

Rapport från projektet ”Bevis i gymnasieskolan”

Beskrivning av projektet

En skillnad mellan gymnasieskolan och högskolan är att det inte är så mycket bevis i gymnasieskolan. Leder detta till att studenter tycker bevis är jobbiga och onödiga för deras matematikkunskaper? Hur ser gymnasieelever på bevis? Läser man betygskriterierna för gymnasieskolans matematikkurser så står det för MVG att ”Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.”. I detta projekt vill vi undersöka om elevers attityder kring bevis ändras om de exponeras för ett bevis i veckan. Vi vill också se om elevernas syn på vad matematik är ändras.

Utförande

I projektet deltog två NV-klasser. Projektet började när dessa klasser började i första årskurs och pågick till vårterminen i tvåan. Den ena klassen var referensklass med vanlig undervisning medan i den andra klassen avsattes 20 minuter i veckan till bevis. Båda klasserna hade samma lärare. I tvåan byttes denna lärare ut mot en annan lärare pga annan tjänst.

De 20-30 minuter som ägnades åt bevis utfördes på olika sätt. Ibland gick läraren igenom ett eller flera bevis för klassen och ibland fick klassen arbeta i smågrupper att bevisa enklare matematiska samband. I A-kursen och C-kursen berörde bevisen de avsnitt som för tillfället arbetades med under de vanliga lektionerna, medan B-kursens bevis hämtades från konstruktionsbevis i Euklides Elementa. Som hjälpmedel användes då det dynamiska geometri-programvaran GEONEXT. Eftersom B-kursens bevis kunde ta ganska lång tid under grupparbetena lades två till tre veckors tid ihop för att eleverna skulle få drygt en timme eller mer på sig för ett bevis. Således bevisades inte ett bevis i veckan för B-kursen. I A-kursen användes en annan strategi. Oftast hann inte eleverna med beviset under en lektion på 30 minuter utan vi fick då fortsätta under nästa bevislektion. Det kändes lite hackigt, därav den ändrade strategin i B-kursen.

Läraren och bevisklassen talade med jämna mellanrum vad ett bevis var och varför man hade bevis.

Högskolan kom vid något tillfälle och höll en föreläsning om bevis för bevisklassen och högskolan var behjälplig för läraren att diskutera olika bevis.

Exempel på bevis som behandlades

I A-kursen börjades projektet med att prata om vad bevis var och vad bevis var bra för. Som inledande bevis visades att $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ grafiskt. Vi behandlade potenslagarna som går igenom i A-kursen. Dessa fick grupperna sitta i grupper och bevisa. Andra bevis som togs upp under A-kursen var t ex ett bevis för Pythagoras sats, beviset för att det finns oändligt många primtal och aritmetikens fundamentalsats.

B-kursens bevis ägnades, förutom det bevis som fanns i kursboken, åt Elementa. Vi använde det dynamiska geometriprogrammet Geonext. Det delades även ut samband till eleverna som de skulle bevisa i grupper.

I C-kursen ägnades förutom de bevis som fanns i boken åt t ex att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal och satser innehållande polynomdivision.

Lärarnas upplevelse

Lärare 1 (A, B och D-kurs i bevisklassen samt A och B-kurs i referensklassen)

Det var trögt för eleverna att arbeta med bevis men samtidigt när vi pratade om matematik och bevis så verkade de förstå varför man måste ha bevis och vad de var bra för. Som lärare är man styrd av kursplanen och i den så står det endast i MVG-kriterierna klart uttryckt att eleverna ska kunna utföra bevis. I G står det om gissningar och antagande från bevis och för VG ingenting direkt om bevis. Däremot står det i VG att ”Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.” och ”Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.”. Dessa kvalitéer utvecklas troligen vid övning av bevis.

Som lärare kände jag mig stressad att bevisdelen tog en ganska stor del av veckans schemalagda matematiklektioner. Bevisklassen fick mindre tid på sig att öva på resterande lektionsinnehåll jämfört med den andra klassen. Jag kunde inte se någon matematisk förbättring (i bevisföring eller i annan problemlösning) hos klassen jämfört med den andra klassen. Däremot när man pratade med bevisklassen kunde de redogöra bevisens nytta för matematiken.

Jag kommer inte att avsätta särskild tid varje vecka för bevis däremot kommer jag att trycka mer på varför bevisen är så viktiga för matematiken och jag kommer börja med detta redan i A-kursen. Jag kommer även att dela in eleverna i grupper och låta dem bevisa enklare påståenden/satser. Detta är ett tillfälle att låta eleverna uttrycka sig matematiskt och försöka tänka klart och logiskt och resonera sig fram vilket ingår i betygskriterierna. Ska eleverna bli bättre på bevis och man ska satsa på det tror vi dock det behövs mer tid på matematikkurserna där den extra tiden är avsatt för bevisföring.

Lärare 2 (C-kurs i bevisklassen samt C- och D-kurs i referensklassen)

Jag tycker att det har varit svårt att hinna med att genomföra bevis som inte ligger inom ramen för kurs C. Med anledning av att den kursen redan har snålt med tid. Däremot så är det bra att genomföra de bevis som är kopplade till kursen. De bevis som jag gjorde som var kopplade till kursen tyckte jag var bra för eleverna. Men jag vet inte om det når alla elever.

Jag tyckte att det var svårt att regelbundet använda mig av bevis bara för att vi "skulle bevisa". Men jag kommer däremot att använda mig av de bevis som boken gör och diskutera kring dem på tavlan, även i framtiden.

Jag tror att bevis i lagom mängd är viktigt för eleverna.

Elevernas upplevelse

Efter varje kurs fick eleverna svara på en enkät med frågor var matematik var, hur man kan veta att den stämmer samt vad ett bevis är. Sista enkäten innehöll även frågor om hur själva projektet upplevdes.

Bevisklassens slutomdöme om projektet är varierande med mest positiva och neutrala omdömen. De elever som var mest positiva var överlag de som har högst betyg. Nedan följer några omdömen:

”Man får bättre insikt i matematiken mha av bevisen”

”Ganska svårt och tråkigt”

”Bara det inte tar lång tid att förklara, är det bra”

”Varken eller. Hade klarat mig utan bevis”

”Bra för det mesta, ibland kan det vara konstigt och tråkigt”

”Bra. Jag tycker det är bra att få bevis för formler och hur man kommit fram till dem”

”Ibland har det varit svårt att förstå men för det mesta har det lärt mig att förstå helheten”

”Sådär. Roligt ibland men tog för mycket tid från undervisningen.”

På frågan om till eleverna om de lärt sig något fick också ett blandat resultat men del flesta tyckte de lärt sig något. Nedan följer några omdömen:

” Ja det har lärt mig att förstå uppbyggnaden och grunden för matematiken bättre.”

” Lite, har fått förståelse för varför man kan använda vissa räknesätt och formler.”

”Inte direkt”

” Ifrågasätta saker”

” Man ser samband i matematiken bättre.”

- ” Jag har lärt mig varifrån många viktiga formler kommer ifrån.”
- ” Inte så mycket, men förstår t ex Pythagoras sats, cosinussatsen.”
- ” Inte så det märkts men det går inte att räkna när man inte vet varför man gör sakerna så då har det varit bra.”
- ” Jag tror att man har lärt sig att förstå att det finns en helhet inom allt och att vi har blivit stimulerade att tänka logiskt.”

Vid frågan vad matematik är skiljde sig inte svaren åt varken mellan de olika klasserna eller de olika tillfällena som enkäten gavs. De allra flesta elever ansåg att matematik var problemlösning, siffror, formler, logik och någon skrev ett språk.

Vid frågan hur man kan veta att matematiken stämmer (efter A-kursen) svarade majoriteten i bevisklassen att det var genom bevis medan referensklassen svarade genom miniräknaren, praktiska försök och för någon har sagt så. Några svarade genom logik och en svarade genom tusenåriga teorier.

Efter B-kursen svarade majoriteten av bevisklassen fortfarande att man vet att matematiken stämmer genom bevis på samma fråga men nu svarade även majoriteten av referensklassen det. I B-kursen ingår lite bevis från den klassiska geometrin och därför är det naturligt att tala om bevis med klassen om bevis då och dess betydelse. Det kan också spela roll att sista frågan på enkäten efter B-kursen var vad ett bevis var för något. På denna fråga svarade båda klasserna att det är något som visar att matematiken stämmer.

Efter C-kursen var också svaren liknande i de båda klasserna, båda klasser höll fast vid att man vet att matematiken stämmer för att den är bevisad och på frågan om bevis behövs svarade båda klasserna ja.

Elevernas resultat

Antalet elever som ingår i studien är de elever som varit med i projektet hela tiden. De elever som slutat NV samt de elever som kommit till är inte medräknade. Antalet elever som räknats i resultaten nedan är i bevisklassen 26 stycken i referensklassen och 29 stycken i bevisklassen.

För att göra jämförelse mellan klassernas betyg har jag räknat IG=0p, G=5p, VG=10p och MVG=15p. På de nationella proven finns det vissa uppgifter som visar på MVG-kvaliteter. En uppgift kan visa på flera MVG-kvalitéer. Jag har valt att för varje MVG-kvalité räkna en stjärna (alltså kan samma MVG-kvalitéer ge två stjärnor om de är tagna på olika uppgifter).

Betygsmässigt var bevisklassen lite bättre än referensklassen när de kom till gymnasieskolan. Bevisklassen hade ett medel på 12,31 medan referensklassen hade ett medel på 11,37.

Resultaten som diskuteras nedan är baserat på de nationella proven i slutet av varje kurs.

Karlskrona kommun
Ehrens värdska gymnasiet
Anna Svärd

I Ma A var bevisklassen något bättre än referensklassen om man ser till de Nationella provbetygen, 11,88 mot 10,69, men om man ser till det totala antalet MVG-stjärnor så var referensklassen klart bättre.

Även i B-kursen var bevisklassen något bättre om man såg till de Nationella provbetygen, bevisklassens medel var 9,61 mot referensklassens 8,62. Men i antalet MVG-stjärnor var det omvända förhållandet gentemot A-kursen, bevisklassen var klart bättre än referensklassen.

Under Ma B-kursen skrev klasserna Kängurutävlingen 2003. Bevisklassen lyckades något bättre, med ett medel på 38,3 mot referensklassens 36,6.

I Ma C hade referensklassen något bättre om man ser till provbetygen på de nationella proven (referensklassens medel var 7,5 mot bevisklassens medel på 7,31). Ser man däremot på MVG-stjärnor är bevisklassen mycket bättre, de har mer än dubbelt så många MVG-stjärnor jämfört med referensklassen.

Utifrån dessa iakttagelser kan man inte dra några slutsatser. Bevisklassen har varit lite bättre betygsmässigt från grundskolan upp till Ma B. I Ma C är referensklassen något bättre men det var flera elever i bevisklassen som var på gränsen till ett högre betyg, särskilt MVG, på nationella provet. Ser man dock till deras MVG-kvaliteter så var bevisklassen bättre. Kanske det är så att de har haft nytta av den utökade undervisningen i bevis i detta avseende men att det skett på bekostnad av den allmänna färdigheten?

Slutlig kommentar

Det är svårt att säga om projektet gett något till bevisklassen eller om det skulle gett mer med vanlig problemlösning enskilt och i grupp. Betygsmässigt på det nationella provet i kurs C gick referensklassen om bevisklassen men låg långt efter i antalet MVG-stjärnor. Det var också mer än dubbelt så många elever som fick MVG-stjärnor i bevisklassen än i referensklassen (10 mot 4). Som lärare (lärare 1) tycker jag att eleverna fick en annan bild av matematiken (i alla fall en annan bild tidigare) när man tog in bevisen kontinuerligt i matematiken redan i A-kursen. Det är något jag kommer att fortsätta med även om jag inte kommer att lägga lika mycket tid på bevis som jag gjort nu under projektet. Däremot tror jag inte eleverna fått en annan attityd till matematiken.