Dnr: 2006: 649

MYNDIGHETEN FÖR SKOLUTVECKLING

LUNDS KOMMUN
Polhemskolan

2009-02-04

Till Skolverket/Myndigheten för skolutveckling Lund 2009-02-03

Samverkan mellan Polhemskolan i Lund och Matematiska Institutionen på Lunds Universitet

Redovisning av utvecklingsprojekt beviljat av Myndigheten för skolutveckling december 2006 sammanställd av Klas Nilson och Bo Silborn

Dnr 2006:649

Beviljat anslag: 48 000 kr

Det beviljade anslaget har använts på följande sätt:

Arvodering av föreläsare från Lunds Universitet

Vikariekostnader i samband med föreläsningar för lärare på Polhemskolan anordnade av Lunds Universitet, 10 tillfällen

Nedsättning i tjänst för 2 lärare för inläsning och upprättande av kursplaner för 4 kurser à 50 p motsvarande Matematik 1 alfa på Lunds Universitet

Matematikmöten i Göteborg och Stockholm, 2 tillfällen

Beskrivning av projektet på nästkommande sidor

Klas Nilson Katarina Sjöström

Sammanfattning

Under läsåret 2007-2008 genomförde för första gången gymnasieelever på Polhemskolan i Lund universitetsstudier i matematik under ledning av lärare på skolan. Initiativtagare var skolans utvecklingsledare i matematik Klas Nilson och planeringen sköttes tillsammans med ämnesläraren Bo Silborn, som också ansvarade för större delen av undervisningen. Tolv av skolans elever läste fyra breddningskurser på vardera 50 poäng i matematik under årskurs 3 samtidigt som en grupp i årskurs två påbörjade samma studier. Tillsammans motsvarade innehållet i dessa fyra kurser det som ingår i kursen *Matematik 1 alfa* (15 högskolepoäng) på Matematiska Institutionen vid Lunds Universitet.

När de fyra breddningskurserna var avklarade tenterade eleverna på universitetet tillsammans med de studenter som läste under universitetets ledning. Deras resultat arkiverades för att kunna registreras den dag de skriver in sig för studier på universitet eller högskola.

Samtliga elever som läste fyra breddningskurser valde att gå upp på tentamen i april 2008. Nio av tolv klarade tentamen vid det tillfället och en klarade nästföljande omtenta. Slutresultatet innebar att 83 % av eleverna som ingick i detta projekt har 15 högskolepoäng när de skriver in sig på universitetet. De hade, vilket är allra viktigast, dessutom lagt en mycket god grund för att lyckas bättre i sina framtida studier oavsett om det sker på matematikcentrum, på Lunds Tekniska Högskola eller på någon annan läroanstalt.

Förord

Under många år har Polhemskolan haft ett växande samarbete med naturvetenskapliga institutioner på Lunds Universitet. En ny inriktning på skolans naturvetenskapliga program har skapats, NV med forskningsanknytning. Polhemskolan strävade efter att utveckla detta samarbete till att även gälla matematik och kontaktade därför Matematikcentrum. Diskussionerna ledde fram till att vi, i samarbete med Matematikcentrum, erbjöd våra elever möjligheten att läsa universitetskurser redan under gymnasietiden.

Inledning

Bakgrund

Polhemskolan har en lång tradition av utbildning av naturvetare och tekniker. Vi har haft många elever med stort intresse av och goda resultat i naturvetenskapliga ämnen och matematik. Våra elever har ofta lyckats bra i nationella och internationella tävlingar. Vi är också den skola i landet som ”levererar” flest elever till Lunds Tekniska Högskola. Vi har under många år haft 250-300 elever per årskurs på naturvetenskapligt eller tekniskt program.

Tidigare har skolan använt en hel del resurser för att hjälpa elever med problem i matematik, svenska och/eller engelska. Vi har däremot inte haft utrymme att ge duktiga elever tillräckligt mycket stimulans även om vi alltid uppmuntrat och bistått dessa elever i deras strävan att få möta nya utmaningar. Detta ville skolan förändra.

Syfte

Syftet med projektet var att stödja elever med stort matematikintresse i deras strävan efter att nå längre i sina studier än vad kursplanerna i de obligatoriska matematikkurserna anger. Skolan ville ge dem utmaningar som kunde stärka deras matematiska kunskaper samtidigt som de skulle vara väl förberedda för matematiska och/eller naturvetenskapliga studier på universitet eller högskola. Erfarenheten från studier av matematik på högre nivå har visat att alltför många studenter har stora problem att klara studierna med goda resultat.

Frågeställning

Matematiklärarna på Polhemskolan har samma erfarenheter från sina studier, nämligen att matematikstudier på universitetet genomgående har vållat stora problem för många studenter. Vi undrade därför om det var möjligt för gymnasieelever på Polhemskolan att nå goda resultat på den inledande kursen *Matematik 1 alfa* på matematikcentrum vid Lunds Universitet. Inför projektets start var det viktigt att få veta hur goda resultat vi kunde nå i jämförelse med studenter som läser motsvarande kurs på universitetet. Vi var därför måna om att våra elever skulle ges möjlighet att tentera tillsammans med de ordinarie studenterna på kursen.

Metod

Matematik 1 alfa är på 15 högskolepoäng och motsvarar en halv termins heltidsstudier. Omräknat till gymnasiepoäng blir det drygt 200. Eftersom breddningskurser endast får omfatta 50 poäng valde vi att dela upp universitetskursen på fyra breddningskurser à 50 poäng med beteckningarna *Alfa 1* till *Alfa 4*. Dessa kunde väljas till sin helhet som individuella val men det var också möjligt att välja att läsa en, två eller tre av dessa. Varje kurs bedömdes och betygsattes på samma sätt som alla andra gymnasiekurser. De som valde att läsa samtliga kurser erbjöds i samarbete med universitetet att tentera tillsammans med de studenter som läser kursen där.

Universitetsmatematik på Polhemskolan läsåret 07-08

Bakgrundsbeskrivning

Efter att vi fått besked om att Myndigheten för skolutveckling beviljat oss medel för vårt projekt, inledde vi arbetet med projektet. Vi gick ut med information till eleverna inför valen av de individuella kurserna. För att våra elever skulle kunna tentera måste vi vara klara med samtliga kurser i mitten av april. Rent tekniskt var det inte möjligt att läsa mer än två breddningskurser per termin, vilket innebär att den sista kursen skulle avslutas i början av juni. Vi valde därför två olika upplägg för att eleverna skulle bli klara till tentamen i april.

För de elever som gick i årskurs två fanns det ingen annan möjlighet än att läsa samtliga fyra årskurser i årskurs tre. Vi erbjöd eleverna att påbörja studierna direkt på höstterminen i årskurs tre och meddelade samtidigt att extra undervisning kommer att förekomma på tider då de annars är lektionslediga, t.ex. på lektionsfria dagar och sena eftermiddagar för att hinna bli klara till tentamensdagen.

Elever som gick i årskurs ett erbjöds istället att läsa den första delkursen redan på vårterminen i årskurs två och resterande tre kurser i årskurs tre. På det sättet kan kurserna vara klara i god tid till tentamen utan stress eller alltför många extralektioner. Vi trodde att det skulle vara en bättre lösning för eleverna än den vi valde för den andra gruppen.

När elevernas val sammanställdes var det att tio elever från årskurs ett och fjorton elever från årskurs två som ville studera universitetsmatematik.

Arbetet med kurserna

Under våren 2007 beslutade skolledningen att Klas Nilson skulle undervisa eleverna från årskurs ett i den första kursen *Alfa 1* på vårterminen i årskurs två. Den beslutade också att Bo Silborn skulle ta hand om undervisningen av samtliga fyra delkurser i årskurs tre och ha huvudansvaret för att gå igenom all kurslitteratur, universitetets planeringar och övrigt material samt att göra en lämplig uppdelning av materialet på fyra delkurser.

Arbetet inför läsårsstarten ledde fram till att kursplaner och litteraturanvisningar för de fyra kurserna var klara då läsåret 07-08 påbörjades. Den litteratur som användes var *Matematisk Analys – en variabel* av Forsling & Neymark (se referenslista), *Algebra och geometri* av Vretblad & Ekstig (se referenslista) samt diverse kompendier från matematikcentrum.

Alfa 1

Höstterminen inleddes med att 14 elever i årskurs tre påbörjade sina universitetsstudier genom att läsa kursen *Alfa 1*. Gruppen bestod av 13 elever från naturvetenskaps- och en elev från teknikprogrammet. Könsfördelningen var relativt jämn, åtta killar och sex tjejer. Kursen innehöll följande moment:

Reella tal: Algebraiska räkning med reella tal, koordinatsystem, räta linjer och normaler

Heltal: Delbarhetsregler, primtal, divisionsalgoritmer, motsägelsebevis och diofantiska ekvationer

Induktion och rekursion: Summa- och produkttecken, induktionsbevis och rekursiva formler

Kombinatorik: Multiplikationsprincipen, permutationer, kombinationer och binomialsatsen

Undervisningen försiggick fyra dagar i veckan och efter sju veckor var det dags för ett avslutande prov. Resultatet var mycket gott och flertalet elever fick betyget MVG. Eftersom inga prov getts under kursens gång gavs eleverna möjlighet till omprov. De som inte fick det högsta betyget valde att göra ytterligare ett prov, varvid någon höjde sitt betyg. Syftet med det här systemet var att efterlikna studier på högre nivå, vilket innebär att när kursen är avslutad, examineras den med möjlighet till omprov.

Två av eleverna ansåg att det krävdes för mycket arbete och tyckte sig inte ha den motivation som krävdes för att fortsätta med kommande kurser. De beslutade sig för att inte läsa fler kurser.

För att vår egen undervisning skulle läggas upp på liknande sätt som på universitetet, följde Klas Nilson och Bo Silborn föreläsningarna i *Matematik 1 alfa* på matematikcentrum. Schematekniskt fanns det inte utrymme att alltid närvara men vi var där så ofta vi kunde. I samband med det hade vi också vid enstaka tillfällen samtal med föreläsaren. Förutom det hade vi kontinuerlig kontakt med Gudrun Gudmundsdottir, studierektor och vår kontaktperson på matematikcentrum.

De återstående tre kurserna fullföljdes av resterande tolv elever. Följande moment lästes under respektive kurs.

Alfa 2

Reella tal: Ekvationslösning, icke-linjära olikheter och absolutbelopp

Funktioner: Grafer, logaritm-, exponential-, potens- och trigonometriska funktioner

Komplexa tal: Talsystemet, andragradsekvationer, exponentialfunktioner och den binomiska ekvationen

Alfa 3

Polynom och ekvationer: Nollställen, faktorsatsen och delbarhet

Gränsvärden och kontinuitet: Definitioner, bevis, kontinuerliga funktioner, sammansatta funktioner, standardgränsvärden och talföljder

Alfa 4

Derivator: Definitioner, deriverbarhet, differentialer, feluppskattningar, deriveringsregler, inversa funktioner, implicit derivering, komplexvärd derivering, deriveringssatser, kurvritning, maxima och minima och derivator av högre ordning

Samtidigt som eleverna i årskurs tre läste de två avslutande kurserna tillsammans med Bo Silborn läste eleverna i årskurs två den inledande kursen under ledning av Klas Nilson. Den gruppen bestod av tio elever fördelade på sex killar och fyra tjejer. Två av eleverna kom från teknikprogrammet, en från idrottsprogrammet och resten från det naturvetenskapliga programmet. Båda grupperna var framgångsrika i sina studier. Samtliga fick minst godkänt på alla kurser och en klar majoritet i båda grupperna fick det högsta betyget.

Eftersom vi tyckte att det var angeläget med direkt kontakt mellan våra elever och universitetet bjöd vi in gästföreläsare vid flera tillfällen. Två lärare från universitetet har besökt båda grupperna för att berätta om hur studier på högre nivå bedrivs och svara på frågor. De presenterade även andra samarbetsprojekt mellan gymnasieskolorna och matematikcentrum samt höll föreläsningar som behandlade moment från kursen.

Under vårterminen träffade Bo Silborn sin grupp vid några tillfällen utanför det ordinarie schemat. Dels träffades gruppen flera gånger efter ordinarie schematid mellan klockan tre och sex och dels användes två halvdagar då resten av skolans elever var lediga. Eleverna tyckte att det var bra eftersom de var måna om att komma väl förberedda till tentamen. Lördagen den 19 april 2008 klockan 8.00 - 13.00 var det dags för tentamen.

Resultat

Ett par dagar efter tentamen träffades gruppen igen. Eftersom förberedelsearbetet inför tentamen hade tagit all tid hade det inte funnits utrymme att ha slutprov på den sista kursen. I väntan på besked från universitetet fortsatte arbetet inför slutprovet på *Alfa 4*. Efter ytterligare någon vecka fick vi äntligen det efterlängtade beskedet om tentamensresultatet.

Resultatet var över all förväntan. Nio av våra elever eller 75 % klarade tentamen med godkänt eller väl godkänt betyg. Samtidigt fick vi veta att knappt 20 % av studenterna som skrev samma tentamen klarade godkänt eller bättre. Glädjen var stor, både bland de elever som klarat tentamen men också hos alla på skolan som på olika sätt deltagit vid planering och genomförande av utbildningen. Eleverna växte med framgången och man såg hur stolta de var över sina fantastiska resultat.

Av dem som inte klarade tentamen var det en som bara var en poäng från godkänt. Hon valde att göra en omtenta i augusti med godkänt resultat. Slutresultatet blev att tio av tolv elever från Polhemskolan redan har 15 högskolepoäng när de skriver in sig på universitetet. Det avslutande provet på *Alfa 4* gick bra för samtliga och resulterade i betygen VG eller MVG.

Idag läser några av dessa elever på Lunds Tekniska Högskola med än så länge mycket goda resultat. Två valde att läsa *Matematik 1 beta* som är en fortsättning på alfakursen. Båda har klarat den tentan med betyget Väl godkänd.

Analys och slutsatser

Resultatet av vårt projekt med universitetsmatematik måste betecknas som mycket gott. Visserligen var det ett positivt urval av gymnasieelever som valde att läsa dessa kurser men samtidigt får man nog anta att de som väljer att läsa matematik i universitetets regi också har ett starkt intresse för ämnet och har goda matematikresultat från gymnasietiden bakom sig.

En av anledningarna till det goda resultatet är sannolikt att all undervisning har bedrivits i en liten grupp på tolv elever. Förutsättningarna för att ha ett diskussionsvänligt klimat är betydligt bättre än vid föreläsningar med mellan femtio och hundrafemtio elever i en hörsal. Det är också lättare att avbryta läraren med frågor samtidigt som möjligheterna för läraren att få igång diskussioner med eleverna är betydligt större.

Att så många studenter får problem med att klara sina matematikstudier oavsett det är i universitetets regi eller vid någon teknisk högskola beror förmodligen på den stora omställningen från gymnasiets matematik. Samtidigt som man går på föreläsningar i en stor hörsal där man känner sig mer anonym och osäker, möts man av helt andra krav på kunskaper, bevisföring och matematisk stringens än vad som är vanligt på gymnasieskolan.

En av våra elever som nu har läst en termin på LTH menar att det är två helt skilda världar, att läsa t.ex. matematik C och D på gymnasienivå och att läsa endimensionell analys på LTH. Han menade att föreläsningarna där fylldes av ”satser, bevis, satser, bevis, satser och bevis i en enda lång följd”. Universitetsstudier under gymnasietiden kan skapa en bro mellan dessa världar och göra övergången till högre studier betydligt smärtfriare.

Diskussion

När rapporten skrivs pågår fortfarande undervisningen i den grupp som påbörjade studierna i årskurs två. Gruppen har hittills nått mycket goda resultat men ett prov på den sista kursen och en tentamen senare i vår återstår.

Efter samtal med elever samt genom egna analyser och reflektioner har vi beslutat oss för att överge den modell som innebär att första kursen läses redan i årskurs två. Eleverna var mycket osäkra inför att ta beslut om universitetsstudier redan efter en termin på gymnasieskolan. Vi föredrar att starta i årskurs tre och använda lektionsfri tid för att läsa in den tid som schemamässigt ligger efter tentamen. Vi tror att det får till följd att fler av de matematikintresserade eleverna kommer att välja dessa kurser som individuellt val.

Genom ett nystartat samarbete med Lunds Tekniska Högskola kommer vi i fortsättningen också att kunna erbjuda elever som väljer att läsa två av breddningskurserna möjligheten att göra en tentamen på åtta poäng i kursen *Endimensionell analys* vid LTH.

Vår strävan är att utveckla samarbetet med universitetet eftersom vi ser det som vår skyldighet att förbereda våra elever så bra som det är möjligt för vidare studier. Nästa steg är att satsa på en spetsutbildning i fysik som inleds nästa läsår. Inom ramarna för den finns det också utrymme att läsa fler kurser på universitetsnivå både inom fysik och inom matematik.

Referenslista

Vretblad, Anders & Ekstig, Kerstin (2006). *Algebra och geometri.* Gleerups.

Forsling, Göran & Neymark, Mats (2004). *Matematisk analys en variabel.* Liber.

Bilagor

Bilaga 1	Kursplan, Matematik 1 alfa, 15 högskolepoäng
Bilaga 2	Kursplan, Matematik breddning – Alfa 1, 50 poäng
Bilaga 3	Kursplan, Matematik breddning – Alfa 2, 50 poäng
Bilaga 4	Kursplan, Matematik breddning – Alfa 3, 50 poäng
Bilaga 5	Kursplan, Matematik breddning – Alfa 4, 50 poäng
Bilaga 6	Prov, Matematik breddning – Alfa 1
Bilaga 7	Prov, Matematik breddning – Alfa 2
Bilaga 8	Prov, Matematik breddning – Alfa 3
Bilaga 9	Prov, Matematik breddning – Alfa 4
Bilaga 10	Tentamen, Matematik 1 alfa 2008-04-19

MATA11
Kursplan för Matematik 1 alfa, 15 högskolepoäng, Mathematics 1 Alpha, 15 ECTS credits

1. Grundläggande uppgifter

Fastställd av naturvetenskapliga fakultetens utbildningsnämnd 2007-01-31 . Planen träder i kraft 2007-07-01. Kursen är på grundnivå.

2. Allmänna uppgifter

Kursen ingår i huvudområdet matematik vid den naturvetenskapliga fakulteten. Kursen är en valbar kurs på grundnivå för en naturvetenskaplig kandidatexamen. Kursen ges även som fristående kurs. Kursen ges på svenska.

3. Lärandemål

Kursens mål är att studenten efter avslutad kurs skall:

- ha utvecklat förmåga till matematisk kommunikation i tal och skrift,
- vara förtrogen med teorin för och tillämpningarna av elementär algebra och differentialkalkyl för funktioner av en variabel,
- ha förvärvat grundläggande kunskaper för fortsatta studier i matematik.

4. Kursinnehåll

Grundläggande egenskaper hos heltalen och de reella talen. Induktion. Kombinatorik. Polynom och algebraiska ekvationer. Rätvinkligt koordinatsystem i planet och linjens ekvation. Komplexa tal. Funktionsbegreppet. De elementära funktionerna. Talföljder.

Elementär envariabelanalys omfattande gränsvärden och kontinuitet, derivator och kurvkonstruktion.

5. Undervisning och examination

Undervisningen utgörs av föreläsningar och gruppövningar. Ett väsentligt inslag i gruppövningarna är övning i problemlösning.

Examination sker i slutet av kursen. Tentamen är skriftlig. Obligatoriska inlämningsuppgifter förekommer under kursens gång.

För studerande som ej godkänts vid ordinarie tentamen erbjuds ytterligare tentamenstillfälle i nära anslutning härtill.

6. Betyg

Betygsgraderna på kursen är väl godkänd, godkänd och underkänd.

För godkänt betyg på hela kursen krävs godkänd tentamen samt godkända inlämningsuppgifter.

På tentamen används betygsgraderna väl godkänd, godkänd och underkänd, men på inlämningsuppgifterna används betygsgraderna godkänd och underkänd.

Slutbetyget är betyget på tentamen.

7. Förkunskapskrav

För tillträde till kursen krävs grundläggande behörighet samt kunskaper motsvarande Matematik D.

8. Litteratur

Enligt fastställd litteraturlista, vilken skall finnas tillgänglig senast fem veckor före kursstart; se webbsidorna för Matematik NF.

9. Övriga anvisningar

Kursen kan inte tillgodoräknas i examen tillsammans med MAT131 Matematik 1 alfa, eller MAT015 / MATA01 Matematik för naturvetare 1.

LUNDS KOMMUN
POLHEMSKOLAN

LUND

Ämne: Matematik
Kurs: Matematik – breddning (alfa 1)
Kurskod: MA1206B
Poäng: 50

Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs

Eleven skall

inom de reella talen kunna algebraiska räkning med reella tal, koordinatsystem, räta linjer och normaler

inom heltalen kunna delbarhetsregler, primtal, divisionsalgoritmer, motsägelsebevis, diofantiska ekvationer (som bara har heltalslösningar)

inom induktion och rekursion kunna summa- och produkttecken, induktionsbevis, rekursiva formler

inom kombinatorik kunna multiplikationsprincipen, permutationer, kombinationer, binomialsatsen

LUNDS KOMMUN
POLHEMSKOLAN

LUND

Ämne: Matematik
Kurs: Matematik – breddning (alfa 2)
Kurskod: MA1206C
Poäng: 50

Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs

Eleven skall

inom de reella talen kunna ekvationslösning, icke-linjära olikheter, absolutbelopp

inom funktioner kunna grafer, logaritm-, exponential-, potens- och trigonometriska funktioner

inom komplexa tal kunna talsystemet, andragradsekvationer, exponentialfunktioner, den binomiska ekvationen

LUNDS KOMMUN
POLHEMSKOLAN

LUND

Ämne: Matematik
Kurs: Matematik – breddning (alfa 3)
Kurskod: MA1206D
Poäng: 50

Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs

Eleven skall

inom polynom och ekvationer kunna nollställen, faktorsatsen, delbarhet

inom gränsvärden och kontinuitet kunna definitioner, bevis, kontinuerliga funktioner, sammansatta funktioner, standardgränsvärden, talföljder

LUNDS KOMMUN
POLHEMSKOLAN

Ämne: Matematik
Kurs: Matematik – breddning (alfa 4)
Kurskod: MA1206E
Poäng: 50

Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs

Eleven skall

inom derivator kunna definitioner, deriverbarhet, differentialer, feluppskattningar, deriveringsregler, inversa funktioner, implicit derivering, komplexvärd derivering, deriveringssatser, kurvritning, maxima och minima, derivator av högre ordning

Prov i matematik Alfa 1 åk 3, 11 oktober 2007, SB

1. En kortlek innehåller 52 kort uppdelade i fyra färger och 13 valörer. Ur kortleken dras fem kort. Man säger att man får en *hand* på fem kort. Bestäm uttryck och ge dem i enklaste form för följande händelser:
   a) På hur många sätt kan handen se ut?
   b) På hur många sätt kan handen se ut om det är en flush, vilket betyder att samtliga kort är av samma färg, d.v.s. spader, hjärter, ruter eller klöver.
   c) På hur många sätt kan handen se ut om den ska innehålla två ess, två kungar samt ett femte kort som inte är ess eller kung?
   d) På hur många sätt kan handen se ut om den ska innehålla ett tvåpar? Föregående uppgift är ett exempel på tvåpar.

2. Bestäm kvoten $\dfrac{r_1}{r_2}$ i enklaste form genom att först förenkla varje uttryck för sig.

$$r_1 = \frac{\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} \qquad\qquad r_2 = \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x}}$$

3. Studera utvecklingen av $(x - 2y + 4z)^8$.
   a) Bestäm koefficienten framför x^2yz^5 i utvecklingen.
   Skriv den i enklaste form utan att beräkna den.
   b) Utvecklingen ger t.ex. termer som innehåller x^2yz^5, x^5y^3 och y^8.
   Hur många termer med olika kombinationer av variabler finns det i utvecklingen?

4. a) Ge alla heltalslösningar till ekvationen $27x + 16y = 450$.
   b) Ge de lösningar till samma ekvation som uppfyller villkoren $x > 0$ och $y > 0$.

5. Bevisa med matematisk induktion att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

6. Det finns en obegränsad mängd tal som kan skrivas $(n^2 - 4)(n^3 - n)$. Talet n är ett heltal som minst har värdet 3. Vilket är den största gemensamma delare som dessa tal har, d.v.s. vilket är den största faktor som ingår i samtliga tal skrivna på den formen? Glöm inte att motivera ditt svar tydligt.

7. En talföljd beskrivs av den rekursiva formeln
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$
   där n är ett positivt heltal. Visa, t.ex. genom induktion, att
   a) $a_n \le 2 + \sqrt{3}$
   b) $a_{n+1} \ge a_n$

8. a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{(4\cdot 2^k + 3)}{2\cdot 4^k}$ och ge svaret i valfri form.
   b) Förenkla resultatet så att det bara innehåller potenser av en bas.

Prov matematik Alfa 2 åk 3, 20 december 2007 SB

1. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen
   $\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x} = x^2 - 2x$

2. Bestäm alla reella lösningar till
   $\dfrac{x-3}{x-1} \geq \dfrac{x-1}{x+3}$

3. Funktionen $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ är given.
   a) Bestäm definitions- och värdemängd till funktionen $f(x)$.
   b) Bestäm den inversa funktionen $f^{-1}(x)$.
   c) Bestäm definitions- och värdemängd till den inversa funktionen $f^{-1}(x)$.

4. Bestäm alla reella lösningar till
   a) $\ln(x^2 - 6) - \ln(e \cdot x) = -1$
   b) $e^{4x} - 2e^{2x} = 3$

5. a) Bestäm alla reella lösningar till $\cos 2v + \cos(v - \pi/3) = 0$
   b) För vinklarna $v = \pi/6$, $v = \pi/4$ och $v = \pi/3$ finns det exakta värden för sin v. Bestäm exakta värden för sin v om $v = \pi/12$ och $v = 5\pi/12$. Det kan göras genom att använda lämpliga trigonometriska formler samt kända exakta värden för vinklar.

6. a) Visa med de Moivres formel att $\cos 4v = 8\cos^4 v - 8\cos^2 v + 1$
   b) Visa med Eulers formler att $\cos^5 v = \dfrac{\cos 5v + 5\cos 3v + 10\cos v}{16}$
   Kan du visa ovanstående på andra sätt än med dessa formler ger det också poäng men inte full utdelning.

7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^2 - (4-2i)z = 8i$

8. a) Bestäm z^{45} i rektangulär form då $z = 1 - i$. Förenkla vid behov uttrycket.
   b) Lös ekvationen $z^5 = -4 + 4i$

Prov matematik Alfa 3 åk 3, 6 mars 2008 SB

1. a) Bestäm den största gemensamma delaren till polynomen
   $z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$ och $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$
   b) Bestäm polynomens gemensamma komplexa nollställen.

2. $P(x)$ är ett polynom som vid division med x ger resten 5, vid division med $(x-2)$ ger resten 15 och vid division med $(x+2)$ ger resten 3. Vilken rest ger $P(x)$ vid division med (x^3-4x)?

3. Ekvationen $z^4-4z^3+7z^2-6z-10=0$ har roten $z=1+2i$. Lös ekvationen fullständigt.

4. a) Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(2x^2+4x-5)-\ln(x^2-2x+3))$
   b) Bestäm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

5. Bestäm asymptoten till kurvan $y=\dfrac{\sqrt{9x^6+x^5+x}-x^3}{x^2}$ då $x\to\infty$.

6. a) Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{e^{2x}-1}\right)$
   b) Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{e^x-1}}$

7. En talföljd definieras genom $a_0=\dfrac{5}{2}$ och $a_{n+1}=6a_n-a_n^{\ 2}-6$ för $n\geq 0$
   Visa att talföljden är konvergent och beräkna dess gränsvärde.

8. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+2x^2}{1+x}-2x$.

Prov i matematik Alfa 4 åk 3, 8 maj 2008 SB

1. Använd derivatans definition för att bestämma derivatan av funktionerna

   a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ *2 p*

   b) $g(x) = e^{2x+1}$ *3 p*

2. $f(x) = 2\arctan(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \arcsin\dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$

   a) Visa att funktionen är konstant. *4 p*

   b) Bestäm funktionens konstanta värde. *1 p*

3. Följande samband gäller mellan y och x: $y^3 + x^2 y = 2x$

   a) Antag att y är en funktion av x.
   Bestäm $y'(x)$ uttryckt i x och y. *2 p*

   b) Antag nu att x och y är funktioner av t. Beräkna $y'(t)$ om

   $x'(t) = 8$

   $x = 2$ *3 p*

   $y = 2$

4. Visa att $\ln(1+x) \leq \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2(1+x)}$ då $x \geq 0$. *5 p*

5. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x) = \left|x^3 - 3x - 2\right|$ i intervallet $0 \leq x \leq 3$
   5 p

6. Bestäm extrem- och inflexionspunkter samt de intervall där $f(x)$ är konvex.

   $f(x) = \dfrac{5}{3x^4 + 5}$ *5 p*

7. Rita kurvan $y = \dfrac{x^3}{1+x^2} - 2\arctan x$.

   Ange också eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. *5 p*

8. Bestäm, för varje värde på den reella konstanten a, antalet rötter till ekvationen $\dfrac{\ln x}{x^2} = a$

   då $x > 0$ *5 p*

LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
MATA11 Matematik 1α
Lördagen den 19:e april 2008
Skrivtid: 08:00–13:00

Matematikcentrum
Matematik NF

De enda tillåtna hjälpmedlen är skrivdon. Använd institutionens papper, skriv endast på den ena sidan och högst en uppgift på varje papper. Skriv tydligt, ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall och ge tydliga svar. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje papper.

1. Lös olikheten
$$\frac{x-6}{x+2} < 1-x.$$

2. Bestäm det komplexa talet
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^{100}$$
på formen $a+ib$, där a och b är reella tal.

3. Hur många ord på 9 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i ordet

VÅRRULLAR?

4. Polynomet
$$p(z) = z^4-(1+i)z^3+iz^2-(1-i)z+1-i$$
har ett reellt nollställe av multiplicitet 2. Lös ekvationen $p(z)=0$.

5. Sätt $s_1=\sqrt{2}$ och $s_{n+1}=\sqrt{2+s_n}$. Använd t.ex. induktion för att visa att $s_n \le 2$ för alla $n \in \mathrm{N}$ samt för att visa att talföljden $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande. Bestäm $\lim_{n\to\infty} s_n$.

6. Sätt
$$f(x) = \frac{x^2+5}{|x|+2}.$$
Bestäm eventuella punkter, där f har ett lokalt extremum. Bestäm också samtliga sneda asymptoter eller visa att sådana inte finns.

7. Funktionen f är deriverbar och $xf'(x)+f(x) \ge x$ för $x \ge 0$. Visa att
$$f(x) \ge \frac{x}{2} \quad \text{för} \quad x \ge 0.$$