



En inblick i svensk forskning kring elever med särskilda förmågor och fallenhet i matematik

Eva Pettersson

2008

Projektets mål

- *Vårt mål med projektet är att studera hur matematisk förmåga hos skolelever manifesteras, kommuniceras och värderas i skolans praktik under olika stadier inom utbildningssystemet, men också, och kanske främst, att undersöka hur den pedagogiska praktiken kan utvecklas för att passa elever med särskild förmåga i ämnet.*

Ur ansökan till Vetenskapsrådet

Hur matematiska förmågor uttrycks och tas om hand i en pedagogisk praktik

- Licentiatavhandling 2005-2008
- Fallstudie med två elever i grundskolans senare år
- Enkätundersökning med 180 lärare i södra Sverige
- Ministudie med sexårig pojke, kommer att följas upp under 2008-2010

Varför undervisningsfokus på elever med särskilda förmågor och fallenhet?

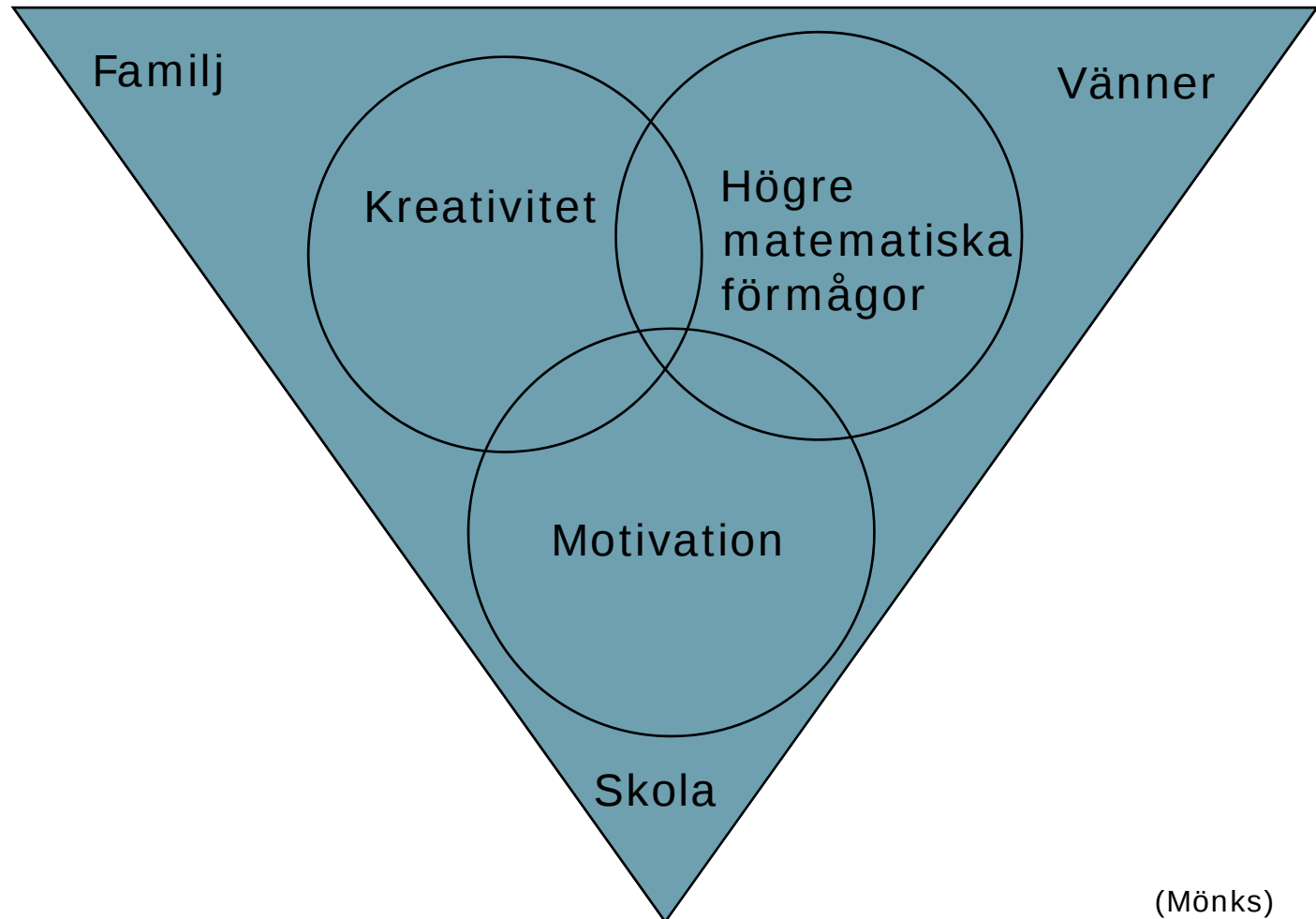
- Behöver stöd i sin matematiska utveckling
- Höjda förväntningar på alla elever
- Rättighet till utbildning

Europarådets rekommendation

- "Gifted children should be able to benefit from appropriate educational conditions that would allow them to develop fully their abilities, for their own benefit and for the benefit of society as a whole. "

(Europarådets rekommendation 1248, 1994)

Vad påverkar utvecklingen av matematiska förmågor?



(Mönks)

Matematisk förmåga enligt Krutetskii

- Många olika förmågor bildar gemensamt den matematiska förmågan
- Svaghet i vissa förmågor kan kompenseras av styrkor i andra
- Ser inte förmågorna i sig som medfödda
- Vad som ärvt är snarare en benägenhet att utveckla förmågorna
- Förmågorna utvecklas genom övning, aktivitet och erfarenhet

Krutetskiis beskrivning av den matematiska förmågans struktur

De aspekter han pekar ut är:

- förmågan att *insamla matematisk information*, t.ex. förmåga att se den formella strukturen i ett matematiskt material, förmåga att göra både analys och syntes samtidigt av ett matematiskt material och på så sätt fånga helheten utan att tappa delarna.
- förmågan att *bearbeta matematisk information*, t.ex. förmåga till logiskt tänkande, systematiskt och sekventiellt tänkande, flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter att förenkla och förkorta resonemanget i en problemlösning. Förmåga att ifrån ett eller flera specialfall kunna se allmängiltiga samband eller relationer.
- förmågan att *bevara matematisk information*, t.ex. förmåga att minnas matematiska relationer, problemtyper och huvudsakliga argument i bevis.
- Till dessa kommer en mer generell förmåga som kan beskrivas som matematiskt sinnelag

(Krutetskii, s. 350-351)

Fallstudie – Johan och Sara

- Första mötet med Johan och Sara
- Uppväxt och hemmiljö
- Skolgång och undervisning
- Matematiska förmågor
- Matematiska brister
- Johan och Saras likheter och olikheter

Exempel 1: (problem 10 vid Kängurutävlingen)

Svar

- Av 2006 skolbarn i Malmö hade 1500 varit med i Kängurutävlingen och 1200 i Vargungetävlingen. Hur många av barnen hade deltagit i båda tävlingarna om det var 6 barn som inte varit med i någon av tävlingarna?
- *Johan: Det ser man ju direkt.*
- *Eva: Försök ändå förklara för mig.*
- *Johan: De var 2006 barn men 6 hade inte varit med alltså 2000. Det hade gjorts 2700 prov, då måste 700 ha gjort båda proven.*

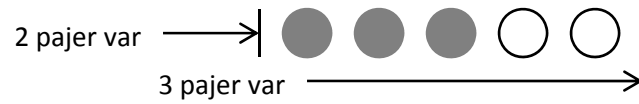
Exempel 2: (problem 12 vid kängurutävlingen)

Svar

- Mormor sa till barnbarnen: "om jag bakar 2 pajer till er var, så får jag deg över som räcker till ytterligare 3 pajer. Men jag kan inte baka 3 pajer till er var, för då räcker inte degen till de 2 sista pajerna." Hur många barnbarn hade mormor?
- Johan: *Ja, det blir ju 5.*
- Eva: *Kan du förklara.*
- Johan: *Nej, det vet jag inte. Man ser ju att skillnaden är 1 paj och så är den andra skillnaden 5 pajer. Då måste det ju vara 5 barn.*

Hur tänker Johan?

- En möjlig tolkning av Johans resonemang är att han utgår ifrån en degklump, där det i ena fallet (2 pajar) blir deg över till 3 pajar och i det andra fallet (3 pajar) saknas deg till 2 pajar.



- Hans uttryck "*Man ser ju att skillnaden är en paj*" gestaltas då av de två möjliga fallen, 2 respektive 3 pajar var, och uttrycket "*så är den andra skillnaden fem pajar*" blir summan av den deg som är över respektive saknas.

Ett annat sätt att se det på?

Ekvation:

x = antal barnbarn

$$2x + 3 = 3x - 2$$

$$3 + 2 = 3x - 2x$$

$$5 = x$$

Exempel 3: (problem 11 vid Kängurutävlingen)

- En månad inföll tre tisdagar på jämna datum. Vilken veckodag var den 21:a i denna månad?
- *Johan: Den kunde jag inte alls. Jag har ingen koll på månader och sådant.*
- *Eva: Jag förklarar lite kring månader och veckodagar men Johan vet ändå inte riktigt hur han skall ta sig an problemet utan det blir jag som leder honom framåt.*

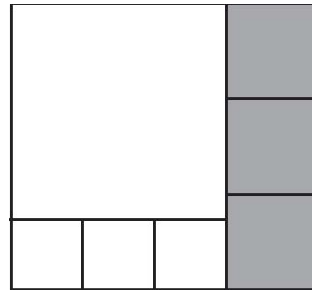
Exempel 4: (problem 21 vid Kängurutävlingen)

- Summan av tre positiva rationella tal är lika med 20. Vad kan man säga om produkten av de två största talen?
- Johan: *Jag kan inte sådana ord, vet inte vad rationella tal är och vad produkten är så jag funderade inte så mycket på denna uppgift.*

Exempel 5: (Problem 16 vid Kängurutävlingen)

Svar

- Rektangeln på bilden är indelad i 7 kvadrater. De tre grå kvadraterna till höger har sidlängden 8 cm. Vilken sidlängd har den stora vita kvadraten?



- Sara: *Tre stora kvadrater är lika med 4 små kvadrater. Då är fyra små kvadrater lika med 24 cm. Tre små kvadrater eller den stora kvadraten är då lika med 18 cm.*

Exempel 2: (Problem 16 vid Kängurutävlingen)

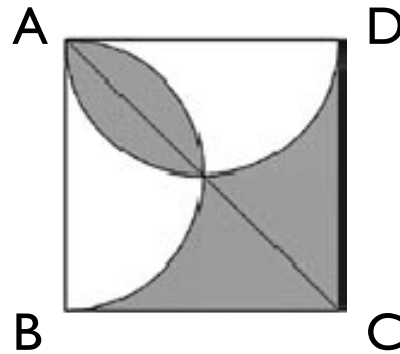
Svar

Den sista siffran i ett tresiffrigt tal är 2. Om denna siffra flyttas från sista till första plats så minskar talet med 36. Vilket är talets siffersumma?

- Sara: *Om första talet heter $xy2$ så heter det andra $2xy$ efter man har flyttat 2:an. Då är $xy2 - 2xy = 36$. 2 minus y skall vara 6, men det går inte så då måste man låna så det blir 12 minus y och då är y lika med 6. Då måste x vara 2 eftersom 5 minus x skall vara 3. 6 plus 2 plus 2 är 10.*

Utmaningen

- I figuren har en kvadrat ABCD och två halvcirklar med diametern AB och AD ritats upp. Om längden av AB är 2 cm, hur stor är den skuggade arean?



Lösning 1

- Genom att rent geometriskt visa att de två små skuggade områdena längst upp till vänster i figuren kan fällas ner och fylla ut tomrummen i halvcirklarna vilket gör att de skuggade områdena tillsammans bildar halva kvadraten vilken därmed är två kvadratcentimeter. Han berättade att det var så han själv hade löst uppgiften först, genom att helt enkelt se detta i figuren.

Lösning 2

- Först beräknar vi hela kvadratsens area som är fyra kvadratcentimeter samt cirkelhalvornas areor som är $\pi/2$ var. Sedan delar vi in kvadraten i fyra små kvadrater som vardera har arean en kvadratcentimeter och inuti den övre vänstra kvadraten finns en cirkelsektor som har arean $\pi/4$. Om vi subtraherar cirkelsektorn från kvadraten få vi det streckade området i figuren nedan. Med hjälp av detta kan vi nu beräkna arean av det lilla skuggade området överst i vänstra kvadraten. Den matematiska uträkningen som Johan visade såg ut på följande sätt:
- Kvadraten: $2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$ Halvcirkel: $1 \cdot 1 \cdot \pi/2 \text{ cm}^2$
- Liten kvadrat: $1 \cdot 1 = 1 \text{ cm}^2$
- Cirkelsektor: $\pi/4 \text{ cm}^2$
- Streckade området: $(1 - \pi/4) \text{ cm}^2$
- Övre skuggade området: $1 - 2(1 - \pi/4) = \pi/2 - 1 \text{ cm}^2$
- Samtliga skuggade områden: $4 - \pi + 2(\pi/2 - 1) = 2 \text{ cm}^2$