Undervisa C-matematik genom problemlösning. Rapport rörande projekt finansierat av Myndigheten för skolutveckling 2006:649

Andreas Ryve och Pekka Karvonen

1. Namn på kommunen

Västerås Kommun

2. Namn på skolan/skolorna

IT-Gymnasiet Västerås

3. Namn på högskolan/universitet som har varit inblandad i projektet

Mälardalens Högskola

4. Namn på ansvariga för projektet

Pekka Karvonen

5. Mål för utvecklingsarbetet

Både kunskaper och motivation hos elever och studenter som läser matematik tycks minska (t ex Skolverket, 2004). Forskning i matematikdidaktik har som ett av sina främsta mål att stoppa denna trend. Ett sätt som verkar lovande är att undervisa matematik genom problemlösning. Enkelt uttryckt går det hela ut på att elever och studenter skall börja med matematiska problem och utifrån dessa fundera ut, tillsammans med läraren, vilken typ av matematik som behövs. Detta sätt står i stark kontrast till traditionell matematikundervisning som typisk börjar med genomgångar av matematiska metoder och algoritmer för att sedan applicera dessa på matematiska uppgifter. Det står även i stark kontrast till undervisningssätt där eleverna sitter själva och räknar och där matematikläraren överhuvudtaget inte håller några genomgångar. Även om undervisning genom problemlösning verkar lovande så finns det många frågor som forskningen ännu inte har några bra svar på (se Lester och Lambdin, 2004): Vilka typer av problem skall väljas? Hur skall läraren agera? Vilka typer av vägledning skall läraren ge? Hur lyfter läraren fram matematiken? I detta utvecklingsprojekt startar vi en resa att undervisa matematik genom problemlösning genom att beröra några av dessa frågor, i vårt fall genom att studera hur delar av gymnasiekursens C-matematik kan undervisas genom problemlösning. Vi menar att förmågan att lösa problem i allmänhet, och matematiska problem i synnerhet, är en viktig kompetens för gymnasieelever när de skall ta sig an studier på högskolan men också i det vardagliga livet. Dessutom kan man se problemlösning som ett arbetssätt för att eleverna skall utveckla andra kompetenser som begreppsförståelse, räknefärdighet och logiskt tänkande. Utifrån denna inledning kan vi nu formulera det övergripande syftet med utvecklingsprojektet som är att bidra till utvecklingen att elever och studenter tycker matematiken blir mer meningsfull och därigenom också utvecklar bättre matematikkunskaper. Syftet med denna skrift är att delge vår erfarenhet utifrån detta utvecklingsprojekt. Eftersom det är första gången vi prövar detta arbetssätt är vår främsta målsättning inte att fokusera på något specifikt moment utan att mer allmänt reflektera över vilka möjligheter och svårigheter lärare och elever kan ställas inför vid ett sådant arbetssätt.

6. Insatsernas genomförande

Teoretisk ram

I denna sektion presenterar vi viktiga teoretiska idéer som har legat till grund och guidat oss i detta utvecklingsprojekt.

Matematisk kunskap

(Detta stycke bygger mycket på Ryve (2006))

Didaktiska metoddiskussioner är vanliga och nödvändiga. Vi har själva frågat oss och varit med i diskussioner om prioritering av grupparbeten eller tavelundervisning, skriftliga prov eller inlämningsuppgifter, textboksbaserad undervisning eller laborativa övningar för att eleverna skall få kunskap i matematik. Men vad är egentligen kunskap i matematik? Vi hävdar att det är mycket viktigt att först specificerar vad vi vill att eleverna skall lära sig innan vi börjar diskutera hur vi skall undervisa.

Kunskaper i matematik kan diskuteras på olika sätt. Ett sätt är att försöka specificera vilka delar av matematiken som eleverna skall behärska, så att kunna multiplikationstabellen, att lösa ut x ur en ekvation eller definitionen på konvergens. Ett annat sätt att diskutera kunskap i matematik är att försöka bestämma vilka typer av kompetenser eller förmågor som eleven bör behärska, t ex begreppsförståelse eller problemlösningsförmåga. Vilket perspektiv som än väljs bör diskussionerna ta sin utgångspunkt i något slags begreppsligt ramverk som behandlar kunskap i matematik. Detta ramverk kan kanske hämtas från läroplanen, kursplanen eller läroboken. Ramverket skall inte bara ge idéer om vad kunskap i matematik är utan också hjälpa till att strukturera funderingar och diskussionerna kring kunskapsbegreppet.

I denna rapport väljer vi att fokusera på ett ramverk som har som mål att stödja lärare i sådana diskussioner. Just detta ramverk fick oss att se annorlunda på vad kunskap i matematik är. Ramverket är utvecklat för att täcka diskussioner om kunskaper i matematik för elever från förskoleålder till gymnasienivå (Kilpatrick, Swafford, och Findell, 2001). Ramverket kan ses som ett komplement till vad som står i läro- och kursplaner och har fördelen att det kan appliceras på alla typer av matematiska nivåer och ämnesområden.

Tanken är att en bred matematisk kompetens kan beskrivas utifrån fem inbördes relaterade komponenter; begreppsförståelse, räknefärdighet, problemlösningsförmåga, matematiskt-logiskt resonemang och en positiv inställning till matematik.

Begreppsförståelse: En elev som har denna typ av kompetens har en förmåga att se relationen mellan matematiska idéer och procedurer. Eleven har således mer än bara kunskap om olika fakta och algoritmer; eleven vet hur olika begrepp, fakta och algoritmer förhåller sig till varandra och i vilka matematiska sammanhang de är relevanta att arbeta med. En bra indikator på begreppsförståelse är när eleven har förmågan att representera och lösa samma problem på olika sätt.

Låt oss som exempel ta uppgiften att beräkna bråksumman 1/3 + 2/5. Eleven kan kanske lösa problemet med hjälp av sax och papper, använda tallinjen, skapa gemensamma nämnare, omvandla till decimaltal och förstå innebörden av denna transformation eller sätta in uttrycket i en berättelse som sätter uppgiften i ett större sammanhang. Vinster med att utveckla denna typ av begreppsförståelse är att eleverna behöver lära sig färre saker utantill, och att de får större möjligheter att se hur matematik hänger samman på ett vettigt sätt, dvs. att matte inte bara är en hel massa fakta, metoder och algoritmer som används tillsynes slumpmässigt för att lösa problem.

Räknefärdighet: Att lösa matematiska problem kräver en förmåga att räkna - ingen skall komma och hävda något annat. Men räknefärdighet är mer än bara förmågan att kunna utföra enkla beräkningar på beställning. Denna kompetens innefattar att effektivt och precist kunna utföra beräkningar på flera sätt, t.ex. med papper och penna eller med huvudräkning, och även i större sammanhang som t.ex. i samband med meningsfulla problem. Räknefärdighet omfattar också att kunna genomföra överslagsräkningar och bedöma rimligheten hos ett visst svar.

Problemlösningsförmåga: För att förstå problemlösning är det viktigt att skilja på begreppen uppgift och problem. Enkelt uttryck kan man säga att en uppgift är ett problem om eleven inte har en färdig metod att applicera för att lösa den. En typisk uppgift är således de uppgifter som eleverna skall räkna igenom med hjälp av typexemplet som läraren just gått igenom på tavlan.

När eleven innehar en problemlösningskompetens kan de inte bara lösa problem, utan också formulera och representera matematiska problem. Elever skall således kunna formulera matematiskt vettiga problem utifrån vardagssituationer. Vidare kan en elev med problemlösningsförmåga representera problemet på en rad matematiska sätt såsom algebraiskt, logiskt, grafiskt, aritmetiskt osv. Dessutom skall eleven behärska flera olika sätt att lösa problem (jmf. begreppsförståelse). Senare i kapitlet fortsätter vi att diskuterar begreppet problemlösning.

Matematisk-logisk resonemangskompetens: Traditionellt är matematisk-logiska resonemang nära kopplade till matematisk bevisföring. Här skall förmåga till matematisk bevisföring ses som en del av denna kompetens där även mer informella och intuitiva sätt att resonera ingår. Elever med denna kompetens kan argumentera för, och förklara varför, ett svar eller en lösning till ett problem är matematiskt rimligt. Ett exempel på resonemangskompetens är att kunna förklara varför. I resonemangskompetensen ingår också förmågor som att se och använda mönster, använda deduktiva resonemang samt vara kapabel att reflektera över varför en lösning är matematiskt logisk medan en annan inte är det.

Positiv inställning till matematik: Även om det känns ovant är det inte så dumt att se en positiv attityd till matematik som en kompetens i sig, som utvecklas i samspel med de ovanstående kompetenserna. Å ena sidan gör en positiv inställning att det blir lättare att lära sig, å andra sidan ger ökade förmågor det lättare att ha en positive inställning till ämnet och till ens egna förutsättningar att förkovra sig ytterligare. Men elevers attityd till matematik kan även påverkas (förhoppningsvis positivt) av att de får hjälp att se hur kunskap i matematik kan vara användbart för dem både i vardagslivet och i ett framtida yrkesliv. Inställningen till matematik innefattar också att man kan se inte bara ens egen utan också samhällets nytta av matematik.

Ovanstående ramverk är i sig själv inget didaktiskt recept. Som vi argumenterade inledningsvis är det menat att ligga till grund för fundering och diskussioner om vad vi vill att eleverna skall lära sig. För oss ter sig aktiviteten problemlösning extra intressant. Vi fokuserar därför ytterligare på denna kompetens.

Problemlösning

Problemlösning är knappast något nytt inom matematikundervisningen. Eller rättare sagt, uppgiftslösning är knappast något nytt och det har ofta gått under namnet problemlösning. När vi nu skriver om problem och problemlösning menar vi situationer där eleverna inte har en färdig metod att lösa uppgiften med (se ovan). Det måste då t ex fundera ut vad som efterfrågas, vilken metod/metoder som kan vara lämpliga, och förhoppningsvis också reflektera över rimligheten i svaret de producerar. Detta står i stark kontrast till traditionella matematikklassrum där läraren presenterar metoden-för-dagen och eleverna använder den på olika uppgifter.

Wyndhamn et al (2000) har tittat närmare på vilken roll problemlösning har haft i svenska läroplaner. Grov skisserat kan man säga att problemlösningskompetens har gått ifrån att vara något som man har antagit kommer av sig själv till att bli en central del som skall undervisas. På senare år har både forskare och läroplaner betonat att problemlösning kan vara sätt att utveckla andra matematiska kompetenser. Det är de som gör problemlösning så spännande, dels är det en kompetens och dels ett sätt att nå andra kompetenser såsom begreppsförståelse, logiskt tänkande och räkning.

Problemlösningens roll i relation till matematikundervisningen kan sammanfattas enligt

Följande:

- Matematik för problemlösning
- Undervisning om problemlösning
- Matematik genom problemlösning

Att möta ett matematiskt problem kan vara både spännande och frustrerande. Ett sätt att lyckas med problemlösningen är att följa en slag struktur vi lösningsprocessen. Den mest kända av dessa strukturer introducerades av George Polya (1945) och innehåller i grova drag fyra steg: förstå problemet, planera lösningsförfarandet, genomföra lösningen och att kontrollera rimligheten hos svaret.

Avslutningsvis vill vi betona att vårt projekt syftar till att utveckla alla fem kompetenser med ett speciellt fokus på problemlösning. Vi är då både intresserade att eleverna lär sig lösa problem samt att de lär sig matematik genom problemlösning.

Val av problem

Det gäller att hitta matematiska problem som är lagom matematiskt svåra, relativt lätta att förstå vad det går ut på och samtidigt motiverande för eleverna. För oss var det dessutom viktigt att problemen skulle kunna användas som exempel av flera matematiska idéer och metoder längre fram i undervisningen. Vi beslöt att söka problem från de nationella proven. Ett annat sätt kan vara att konstruera egna problem, vilket ger en viss frihet, men det tar också tid. Valet av nationella proven som källa för problem baserades på att vi utgick från att de var väl genomarbetade och dessutom resonerade vi oss fram till att det skulle kunna fungera som extra stimulerande för eleverna att jobba med problem från just nationella prov, eftersom de skulle skriva det senare under våren.

Sedan kommer frågan, hur många problem och hur pass omfattande problem? Aspekter att ta hänsyn till i relation till denna fråga kan vara: Hur mycket tid till just detta moment? Vilka kompetenser och vilken matematik vill vi lyfta fram? Har eleverna tålamod att jobba med ett problem under lång tid? Om ett problem inte fungerar, har vi då reserver att ta till? Hur pass bekymrade blir elever om de inte lyckas lösa problemen?

Ett viktigt övergripande syfte med projektet var att eleverna skulle tycka det var intressant och kul så därför bestämde vi oss för att inte välja de allra svåraste problemen utan fokusera på problem som vi bedömde att de hade en ärlig chans att lösa. Efter många övervägande, i relation till frågorna ovan, valde vi två problem:

Termosproblemet och Gödselproblemet, båda tagna från Nationella kursprov I Matematik kurs C våren 2005.

Termosproblem:

En termos fylls med hett kaffe och placeras direkt utomhus där temperaturen ligger kring noll grader. Temperaturen på kaffet avtar exponentiellt med tiden. Efter 4 timmar är temperaturen 76 grader C och vid samma tidpunkt minskar temperaturen med hastigheten 4,1 grader C per timme.

a) Vilken var temperaturen på kaffet då det hälldes i termosen?

b) Kaffet anses drickbart så länge dess temperatur inte understiger 55 grader C. Hur lång tid efter att man hällt kaffet i termosen är det fortfarande drickbart?

Gödselproblem:

Fältforskninsenheten vi Sveriges Lantbruksuniversistet har undersökt hur mängden kväve i konstgödsel påverkar skördens storlek för olika kornsorter. För kornsorten Baronesse gäller funktionen

$f(x)=0,002x^3-0,81x^2+105,6x+1600 \quad 0\leq x\leq 180$

där f(x) är skördens storlek i kg/hektar och x är mängden tillsatt kväve i kg/hektar.

a) Hur mycket kväve skall tillsättas för att skördens storlek skall bli maximal?

Arbetssätt

Det finns naturligtvis en uppsjö av olika sätt att jobba med ett och samma problem. Skall de arbeta individuellt eller i grupp? Hur lång tid skall de få? Hur skall de redovisa sina lösningar, skriftligt eller muntligt, för läraren och/eller de andra eleverna. Skall de jobba med samma problem eller olika?

Vi bestämde att eleverna skulle jobba i grupper om tre till fyra personer och sedan valde vi ut ett antal grupper som presenterade sina lösningar på tavlan. Motiven för dessa val var att vi tänkte oss att grupparbeten skulle höja motivationen och att presentationen på tavlan dels skulle kunna generera intressanta diskussioner. Dessa val genererar dock följdfrågor: hur skall grupperna sammansättas? Vad skall presenteras på tavlan och hur många grupper? Vad skall vi göra med presentationerna på tavlan? Hur skall de diskuteras och vem skall diskutera dessa, läraren och/eller eleverna? Hur hjälper vi eleverna att fokusera på viktiga aspekter av en lösning? Vad är viktiga aspekter av en lösning? Vi redogör inte här i detalj hur vi resonerade kring dessa frågor utan nöjer oss med att konstatera att det är många val som måste göras och att vissa av dessa frågor får svar längre fram i rapporten.

Genomförande

Stora delar av det som skedde i klassrummet finns videofilmat och redigerat till en 1 timma och 45 minuter lång film, så om Ni har svårt att hänga med i den relativt kortfattade beskrivningen hänvisar vi er till denna DVD som ni kan få genom att kontakta Andreas Ryve på andreas.ryve@mdh.se.

Att introducera problemlösning

Pekka introducerade Polyas fyra steg och dess underkategorier med hjälp av en powerpointpresentation. Detta skedde i två steg, först introducerades den teoretiska delen där Pekka introducerade Polyas idéer för att sedan följa upp med ett exempel som illustrerade de fyra stegen och dess under kategorier. Problemet som användes var: Beräkna arean av ett parallelltrapets där de parallella sidorna är 57 cm och 93 cm och de övriga är 30 cm.

Efter avslutad presentation fick Pekka en spontan applåd, vilket var både glädjande och överraskande.

Det enda som inte gick riktigt bra med presentationen var när en elev kom med förslag på hur man kan beräkna arean på en parallelltrapets och Pekka lyckades inte riktigt fånga förslaget utan höll sig till sin PowerPoint. Händelsen väcker flera frågor: När och varför skall läraren bryta sin röda tråd, bara om förslaget från eleven är bra? Hur fungerar en PowerPoint om nu den röda tråden skall brytas?

Termosproblemet

Termosproblemet var tänkt att fungera som en inledning för studenterna att jobba i grupp med ett större problem (Just här går vi inte in på distinktioner mellan större och rika problem jmf. Haglund, Hedrén och Taflin, 2005). För att konkretisera problemet riggade Pekka en termometer nedsänkt i en kopp med varmt vatten. Termometern var också kopplad till en projektor så att eleverna kunde se temperaturutvecklingen hos vattnet. Den kurva som skapades på tavlan var likt termosproblem exponentiellt avtagande. Alltså, de kunde på tavlan se hur temperaturen utvecklades hos varmtvatten när det stod i rumstemperatur (se gärna vår DVD).

Eleverna jobbade med termosproblemet i ca en timme. Vår uppfattning var att de verkligen försökte lösa problemet men att de hade svårt att komma hela vägen fram. De fastnade på bråkräkning och deriverande men det i sig gör ingenting. Själva idén med matematik genom problemlösning är just att de skall fastna och lära sig matematik i ett lite större sammanhang, i det här fallet i ett större problem. Hypotesen är då att de skall bli motiverade att lära sig matematiken för att komma vidare med det stora problemet. Lektionen avslutades med att Pekka presenterade en lösning till termosproblemet. Pekka var här noggrann med att följa Polyas steg.

Som vi nämnde ovan visade det sig att eleverna fastande på algebraiska räknande så termosproblemet följdes upp med den sk. dubbelskärmsmetoden.

Dubbelskärmsmetoden

Dubbelskärmsmetoden går ut på att Pekka har skapat två PowerPointpresentationer som eleverna får skickade till sina datorer. Den ena innehåller guidning till lösning av termosproblemet medan den andra innehåller övningar i algebraisk räkning. Detta upplägg stämmer bra med tanken att eleverna skall se vad de kan ha algebraiska räkningar till och sedan får möjlighet att öva på dem. Vi tänkte oss alltså att eleverna skulle vara mottagliga för övning i algebraiskt räknande nu när de stött på sådana svårigheter inom ett större problem.

Konkret går det till så att eleverna börjar följa PowerPoint 1 med en mall för lösning av termosproblemet. Inom denna mall skall de utföra algebraiska beräkningar och om de känner sig osäkra på just denna beräkning finns sådana övningar i PowerPoint 2. När de har tränat på PowerPoint 2 kan de sedan försöka på beräkningen i PowerPoint 1 och om de lyckas kan de gå vidare i lösningsprocessen av termosproblemet.

Sessionen gick bra och eleverna alternerade mellan de två PowerPoint presentationerna och övade i huvudsak på bråk- och exponentialräkning.

Gödselproblemet

Gödselproblemet var projektet viktigaste moment där vi verkligen vill prova hur lärare och elever skall jobba med matematik genom problemlösning. Poängen är alltså att eleverna inte skall ha en aning om att det skall derivera funktionen och sätta den lika med 0 för att få ut extremvärdet.

Återigen betonade Pekka att grupperna skulle följs Polyas fyra steg och de fick ett papper där de kunde fylla i hur långt de kommit i förhållande till dessa steg. Reflektioner från deras problemlösning

ger:

- Svårt att följa och dokumentera enligt Polya.
- Fastnade på fel' saker såsom grafräknaren och derivering.
- De jobbade bra.
- Pekka och Andreas fick många frågor, vilket både kan tolkas som positivt och negativt.
- Deras arbete med lösningen tog lång tid.

Gödselproblemet avslutades med att två grupper fick presentera sina lösningar på tavlan och att de andra grupperna fick kommentera. Båda grupperna fick beröm med hade lite svårt att ta till sig kritik. Det är kanske något som måste utvecklas, alltså ett klimat där det känns naturligt att fråga, kommentera och kritisera varandras arbeten.

7. Insatsernas betydelse

Vilken betydelse har projektet och vilka är våra reflektioner i relation till planering och genomförande av undervisning av matematik genom problemlösning?

Val av problem och konsekvenser av detta

Förutom det vi redan visste så måste vi i framtiden noggrant fundera över vilka svårigheter eleverna kan stöta på som inte är huvudproblemet. Alltså, i Gödselproblemet så skulle de lära sig den matematiska idén att derivatan lika med 0 ger ett lokalt extremvärde. De fastade dock på mycket annat och hur skall vi hantera det? Hur mycket skall läraren hjälpa till med att lösa sådana delproblem? Skall läraren på förhand bestämt sig för hur han/hon skall agera i förhållande till frågor som rör del- respektive huvudproblemet? Skall speciella aktiviteter förberedas, typ tvåskärmsmetoden?

Elevernas respons

Eleverna var positiva till projektet och att arbeta med store problem i grupp. Vidare var vi förvånade över hur pass hårt de arbetade under lektionstid. Som nämnts ovan frågade eleverna många frågor och det skulle vara intressant att gå djupare in på vilken typ av frågor de ställer och hur läraren skall svara på olika typer av frågor. Dessa två saker är ju i sig positiva med slutmålet är ju att de skall lära sig matematik. Det är ju som alltid mycket svårt att säga hur mycket det lärt sig, speciellt när det inte finns något att jämföra med.

Eleverna fick sätta betyg på aktiviteterna. Nedan följer en kort sammanställning av medelvärdet där min var 1 och max var 5. Inom parentesen anges frekvensen för varje svarsalternativ från min till max. Från parentesen går det också att utläsa att sammanlagt svarade 14 av eleverna.

Det var kul att jobba problembaserat: 3.36 (1, 1, 5, 6, 1)

Jag har lärt mig mycket: 3.50 (1, 1, 4, 6, 2)

Polyas 4 steg känns som en hjälp vid problemlösning: 3.14 (1, 2, 5, 6, 0)

2-skärmsmetoden var effektiv: 3.21 (3, 1, 3, 4, 3)

Jag har deltagit aktivt: 4.50 (0, 0, 1, 4, 7)

Elevernas arbete och presentation av lösningar:

Som nämnts ovan är vi mycket nöjda med hur eleverna arbetade. Ett viktig del av projektet var även att eleverna skulle presentera sina lösningar på tavlan, vilket de gjorde på ett helt okej sätt. De vi inte riktigt lyckades med var att få igång givande diskussioner kring lösningarna som presenterades på tavlan. Vi hade försökt designa frågor som skulle hjälpa eleverna att kommentera varandras lösningar med de fungerade bara halvbra. Skall vi byta frågor? Skall de få träna på att presentera flera gånger under projektets gång?

Vägar att sprida resultaten

Vi har försökt sprida våra resultat och erfarenheter på olika sätt. Pekka har föreläst och hållit seminarium för bl a Västmanlands och Södermanlands matematikutvecklare, på Rudbeckianska gymnasiet och till våren är Pekka inbjuden till T-konventet i Ystad (se http://www.t-konventet.com/nasta_konvent.htm). Vidare har Skolvärlden (2008) nr. 6 gjort en 4 sidors artikel om projektet vilket har bidragit till spridning och intresse för projektet.

8. Fortsatt utvecklingsarbete

Pekka genomförde samma undervisningsupplägg vårterminen 2008 (se artikel i Skolvärlden 3 april 2008). Pekka upplever att hela projektet flöt på bättre än första gången. Rimliga förklaringar är dels förkunskapen hos eleverna i omgång två som Pekka upplevde som bättre samt att Pekka lärt sig en hel del om och i guidningen av eleverna när de jobbar med matematik genom problemlösning. Pekka planerar att inkludera inslag av matematik genom problemlösning för elever som läser C-kursen i matematik. Rimligtvis går upplägget att applicera på A respektive B-kursen också men hittills har detta inte gjorts.

Som nämnt ovan användes datorer, PowerPoint och Smartboard i projektet. Som en del av vidare utveckling arbetar IT-gymnasiet med integration av PowerPoint och Smartboard i matematikundervisning. Eleverna kan då ladda ned presentationerna innan lektionen men läraren kan vara flexibel vid genomgångarna tack vara Smartboard.

Ytterligare aspekter som projektet har bidragit till är stärkt tilltro till problemlösning i matematikundervisningen vilket tar sig uttryck i form av Polyas fyra steg explicit eller implicit betonas när eleverna ställs inför okända matematiska utmaningar, även om de inte specifikt jobbar men matematik genom problemlösning.

Saker som vi vill undersöka och fundera ytterligare på i förhållande till projektet är:

> Hur skall vi komma runt eller lösa problematiken med att eleverna fastnar på 'fel' saker, alltså grafräknaren, enkla deriveringar och algebraisk räkning? Skall vi försöka lösa detta innan, under eller efter att det jobbat med ett större problem? Som nämndes ovan var detta ett mycket mindre problem i andra omgången men frågan kvarstår på strukturell nivå: Hur agerar läraren när elever stöter på många problem på vägen?
>
> Hur pass viktigt är det att de följer och introduceras till Polyas fyra steg? Hjälper eller stjälper de eleverna. I nuläget lade vi ganska mycket energi på Polyas steg och frågan är om de är optimalt.
>
> Det skulle vara mycket intressant att mer i detalj studera hur läraren skall agera när elever ställer frågor. Hur skall vi som lärare klara av att guida snarare än lotsa? Finns det speciella sätt att formulera frågor som uppmuntrar eleverna att lösa problemen själva eller handlar det mer om vilka normer vi som lärare bidrar till att skapa i det matematiska klassrummet.

9. Ekonomisk redovisning

Andreas: Månadslön (34 000 kr) + sociala avgifter (53%) + högskolegemensamma kostnader + institutionsgemensamma kostnader (35%) = 70 000 kr.

Pekka: kostnader för lärarvikarie (27 500 kr) där Pekka släpper andra terminen i en MaB-kurs för att få tid till detta projekt.

Total summa är då 97500 kr.

Referenser

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academic Press.

Lester, F. K. & Lambdin, D. V. (2004). Teaching mathematics through problem solving. In Clarke, B.,Clarke, D. M., Emanuelsson, G., Johansson, B., Lambdin, D. V., Lester, F. K., Wallby, A., & Wallby, K. (Eds.), *Proceedings of the Midsummer World Mathematics Education Conference, Göteborg, Sweden: National Center for Mathematics Education (NCM):*

International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. (pp 189--204). Göteborg: National Center for Mathematic Education.

Hagland, Hedrén, & Taflin (2005). *Rika matematiska problem - inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Ryve, A. 2006. Vad är kunskap i matematik? *Nämnaren, 33 (2)*, 7-9.

Skolverket (2004) *Pisa 2003 - svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv Pisa 2003 - svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv*. Rapport nr. 254, Stockholm: Skolverket.

Wyndhamn, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköping: Linköpings Universitet.