

Uppgifter framtagna av gymnasielärare och högskolelärare vid det femte nationella mötet i maj 2008 i Göteborg. För mer information kring mötet se <http://mattebron.ncm.gu.se/node/506>

## Resonemangskompetens (bord 12-14)

### Gymnasiet

1a) Radien på cirkeln är 10 rutor. Cirkeln ser ut att gå igenom de två markerade punkterna. Gör den det? Motivera!

(Figur cirkelkvadrant med tydligt rutnät. Två punkter markerade i hörnpunkter som ser ut att ligga på cirkeln)

b) Använd passare för att rita cirklar med heltalsradie. Finns det någon radie där cirkeln passerar genom fler "heltalskryss"? Motivera!

Öppen uppgift, lämpar sig bättre för gruppdiskussion

2. Du ska köpa jordgubbar. På torget säljs sfäriska jordgubbar i kubiska 1-litersförpackningar. Ska du välja stora eller små jordgubbar?

Ledtrådar efter behov:

- Låt kubens sida vara en jämn multipel av jordgubbsdiametern.
- Prova i två dimensioner
- Kan du lägga jordgubbarna på annat sätt för att få in fler?
- Vad händer om du blandar storlekar?

### MaB

3a) Hitta fem tal så att deras medelvärde är 12 och median är 20.

b) Går det att hitta fem *olika positiva* heltal med medelvärde 12 och median 20? Om inte, förklara varför.

### Lösningsförslag

a) Exempel: 0, 0, 20, 20, 20

b) Det mittersta talet i storleksordning är medianen, som är 20. Summan av alla talen är  $5 \cdot 12 = 60$ . Det betyder att summan av de övriga fyra talen är  $60 - 20 = 40$ . Eftersom medianen är 20 och alla talen är olika så måste summan av de två största talen var minst 43 och speciellt större än 40. Därför kan inte summan av de fyra talen, medianen undantagen, vara 40. Det är alltså inte möjligt att hitta fem positiva heltal vars medelvärde är 12 och vars median är 20.

### MaC

4. En polynomfunktion  $f(x)$  har ett reellt nollställe. Beskriv med ord och skisser möjliga utseenden för funktionens graf.

- Du kan t.ex. börja med att undersöka grafens utseende om nollstället är  $x = 2$ . (1/2□)

### Bedömningsmall:

|   |      |
|---|------|
| Ger exempel på linjär funktion som går genom (2,0)          | +1G  |
| Ger exempel på andragradsfunktioner med extrempunkt i (2,0) | +1VG |
| Ger fler exempel på funktioner av olika gradtal             | +1VG |

MaD

5a) I vilken/ vilka punkter gäller

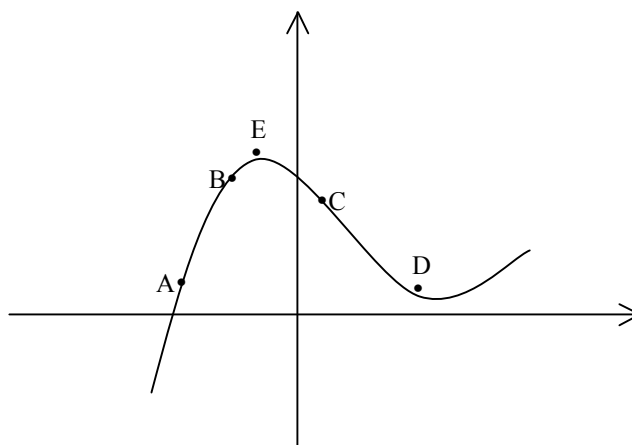
$$y' > 0$$

$$y' < 0$$

$$y' > 1$$

b) Varför gäller  $y'' < 0$  i E? Motivera!

Varför gäller  $y'' < 0$  i B? Motivera!



MaD

6. Är följande härledning korrekt?

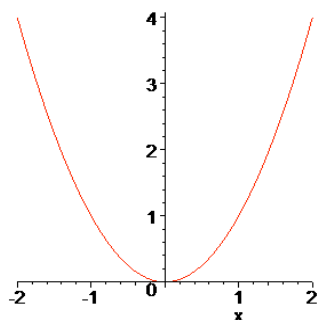
$$\begin{aligned}\sin 4x &= 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x ((\cos x)^2 - (\sin x)^2) \\ &= 4 \sin x (\cos x)^3 - 4 \cos x (\sin x)^3\end{aligned}$$

Motivera ditt svar noga genom att tydligt hänvisa till vilka räkneoperationer och standardformler i formelbladet som används i varje steg, eller genom att förklara vilket eller vilka steg som är felaktiga.

MaD

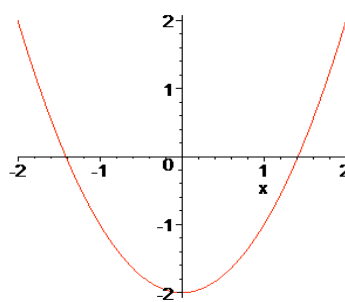
7. Nedan anges grafen till fyra funktioner  $f$ ,  $g$ ,  $h$  och  $k$ .

$$y = f(x)$$

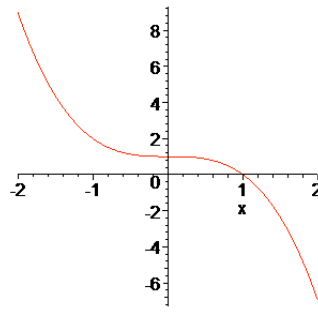
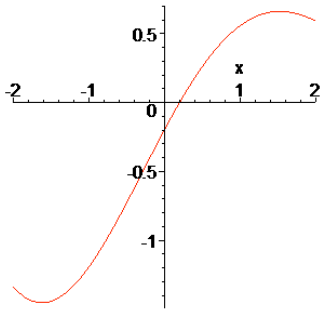


$$y = h(x)$$

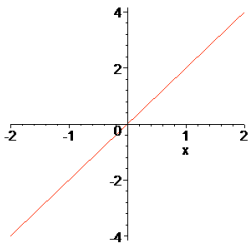
$$y = g(x)$$



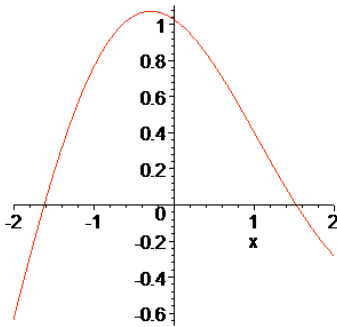
$$y = k(x)$$



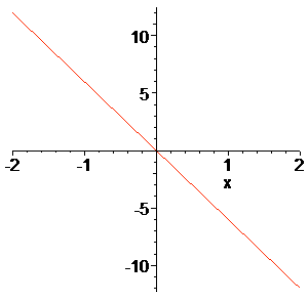
a) Två av de fyra funktionerna  $f$ ,  $g$ ,  $h$  och  $k$  har en derivata vars graf har följande utseende. Vilka?



b) En av de fyra funktionerna  $f$ ,  $g$ ,  $h$  och  $k$  har en derivata vars graf har följande utseende. Vilken?

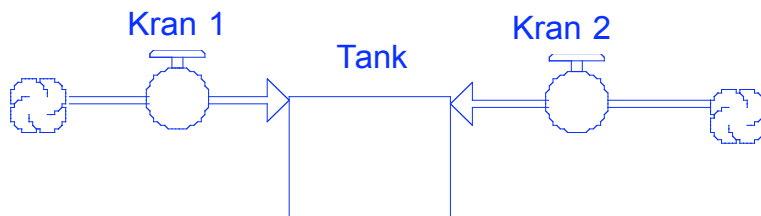


c) En av de fyra funktionerna  $f$ ,  $g$ ,  $h$  och  $k$  har en andraderivata vars graf ser ut på följande sätt. Vilken?



## Högskolan

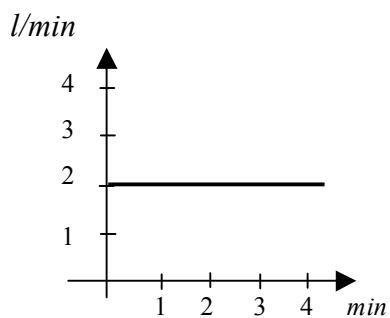
1



En från början tom tank börjar fyllas med vatten från enbart Kran 1 med ett flöde enligt diagram 1. Hur förändras tankens vattenvolym med tiden? Skissa volymens graf i diagram 2.

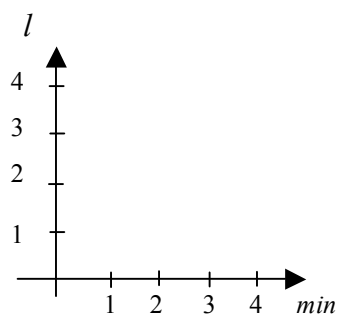
- Förklara noggrant för en elev i åk1 varför grafen får ungefär etta utseende.
- Bestäm den exakta formeln för hur volymen ändras med tiden och förklara noggrant för en elev i åk 3 (NV) varför din formel är riktig.

Diagram 1



Flöde

Diagram 2

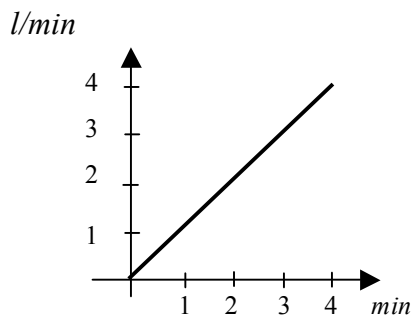


Tankvolym

Nu används istället Kran2 med flöde enligt diagram 3

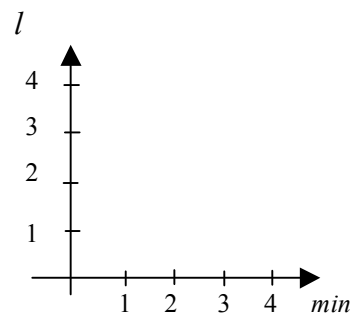
- motsvarande fråga a)
- motsvarande fråga b)

Diagram 3



Flöde

Diagram 4

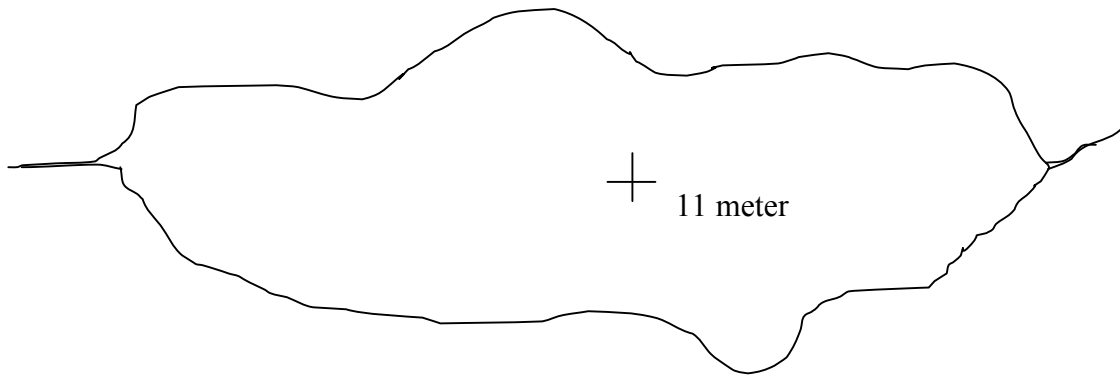


Tankvolym

Uppgiften kan utvidgas med

- a) Annan startvolym
- b) En läns pump som pumpar ut t.ex. 1 l/min
- c) Läns pumpen startar först efter 2 min
- d) Man använder Kran 1 och Kran 2 samtidigt
- Etc

2



Indata: En sjö har ytan  $15\,000\text{ m}^2$  och högsta djup 11 meter. Du skall utifrån dessa begränsade indata göra en rimlig uppskattning av sjöns vattenvolym.

En lämplig formel kan vara

$$V = \frac{11 \cdot 15000}{k}$$

Välj ett lämpligt värde på  $k$  och motivera varför du anser att detta värde är rimligt.

3. Ett antal grafer ges tillsammans med en given differentialekvation. Uppgiften är att med korrekt resonemang ange vilka grafer som *inte* beskriver lösningar till differentialekvationen. (Typiskt ograderade axlar, bara grafens form ska räcka.)

*Bedömningsanvisning:* Varje relevant korrekt motexempel ger poäng.