

Om tekniska hjälpmedel i matematikundervisningen
- några vanliga argument och frågeställningar att problematisera
av Hans Thunberg
med spontana kommentarer av Anette Jahnke och Peter Nyström

Här nedan vill jag lyfta fram ett antal frågeställningar kring bruket av tekniska hjälpmedel som räknare av olika slag (aritmetiska, tekniska, grafritande och symbolhanterande) och matematisk programvara (kalkylprogram, CAS, etc).

Frågorna har olika grad av relevans, beroende på vilket hjälpmedel man har i tankarna, och man kan naturligtvis kom fram till olika svar på en viss fråga beroende på vilket hjälpmedel man har i tankarna

Varför tekniska hjälpmedel?

- I en given pedagogisk situation kan man tänka sig flera olika skäl att vilja använda sig av tekniska hjälpmedel:
 - Hjälpmedlet ifråga kan vara ett effektivt verktyg som man bör kunna hantera (ungefär som räknestickan på sin tid)
 - Hjälpmedlet är främst ett pedagogiskt verktyg för att underlätta inläring eller förståelse av viss matematik, t ex genom laborativ/undersökande verksamhet.
 - Ytterligare skäl?

Peter: Ytterligare skäl kan vara att det ger möjlighet till större variation i undervisningen och att eleverna tycker att det är roligt att arbeta med räknarna. Ett annat skäl som ibland anförs är att det faktum att räknarna finns gör att vi måste använda dem. Är detta ett relevant argument?

- Vilken av dessa aspekter betonas i våra läroplaner?

Frågeställningar utgående från olika syften

Tekniska hjälpmedel som räkneverktyg

- Är förmåga att hantera och använda tekniska hjälpmedel i sig en nyttig och viktig del av den s k medborgar-kompetensen i matematik?
 - Vad utgör i sådana fall en sådan ”räknar”-medborgarkompetens?
 - Vilka implikationer har det för matematikundervisningen?

Anette: I kursplanen för Kurs A står det att ”eleven skall ha vana att vid problemlösning använda dator och grafritande räknare för att utföra beräkningar och åskådliggöra grafer och diagram”. (Däremot står det inte i högre kurser att de ska ha ”vana”...en av de saker vi försökte styra upp i GY2007). I en samhällsklass där teknikintresset inte är så högt är det stora steg att ta för en del 16-åringar att närma sig en ”apparat”. Man skulle kunna tro att bara för att ungdomarna är vana vid datorer att de automatiskt

lätt anammar en grafräknare men så är inte alltid fallet. Att dämpa ”teknikrädslan” blir helt plötsligt min uppgift som lärare.

Man säger ibland att bruket av tekniska hjälpmedel ger möjlighet till att behandla svårare problem än vad som annars vore fallet. _Med en grafritande räknare med rutiner för numerisk ekvationslösning kan man t ex enkelt numeriskt lösa en godtycklig tredjegrads ekvationen.

- Är detta ett värdefullt tillskott till gymnasiekompetensen i matematik? För vem? Eller är det som att ta bilen ut i motionsspåret för att därmed orka med en längre runda?

Peter: Här finns en uppenbar risk med hjälpmedlen. Men vi ser samma fenomen i att matematiklärare tenderar att fokusera algoritmiska resonemang för att därmed kunna behandla ”svårare” matematik (jfr Bergqvist, 2006).

Anette: Men ibland kan man ha ett annat syfte än att ”träna” – man kanske vill ta bilen för att få se på den vackra utsikten? Se att det finns en värld utanför motionsspåret? Problemet som lett till en tredjegrads ekvation skulle kunna ha en koppling till någon sorts tillämpning (men jag vet att en del av dessa ”problem” är mer eller mindre krystade) - och i ett sammanhang som har med kg, m, sek, N eller vad som helst är ju ”exakta” lösningar mindre intressanta.

- Vilka verktyg används i arbetslivet?
 - Om vi begränsar oss till gymnasiets matematikundervisning, vilka elevgrupper som går från gymnasiet ut i arbetslivet har nytta av (den förmodade) förstärkta beräkningsförmågan? Vilken yrken berörs?
 - Hur är det med högskoleutbildningars yrkesförberedande undervisning om tekniska hjälpmedel i matematik?

Anette: Här tycker jag att grafräknaren har en nackdel – används den någon annans stans än i skolan? Är det någon i arbetslivet som använder den?

- Är förmågan att hantera och använda tekniska hjälpmedel en viktig del i förberedelserna för fortsatta studier?
 - På vilka eftergymnasiala utbildningar behöver man handhavande kunskap om tekniska hjälpmedel? Vilka hjälpmedel och vilka metoder är i sådana fall aktuella?
 - Hur ser det ut inom högskolan? Förbereder matematikkurserna på ett lämpligt sätt för användning av tekniska hjälpmedel i senare kurser (i matematik eller andra ämnen) ?
- ”Räknefärdighet behövs inte längre – det finns ju räknare. Man kan koncentrera sig på förståelse.” Är detta en fungerande pedagogisk doktrin?

”Med tanke på detta du skrev kan jag inte låta bli att citera några rader från ett svar jag fick, när jag tog upp ämnet med en läroboksförfattare:

¹ Användningen av miniräknare och grafitrare har gjort att färdigheter av typ algoritmer för de fyra räknesätten och färdigheter i numerisk bråkräkning har minskat. Det finns idag få som t.ex. behärskar division med algoritm. Detsamma gäller bråkräkning. Grafitrande räknare och även vissa funktionsräknare klarar bråkräkning och kan ge svaren i bråkform. ... Snart blir det tillåtet att även använda symbolhanterande räknare på nationella prov! Utvecklingen går således mot mer användning av tekniska hjälpmedel; mer av förståelse och problemlösning och mindre av automatiserade färdighetsmoment. ¹ ¹

Peter: Detta är naturligtvis en tankekurva. Det är fortsatt viktigt att kunna matematik och man måste hålla på med något när man lär sig. Förståelse uppstår inte i något vakuum. Ett exempel är den lista på vad som är viktigt att lära sig som utarbetades för ca. 10 år sedan av Lars-Eric Björk och Hans Brolin, i samverkan med gymnasielärare och lärare från högskolan. En av slutsatserna var bland annat att det räckte med de allra enklaste integralberäkningarna algebraiskt. Samtidigt betonades vikten av en god algebraisk färdighet. Men vad ska då studenterna hålla på med för att lära sig algebran? Kan inte integralberäkningar, t.o.m. med partialbråksuppdelningar vara ett bra sammanhang att lära sig algebra? Eller ska eleverna lära sig algebran genom att hålla på med grundläggande algebra (t.ex. kvadreringsregler) om och om igen. Nej, jag tror att eleverna måste få gå vidare och i nya sammanhang träna sin algebra. Syftet med att arbeta med en viss matematik kanske inte så mycket är att kunna komma ihåg hur man gör just den eller den metoden, utan syftet är kanske snarare att eleverna ska nå en högre mognad i matematik, dvs. bli tryggare i hanteringen av matematiska objekt i allmänhet.

- *Cyborg-visionen* - det mänskliga tänkandet förstärkt med maskinell kraft?

”Look around you in the tree of Mathematics today, and you will see some new kids playing around in the branches. They’re exploring parts of the tree that have not seen this kind of action in centuries, and they didn’t even climb the trunk to get there. (...) They climbed directly into the branches using a prosthetic extension of their brains known in the Ed Biz as technology. They got up there with graphing calculators. ...²

- Kan man delegera allt räkande, från den trivialaste aritmetik till lösning av differentialekvationer, till en extern kraftfull processor, och på så sätt stärka sin matematiska kreativitet?
- Eller är det egna tänkandet och förståelsen intimt förknippad med ett visst kalkylerande i den egna interna hjärnan?
- Finns det några dokumenterade erfarenheter?
 - Kognitionsforskning – vad har den att säga?
 - Finns det exempel på individer eller (sub)kulturer som har utvecklat matematisk begreppsbyggnad grundad på räkneförmåga huvudsakligen

¹ (ur e-brev från en svensk gymnasielärare som i sin tur alltså citerar brev ifrån en läroboksförfattare)

² Kennedy, D. (1995) Climbing around the tree of mathematics. *Mathematics Teacher*, September. 460-465. Citerad i *Handheld Graphing Technology in Secondary Mathematics. Research Findings and Implications for the Classroom Practice*. sid 1 Gail Burril et al. Michigan State University, Texas Instrument.

med hjälpmedel?

Tekniska hjälpmedel som pedagogiska verktyg

- Ett laborativt arbetssätt som stärker begreppsförståelse och stimulera nyfikenhet och kreativitet – är det en del de tekniska hjälpmedel potential?
 - En katalog med exempel vore av mycket stort värde.
 - För att konkretisera diskussionen och för att kunna jämföra våra mål och ambitioner på en konkret nivå.

Peter: Utan tvekan bidrar tekniska hjälpmedel till arsenalen av alternativa metoder att närma sig matematiken. Om de används på ett klokt sätt så kan de vara ett pedagogiskt verktyg.

- Ställer bruket av tekniska hjälpmedel nya frågor till matematiken som är av pedagogiskt värde? (Räknestickan, som huvudsakligen var ett hjälpmedel, hade den positiva bieffekten att den illustrerade och motiverade en diskussion om logaritmlagarna. Om räknaren säger man ibland att den stimulerar dialogen mellan lärare och elev helt enkelt därför att man har något nytt att tala om. T o m räknarnas tekniska-matematiska brister framhålls här ibland som en tillgång som en samtalskatalysator) .

Anette: Här finns ett klassiskt exempel som jag tror många gymnasielärare använder sig av. Minustecknets två olika betydelser. På räknaren finns två olika tangenter – en för operationen och en för att beteckna ett negativt tal. Detta är mycket tacksam ingång för att med eleverna ta en diskussion kring symboler, språk och konventioner inom matematiken. Prioriteringsregler och användning av paranteser är ett annat område som är tacksamt.

Att använda räknaren tekniska-matematiska brister har jag också använt mig av och en del läroboksförfattare gör det också. Några listiga funktioner som har skumma nollställen som man inte kan så lätt hitta med räknaren (tex nära noll) eller så ritar grafräknaren ut av misstag ut asymptoterna (vilket gör att eleverna tror att de tillhör funktionens graf.). Det känns alltid som lärare lite lätt absurt att tala om detta – först ska ni lära er grafräknaren – sen ska ni lära er att ibland funkade det inte. Men det är viktigt att eleverna inser att alla tekniska verktyg är helt beroende av oss. Detta blir också en motivation för eleverna att man även måste kunna räkna/manipulera för hand.

Jag uppfattar det så här att grafräknare/andra tekniska hjälpmedel i gymnasiematematiken inte ersätter någon annan förmåga/kompetens utan gör bara att vi har adderat ytterligare förmågor som eleverna måste utveckla. Dessa förmågor kan då även utvecklas på i viss mån nytt stoff också. Så med denna syn så är ordet ”hjälpmedel” inte så bra egentligen. Tekniska verktyg? Det här synsättet medför också att dessa ”nya” förmågor tar tid och ska få ta tid i undervisningen.

Peter: Jag tror att det är viktigt att se de möjligheter och begränsningar som tekniska hjälpmedel erbjuder. Tekniska hjälpmedel gör i sig själva knappast

någonting, eller vi kan i alla fall inte veta vad de kommer att göra av sig själva. Frågan är vad vi använder dem till, vilka möjligheter vi utnyttjar och vilka begränsningar som vi medvetet kommer runt genom en sund användning.

Vilken syn på matematiska objekts existens och kunskapsmässiga status ligger bakom tanken att man experimentellt på räknaren/datorn kan undersöka och få förståelse för t ex parametrarnas betydelse i räta linjens ekvation?

- Uppmuntrar inte det till en syn på matematiken som en "black box" vars inre mekanismer inte är begripliga, vi kan bara se effekterna? Hur jämför sig detta med att experimentera "för hand"?

Anette: Här känner jag mig träffad – detta brukar jag som gymnasielärare säga...”men det går ju så fort att titta på riktningskoefficienten”. Men jag har alltmer börjat bli tveksam till vad de lär sig.... Just kopplingen mellan det algebraiska (funktioner, olikheter mm) och deras grafiska representationer – hur lära man sig detta? måste man för hand rita hundra olika grafer?

Peter: Jag håller med om detta. Lärande uppstår inte bara för att man gör en sak många gånger, vi måste skilja på erfarenhet och kunskap. Många gånger sker lärande i det motsträviga och arbetssamma, och värdet av att kämpa får vi inte förringa. Jag tror också att det är viktigt att matematiken inte bara blir en vetenskap för ögat och tanken utan också något som sitter i kroppen. Träning i att t.ex. rita en parabel för hand ger en känsla för formen hos denna graf som går längre än det kognitiva och sitter djupare.

Anette: Ibland blir grafräknaren mer som ett hjälpmedel för mig som lärare att använda för att smidigt demonstrera olika samband – ”grafräknaren kopplad till OH-apparaten” blir som de gamla OH-bilderna. På senare tid har jag även använt mig av internet och små java-program för att i genomgångar förklara tex derivata.

- Å andra sidan börjar mycket matematiskt kunskapskapande just med experimenterande i någon form. Men det viktiga är kanske att det inte stannar vid experiment och empirisk kunskap?
 - Å tredje sidan – hur mycket av experimenterandets värde går förlorat om det hela inte drivs av elevens utan är ”riggade” försök där syftet och resultatet är klart för läraren i förhand?

Peter: Detta är ett problem inom alla skolämnen där experimentet eller laborationen anses central. Det är mer regel än undantag att laborationen blir en övning i att läsa instruktioner och i bästa fall konstatera något som man redan visste, eller som läraren redan gått igenom. Vi behöver goda exempel och en väl utvecklad pedagogik för att göra detta på ett bra sätt.

- Kan man säga något generellt om vid vilket stadium i begreppsutvecklingen det är lämpligt med laborativ verksamhet?
 - Låt säga att man vill simulera ett stort antal slantsinglingar. Är det meningsfullt att göra detta utan hands-on experiment med riktiga mynt först?
 - Är kanske experiment bäst lämpade/mest givande med väl internaliserade begrepp som man vill generalisera eller undersöka vidare?

Ytterligare frågor

- OM man tror att arbete med huvudräkning och papper-och-penna beräkningar i relativt stor omfattning är en nödvändig förutsättning för ett gott matematiklärande – hur motivera vi då våra elever och hur strukturerar vi då undervisningen så att detta verkligen inträffar? Med ett avancerat tekniskt hjälpmedel till hands är det i varje enskilt läge enklare och rationellare att använda detta.

Peter: Det helt avgörande är HUR hjälpmedlet används i klassrummet och vilken inställning som läraren förmedlar.

- Det finns undersökningar som pekar på att de tekniska hjälpmedlen lätt blir en auktoritet – man litar okritiskt på resultat, och ger upp ambitionen att själv kritiskt kunna undersöka frågeställningar och resultat.
 - Kan man undvika denna effekt? Hur?

Peter: Detta gäller i lika hög grad t.ex. facit i läroböcker, vilket kanske är ett ännu större problem. Vi har inte i tillräckligt hög grad erbjudit elever möjligheter att träna sin självvärdering och sin förmåga att värdera och reflektera över sina svar. Här finns mycket att göra. Möjligen gör de tekniska hjälpmedlen denna auktoritetstro ännu tydligare, vilket kan vara bra för att det gör oss medvetna om ett problem som vi har även utan tekniska hjälpmedel, ett problem som vi faktiskt kan göra något åt.

- Kan det vara så att diskussionen om tekniska hjälpmedel blir så het eftersom den i själva verket handlar om något annat – vår syn på vad matematik är och vad som är viktigt att prioritera i matematikundervisningen?

Anette: Kanske är det så att vi vill så gärna att matematik ska vara intressant och kännas meningsfull att vi vill gärna underlätta/minska/hoppa över de där områdena inom matematiken som är tråkiga. (I kursplanen står det *Utbildningen syftar även till att eleverna skall uppleva glädjen i att utveckla sin matematiska kreativitet ...*). Kanske har det ”praktiska manipulerandet” dvs ”hantverket” fått stämpeln tråkigt. Måste det vara tråkigt? Får matematik vara tråkigt? Går det att göra intressantare? Kanske lider även vi? av att ha genomlidigt sida upp och sida ner med snarlika uppgifter.....

- Diskussionen om räknare tangerar också diskussionen om förståelse. Alla är överens om att en *ökad* eller *fördjupad förståelse* är eftersträvansvärd; vissa hävdar att tekniska hjälpmedel kan vara ett utmärkt hjälpmedel på den vägen, medan andra lika bestämt hävdar att räknaren är ett av de allvarligaste hindren.
 - Vad menar vi med förståelse? Är det så att olika syn på vad förståelse *är* ligger bakom dessa skilda uppfattningar av räknarens potential?
 - Finns det olika typer av förståelse (operativ förståelse av hur en sats kan *tillämpas*, förståelse för *vad* en sats säger, förståelse av *hur* en sats bevisas ...)?

Peter: Jag vill hävda att allt är olika typer av förståelse, och att verkligen förstå något innebär att ha tillgång till många sådana förståelser om ett fenomen eller matematiskt objekt. För att en sådan allsidig förståelse ska komma till stånd måste de olika förståelserna tränas, och tekniska hjälpmedel kan definitivt vara användbara för att skapa förutsättningar för vissa av dessa förståelser.

Anette: Finns det olika typer av förståelse? Ja, de exempel du gav är som jag ser det olika typer av förståelse. Detta brukar jag uppmärksamma mina elever om i Kurs B – det är en sak att kunna använda ett geometriskt sats en helt annan ska att kunna förstå vad en sats är, vad det innebär att följa ett bevis, att göra ett eget bevis..osv.

Eleven måste få möjlighet i undervisningen utveckla olika typer av förmågor /kompetenser. Detta tror jag är oerhört viktigt för matematikens del att detta uppmärksammas – det handlar inte bara om att ha rätt eller fel i matematik. (Kring matematikkunnande / förståelse finns det en del rapporter *Kompetencer och Matematikläring*, Mogen Niss mfl *Adding it up: Helping Children learn Mathematics*, Jeremy Kilpatrick mfl *En tolkning av målen med den svenska gymnasimatematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, Torulf Palm mlf)

- Är förståelse till viss del synonymt med *förtrogenhet*?

Hans Thunberg, mars 2007.