) och Johan själv hälften så gammal, alltså 7 år.

4. Ettor är lätt att räkna när man tittar på en urtavla, de är 5 (lite svårare om man blundar och bara föreställer sig en urtavla).

Summan av alla siffror på en vanlig urtavla är 51 så det blir 17 i varje av de 3 delarna. Tänk på att linjerna inte får korsa varandra på urtavlan för då skulle de dela tavlan i 4 delar. När man söker en lösning kan man börja med siffrorna 8 och 9. Antingen hamnar de i samma del och då får inga andra siffror vara med i samma del utom möjligen en nolla eller i olika delar d.v.s. skiljs åt av en linje. I första fallet hittar man en lösning – i andra fallet ingen.

5. Bengt har förberett en fruktkorg åt sina gäster. Eftersom han har räknat med att eventuellt 6 gäster skulle komma har han lagt minst 6 frukter i korgen. Naturligtvis får varje gäst välja vilken frukt han/hon vill ta. Att gästerna måste bland 4 frukter ta två av samma sort måste bero på att det inte finns fler än 3 sorters frukter i korgen. Bland de 5 frukter som de tar ur korgen måste minst två vara av olika sorter. Det måste bero på att det inte finns fler än 4 frukter av samma sort i korgen.

I korgen ligger alltså minst 6 frukter av inte fler än 3 sorter och inte fler än 4 av någon sort. Om vi betecknar antal frukter med A av den sort som det finns flest frukter av, antal frukter av den sort som det finns minst frukter av med C och antal frukter i mellansorten med B så kan vi sammanfatta det med följande olikheter:

$4 \geq A \geq B \geq C \geq 0$ och $A + B + C \geq 6$ där A, B och C är heltal.

Vi vet inte än hur många sorters frukt det ligger i korgen men om det är färre än 3 sorter så får C (och kanske B) vara lika med noll. Om gästerna tar 6 frukter blir det olika sorters frukt kvar i korgen (alltså minst 2 olika) $A + B + C - 6 \geq 2$

Men den senaste upplysningen säger egentligen mera, för om gästerna först tar frukter av C-sorten, sen B-sorten och lämnar A-sorten sist, blir det ändå olika sorters frukt kvar och då måste alla frukter av sorten A vara bland dem: $A + B + C - 6 \geq 1 + A$ alltså $B + C \geq 7$

Detta i kombination med den allra första olikheten $4 \geq A \geq B \geq C \geq 0$ ger A = 4, B = 4 och C är antingen 3 eller 4 (kom ihåg att A, B och C är heltal). Antalet frukter i korgen A + B +C är antingen 11 eller 12.

Den sista upplysningen i texten lyder: ”det behöver inte bli så om de tar 7” dvs. gästerna kan ta 7 frukter och låta de som lämnas kvar vara alla av samma sort, alltså inte fler än 4 för det finns inte fler än 4 frukter av samma sort i korgen: A + B + C – 7≤4 och därmed A + B + C ≤ 11 Svaret är: Det ligger 11 frukter i korgen.

6. Två vägningar räcker. Om han har fyra mynt: A, B, C och D så lägger han i första vägningen A i ena skålen och B i den andra. I andra vägningen jämför han A och C. Blir det jämvikt i båda vägningarna så är D falskt. Blir det jämvikt i den första vägningen men inte i den andra så är C falskt. Visar den första vägningen ojämnt men inte den andra så är B falskt och om båda vägningar visar ojämnt så är A falskt.

7. Troligen håller han lappen upp och ner när han läser Lisas husnummer. I så fall är Lisas adress Lilla gatan 16.

8. Man kan inte dra några slutsatser om pepparkakornas form av det att Nisse kunde bilda en stortriangel av dem. Man kan faktiskt göra som Nisse gjorde med vilka triangulära pepparkakor som helst.

Gör så här: Ta 4 likadana triangulära pepparkakor. De har sidor a, b och c. Lägg dem på bordet alla vända och vridna på samma sätt. Vrid en av dem 180 grader. Flytta en annan pepparkaka till den första så att de ska ligga an mot varandra med sidorna a mot a. Flytta en tredje pepparkakan till den första så att de ska ligga an mot varandra med sidorna b mot b. Flytta den fjärde pepparkakan till den första så att de ska ligga an mot varandra med sidorna c mot c. Stortriangeln är klar.

9. En cykelbanas area A (i kvadratmeter) är lika med dess längd L (i meter) gånger dess medelbredd B (i meter).

En cykelbanas omkrets består huvudsakligen av dess högerkant och vänsterkant som har en sammanlagd längd lika med 2 * L. Att en cykelbanans omkrets är lika med dess area betyder alltså att: 2 * L = L * B, vilket ger B = 2 (det finns ju inga cykelbanor som är 0m långa). Cykelbanan är cirka 2 m bred.

10. Här gäller det att gissa och testa:

2 x 5 - 3 = 7 2 - 3 + 5 + 7 = 11
2 + 3 x 5 + 7 - 11 = 13
2 x 3 + 5 x 7 = 11 + 13 + 17
(2 x 3 x 5 + 7 - 11) / 13 + 17 = 19

11. Man kan köpa exakt K kolor i butiken om och endast om talet K kan utryckas i form K = 5 * m + 8 * n där m och n är heltal större eller lika med 0.

Varken 12 eller 14 kan uttryckas så men 26 (summan av 12 och 14) kan, 26 = 5 * 2 + 8 * 2. Så Birgit och Görel kan slå ihop sina kronor, köpa 2 paket á 5 kolor och 2 á 8 kolor och sedan dela dem rättvist mellan sig. Det finns säkert flera lösningar.

12. I böcker för civilingenjörer kan man se en formel som beskriver hur en kedja formar sig när den hängs upp på detta viset. Men just i det här fallet behöver man inga formler.

En linje som från en meters höjd går ner till golvet och sedan till en meters höjd igen är 2 m och inte längre endast om den går rakt ner till golvet och sedan rakt upp. Den börjar och slutar alltså på samma ställe. Därför ska avståndet mellan krokarna vara 0.

13. Undersök om talen 14,15,16,17 och 18 kan skrivas som summan av 2,3,4 eller 5 på varandra följande heltal.
Tabell:

	Antal på varandra följande heltal			
	2	3	4	5
14	-	-	2+3+4+5	-
15	7+8	4+5+6	-	1+2+3+4+5
16	-	-	-	-
17	8+9	-	-	-
18	-	5+6+7	3+4+5+6	-

Talet 16 kan inte skrivas som en sådan summa, så det måste vara det första talet som Gunther skrev. Talet 17 är en summa av 2 på varandra följande heltal men inte av 3, 4 eller 5, så det måste vara det andra talet som Gunther skrev. Talet 14 är en summa av 4 på varandra följande heltal men inte av 3 eller 5, så det måste vara det fjärde talet som Gunther skrev. Talet 18 är en summa av 3 på varandra följande heltal men inte av 5, så det måste vara det tredje talet som Gunther skrev. Återstår gör talet 15 som faktiskt är en summa av 5 på varandra följande heltal och det måste vara det femte talet som Gunther skrev. Gunther skrev alltså sina tal i följande ordning: 16, 17, 18, 14 och 15.

14. Jag är en bagare. Jag har två systrar, en är lärare och en är frisör.

15. Det finns fler exempel på lösningar, här visar vi ett exempel.
1 2 3
4 5 6
7 8 9
Åk från hus 2 till hus 3 och fortsätt en bit ut. Sväng sedan snett neråt över hus 6 och 8, fortsätt en bit ut. Sväng lodrät uppåt över hus 7, 4 och 1. Sväng diagonalt ner över hus 5 och 9.

16. Hunden sprang lika länge som Jesper men dubbelt så fort. Alltså sprang hunden dubbelt så lång sträcka: 2 * 3 km = 6 km.

17. Vi tänker oss händelsen baklänges. Då ligger det inga kex i skålen. Det sista som den lilla hunden gör är att äta ett kex. Innan dess så äter han upp ett kex till. Då låg det alltså 2 kex i skålen, dubbelt så många som innan det näst sista kexet ätits upp.
Sen är det den näst minsta hundens tur. Han äter upp ett kex, dvs det ligger innan dess 3 kex i skålen. Dessförinnan åt han upp hälften av kexen. Då var det alltså 2*3= 6 kex i skålen.
Näst största hunden har tagit ett kex, innan låg det alltså 7 kex. Dessförinnan åt han upp hälften, dvs det låg 2*7=14 kex i burken.
Den största hunden åt till sist ett kex, dvs det låg 15 kex i skålen. Det första den största hunden gör är att äta upp hälften av kexen, det låg alltså 15*2 = 30 kex i burken.

18. Det brukar gå snabbt att räkna till 20 och lite långsammare därefter.

19. Vi tar slumpmässigt fram två tal som inte är större än två miljoner: 1655315 och 794806, "en miljon sex hundra femtiofem tusen tre hundra femton" och "sju hundra nittiofyra tusen åtta hundra sex".

De innehåller 10 respektive 8 ord (Quickspeak säger 2 ord ur sitt vokabulär när den säger "femtiofem" eller "nittiofyra"). Det blir 9 ord i snitt per tal.

När den räknar till två miljoner uttalar den ungefär 2 mijoner x 9 = 18miljoner ord, och det tar cirka 18000000/5=3600000 sekunder eller 1000 timmar eller nästan sex veckor. Man bör lotta fram och undersöka flera tal om man vill ha en pålitlig uppskattning.
Nu beräknar vi tiden med en tiondels sekunds noggrannhet. Låt a(m,n) = n – m + 1 betyda antalet heltal mellan m och n inklusive m och n. Låt r(n) betyda antal ord som man uttalar när man räknar till n. r(20) = a(1,20) = 20 r(99) = r(20) + a(21,99) x 2 – a(3,9) = 20 + 79 x 2 – 7 = 171 r(999) = 100 x r(9) + 900 + 10 x r(99) = 100 x 9 + 900 + 10 x 171 = 3510 r(999999) = 1000 x r(999) + 999000 + 1000 x r(999) = 1000 x 3510 + 999000 + 1000 x 3510 = 8019000 r(1999999) = 1000000 x 2 + 2 x r(999999) = 2000000 + 2 x 8019000 = 18038000 r(2000000) = r(1999999) + 2 = 18038002 Det blev alltså 18038002 ord och Quickspeak behöver 18038002 / 5 = 3607600,4 sekunder för att räkna till två miljoner, eller 1002 timmar 6 minuter och 40,4 sekunder.

20. Jag har 5 fler än du från början. Om jag ger dig tre så har jag kvar två fler än vad du hade från början. Du däremot, har numera tre mer än vad du hade från början. Alltså har du ett klistermärke mer än mig.

21. För den som kan regler för delbarhet med 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, och 10 blir uppgiften ungefär som att lösa en sudoku.

∠ Tionde siffran måste vara 0 eftersom hela talet är delbart med 10.

∠ Siffran i position 5 måste vara 5 (inte 0 därför att en nolla finns redan i position 10)
Talet bildat av de första 9 siffrorna (som är siffrorna 1 till 9) blir delbart med 9 oavsett i vilken ordning dessa siffror kommer (ty siffersumman är 45).
Vi delar sifferraden i fyra intervall: 1 till 3, 4 till 6, 7 till 9 och en ensam nolla i position 10. Siffersumman i varje intervall måste vara delbar med 3. (Kom ihåg att differensen av två tal delbara med 3 är också delbar med 3.)

Siffrorna i positioner med jämna nummer: 2,4,6 och 8 måste vara jämna, alltså 2, 4, 6 eller 8. I udda positioner: 1, 3. 7 och 9 får de siffror som blev över stå, alltså just 1, 3, 7 och 9. Men nu när det ska stå udda siffror i positionerna 3 och 7, så måste siffrorna i positionerna 4 och 8 vara 2 eller 6 (p.g.a. delbarhet med 4) och därför får siffrorna 4 och 8 stå i positionerna 2 och 6 (ännu i okänd ordning).

Följande rad sammanfattar vad vi nu vet om det sökta talet:
:(1379)(48)(1379):(26)5(48):(1379)(26)(1379):0
Så ser det sökta talet ut. Flera siffror inom parantes betecknar flera möjliga siffror i en position och kolon skiljer åt intervall där siffersumman ska vara delbar med 3.
Andra intervallet (positionerna 4 till 6) :(26)5(48): är nästan klar. Det kan bara vara 258 eller 654 om siffersumman ska vara delbar med 3.

Talet bildat av de 8 första siffrorna är delbart med 8. Alltså är talet bildat av siffrorna i positionerna 6 till 8 delbart med 8 och nu när siffran i position 6 är jämn måste siffrorna i positionerna 7 och 8 bilda ett tal delbart med 8.

Låt oss titta närmare på det tredje intervallet (positionerna 7 till 9) :(1379)(26)(1379): De första två siffrorna i intervallet ska bilda ett tal delbart med 8. Bara följande tvåsiffriga tal är möjliga 16,32,72 och 96 och när alla 3 ska bilda ett tal delbart med 3 så bara följande är möjliga: 321, 327, 723, 729 eller 963.

Matchar vi andra och tredje intervallet så att siffrorna 2 och 6 förekommer bara en gång så blir det följande möjliga 6-sifferskombinationer i positioner 4 till 9: 654321, 654327, 654723, 654729 eller 258963.

Det hela sökta tiosiffriga talet måste passa in i ett av de 5 följande mönster: (79)8(79)6543:210 (19)8(19)6543:270 (19)8(19)6547:230 (13)8(13)6547:290 (17)4(17) 2589:630 där siffror inom parenteser står för flera möjliga siffror i en position medan kolon skiljer åt de första 7 siffror från de sista 3, eftersom det är delbarhet med 7 som ska ge utslag i det sista testet.

För varje av de 5 mönster finns 2 tiosiffriga tal som passar in, tio sammanlagt. Ett av de tio uppfyller också villkoret att talet bildat av dem 7 första siffrorna är delbart med 7, Det är 3816547290.

22. Låt S vara summan av siffrorna i tomtens ålder. Multiplicerar man den med sig själv så får man tomtens ålder.

Vi undersöker för vilka S det är möjligt:
S = 0 0*0=0 siffersumman av 0 är 0, stämmer!
S = 1 1*1=1 siffersumman av talet1 är 1, stämmer!
S = 2 2*2=4 siffersumman av talet 4 är 4, ej 2!
S = 3 3*3=9 siffersumman av talet 9 är 9, ej 3!
S = 4 4*4=16 siffersumman av talet 16 är 7, ej 4!
S = 5 5*5=25 siffersumman av talet 25 är 7, ej 5!
S = 6 6*6=36 siffersumman av talet 36 är 9, ej 6!
S = 7 7*7=49 siffersumman av talet 49 är 13, ej 7!
S = 8 8*8= 64 siffersumman av talet 64 är 10, ej 8!
S = 9 9*9=81 siffersumman av talet 81 är 9, stämmer!
S = 10 10*10=100, siffersumman av talet 100 är 1, ej 10!

Bland talen 0 till 10 har vi hittat tre som har en egenskap som krävs för att kunna vara siffersumman i tomtens ålder: 0,1 och 9. Tomten är nog 81 år - en mycket lämplig ålder för en jultomte. Tomtenissarna däremot kanske är 0 resp 1 år. Fortsätter man testa på samma sätt för S=11, 12 osv. så hittar man inte fler S som passar. Jultomten är alltså 81 år gammal.

23. 7 små cirklar får plats i den stora.

En liten cirkel med centrum som sammanfaller med den stora cirkelns centrum samt 6 cirklar med centra på 5 centimeters avstånd från den stora cirkeln centrum. Då tangerar var och en av dem två andra samt cirkeln i mitten och den stora cirkeln. Om man sammanbinder de 6 cirklarnas centra med linjer bildar de en regelbunden sexhörning med sidolängden 5 cm.

Intressant är att även om man ritar endast 6 cirklar med diameter 5 cm så måste var och en av dem antingen tangera den stora cirkeln eller ha centrum som sammanfaller med den stora cirkelns centrum.

24. Bryter man chokladkakan en gång så får man 2 delar. Bryter man en av delarna, blir det tre delar. Då har man gjort två brytningar. Bryter man en del till så har man 4 delar med tre brytningar.

Då man bryter en del får man en del mer än vad antalet brytningar är. För att skilja samtliga rutor åt, dvs. dela chokladkakan, i 36 delar behöver man göra 35 brytningar, varken fler eller färre.