Uppgifter framtagna av gymnasielärare och högskolelärare vid det femte nationella mötet i maj 2008 i Göteborg. För mer information kring mötet se http://mattebron.ncm.gu.se/node/506

Problemlösningskompetens (bord 6-8)

Gymnasiet

MaA

1a) Fyll kvadraten med talen 1 till och med 9 så att summan blir lika stor i varje vågrät och lodrät rad och diagonal. Samtliga tal ska användas. (Var bör du placera siffran 5?). Detta kallas en magisk kvadrat.

b) Hur många olika magiska kvadrater finns det? (Hur många summor ingår ett hörnelement i?, ett kantelement? Gör en tabell!)

c) Kan du fylla kvadraten med 9 olika tal (som du själv väljer) så att <u>produkten</u> blir lika stor i varje vågrät och lodrät rad och diagonal? (Kan vi utnyttja potenslagarna?)

MaB

2. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna (5, 0), (0, 3), (7, 6). (1/2)

Lösning

Betrakta rektangeln med hörn (0, 0), (7, 0), (7, 6), (0, 6). Den kan delas upp i fyra trianglar: den, vars area söks, samt tre rätvinkliga trianglar med kateter på eller parallella med koordinataxlarna. Den sökta arean blir då $7 \cdot 6 - \frac{1}{2}(5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 7 \cdot 3) = 42 - 24 = 18$

Bedömningsmall:

Något rätt uttryck för arean	+1G
Kompletteringstanken	+1VG
Korrekt area	+1VG

MaB

3. En triangel har omkretsen 15 cm. Vilka heltalslängder kan triangelsidorna ha?

MaB

4. I ett rum finns ett antal pallar med tre ben vardera och ett antal stolar med fyra ben vardera. På varje pall/stol sitter en person (med två ben). Det totala antalet ben i rummet är 39. Bestäm antalet pallar och antalet stolar.

Lösning:

Beteckna antalet pallar med x, antalet stolar med y och antalet personer med z. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 39 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

vilket ger ekvationen $5x + 6y = 39$. Eftersom varken $5x = 39$ eller $6y = 39$ har några heltalslösningar, får vi att $x \geq 1$ och $y \geq 1$. Ur den första olikheten följer att $y \leq 5$ och ur den andra $x \leq 6$. Genom att sätta in $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (alternativt $y = 1, 2, 3, 4, 5$), får vi att den enda lösningen $x = 3$, $y = 4$. (Lösningen kan göras kortare om man använder delbarhetsargument)

Bedömningsmall:
Poängskala (1/3/¤)

Rätt ekvationssystem	+1G
Reducering till ekvation	+1VG
Korrekt svar utan visad entydighet	+1VG
Visad entydighet	+1VG

MaB/C

5. En inhägnad ska byggas runt en husknut med hjälp av ett rep som är 100 m långt. Hela inhägnaden ska ha formen av en rektangel (med sidor parallella med väggarna), ur vilken husknuten skär ut en mindre rektangel. De delar som fäster i väggarna och går ut rätvinkligt mot dem ska vara lika långa. Bestäm inhägnadens mått så att den uppfyller ovanstående villkor och har maximal area.

Lösning:
Beteckna med a och b sidlängderna i den stora rektangeln, med x längden av vardera bit som går ut från väggarna. Den totala arean blir då $f(x) = ab - (a - x)(b - x)$ och repets längd ger bivillkoret $a + b + 2x = 100$. Detta ger $f(x) = (a + b)x - x^2 = (100 - 2x)x - x^2 = 100x - 3x^2$. Koefficienten framför x^2 är negativ, vilket medför att $f(x)$ har ett största värde. Lösningen kan nu avslutas med kvadratkomplettering (kurs B) eller min/max undersökning m.h.a. derivator (kurs C).

Bedömningsmall:
Poängskala B: (2/3/¤)

Rätt uttryck för arean	+1G
Arean som funktion av vettigt valda variabler	+1G
Arean som funktion av x eller annan parameter	+1VG
Grafisk lösning	+1VG
eller	
Kvadratkomplettering och funnet maximum	+1-2VG

Poängskala C: (2/2/¤)

Rätt uttryck för arean	+1G
Arean som funktion av vettigt valda variabler	+1G
Arean som funktion av x eller annan parameter	+1VG
Genomförd max/min undersökning	+1VG

Högskolan

1. Finns det någon annan lösning till ekvationen $x^y = y^x$ än $x = y$? Finns det fler?

2. Beräkna integralen $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$

   Ledning: Du behöver inte bestämma den primitiva funktionen.

3. En inhägnad ska byggas runt en husknut med hjälp av ett rep som är 100 m långt. Hela inhägnaden ska ha formen av en rektangel (med sidor parallella med väggarna), ur vilken husknuten skär ut en mindre rektangel. De delar som fäster i väggarna och går ut rätvinkligt mot dem ska vara lika långa. Bestäm inhägnadens mått så att den uppfyller ovanstående villkor och har maximal area. (5p av 50)

Bedömningsmall:
Räknefel −1p
Otillräcklig motivering att funktionen har största värde i derivatans nollställe: − 2p
Rätt funktion: +2p

4a) För vilka $x \in R$ gäller olikheterna $(1 + x)^2 \geq 1 + 2x$ och $(1 + x)^3 \geq 1 + 3x$ (2p av 50)
  b) Visa olikheten $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ för $x \geq 0$, $n \in N$. (3p av 50)
  c) Visa olikheten $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $n \in N$ för $x \geq -1$. (4p av 50)

Lösning:
a) direkt
b) Kan visas m.h.a. binomialsatsen eller genom att inse att vänsterledet innehåller termerna 1, nx samt ett antal termerna, som alla är icke-negativa.
c) Induktion; $n = 1$: $(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + x$, alltså är olikheten sann för $n = 1$. Antag att olikheten är sann för alla $x \geq -1$ och något $n = p$, d.v.s. anta att $(1 + x)^p \geq 1 + px \quad \forall x \geq -1$
Då har vi
$(1 + x)^{p+1} = (1 + x)^p(1 + x) \geq (1 + px)(1 + x) = 1 + (p + 1)x + px^2 \geq 1 + (p + 1)x$,
för alla $x \geq -1$ (eftersom det medför att $1 + x \geq 0$, så att olikhetstecknet behålls vid multiplikation med $x + 1$). Enligt induktionsaxiomet gäller olikheten för alla $x \geq -1$ och för alla $n \geq 1$.