

Matematik över gränserna

Ett samverkansprojekt mellan gymnasium och universitet

Gerd Brandell
Institutionen för matematik
Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå

Rapport december 2000

Inledning

Under de senaste åren har det kommit flera rapporter om problem med matematikstudierna i samband med studenternas övergång från gymnasium till högskolan. Det har i första hand gällt ingenjör- och civilingenjörutbildningarna. Högskoleverket (1999) och skolverket (Johansson, 1998) har låtit utreda frågan. I båda utredningarna konstaterar man att det finns ett glapp mellan gymnasium och högskola. Det gäller generellt även om problemen är olika starkt uttalade vid olika högskolor.

Vid Luleå tekniska universitet är det framförallt studenter med betyget tre i matematik enligt det tidigare relativa betygssystemet i gymnasiet som haft svårigheter att klara sina matematikkurser på universitetet. Den slutsatsen dras i en undersökning som gällde civilingenjörutbildningen (Brandell 1999). Samma svårigheter väntar naturligtvis de studenter som har det nya betyget G på gymnasiekurserna. Eftersom denna grupp av studenter utgör en stor och växande andel bland nybörjarna vid högskolan måste deras problem tas på stort allvar.

För att överbrygga gapet mellan gymnasiet och högskolans matematik har gymnasielärare tillsammans med universitetslärare i Luleå genomfört projektet "Matematik över gränserna". I projektet har lärarna gemensamt utvecklat en valbar matematikkurs för elever i år tre på NV-programmet. Syftet är inte att lära ut ny matematik utan i stället att fördjupa förståelsen av tidigare kursers innehåll. Den vänder sig i första hand till elever som inte är specialintresserade av matematik, men som tänker fortsätta med utbildningar som innebär högskolestudier i matematik.

Inriktningen av kursen grundas på projektgruppens bedömning av vilket innehåll som är angelägnast. En universitetslärare som tittar på mål för och innehåll i gymnasiets C- och D-kurser i matematik kan konstatera, att om studenterna verkligen uppnått målen för dessa kurser när de påbörjar sina högskolestudier, så skulle de ha en god grund för att klara första årets kurser i matematik på ingenjör- och civilingenjörutbildningarna. Bättre förståelse av innehållet i B-, C- och D-kurserna betyder troligen mer för att eleverna ska lyckas med sina kommande högskolestudier i matematik än att de klarar godkänt på gymnasiets E-kurs. Därför inriktas kursen framför allt på innehållet i B-, C- och D-kurserna men också på vissa delar av grundskolans kurs och A-kursen.

Bakgrund

Under hösten 1997 kom alarmerande uppgifter om att förkunskaperna i matematik hade försämrats hos nybörjarna vid universitetens institutioner. Detta ledde till att Skolverket gav i uppdrag till Bengt Johansson att utreda frågan. Hans arbete finns redovisat i rapporten *Förkunskapsproblem i matematik?* som presenterades hösten 1998. Högskoleverket fick senare i uppdrag av regeringen att utreda frågan. En bedömningsgrupp tillsattes som avlämnade rapporten *Räcker kunskaperna i matematik?* i februari 1999.

Av båda rapporterna framgår att det finns ett glapp mellan gymnasiet och högskolan då det gäller matematikkunskaperna.

"Det finns stora variationer i förkunskaperna hos dem som börjar högskolestudier inom naturvetenskap och teknik. Det är skillnader mellan olika typer av utbildningar, men det finns också stora variationer mellan studenterna på samma utbildning. Detta gäller både räknefärdigheten i snäv mening, och det som vi i denna rapport har kallat matematisk mognad.

Mycket tyder på att åtskilliga studenter har så svaga förkunskaper att det kan bli svårt för dem att tillgodogöra sig den undervisning i matematik som ges vid universitet och högskolor så som den ser ut idag." (*Räcker kunskaperna i matematik*, s 11)

I båda rapporterna tas strukturen hos och innehållet i gymnasiets kurser upp och ifrågasätts. Bengt Johansson pekar i ett avsnitt på

”Brister i det kursutformade NV-programmets innehåll och struktur och tillhörande brist på tid för undervisningsinnehåll som passar blivande teknologer.” (*Förkunskapsproblem i matematik?* s 25)

I högskoleverkets utredning pekar man också på behovet av nya kurser:

”Innehållet och utformningen av kurs Ma E bör ses över i nära samråd med högskolorna. Man bör pröva om den kan få ett innehåll som utvecklar det som vi i denna rapport kallar matematisk mognad och också blir en syntes av tidigare kurser i gymnasieskolan.” (*Räcker kunskaperna i matematik*, s 70)

En förändring av gymnasiets matematikkurser införs från och med läsåret 2000/2001 då nya kursplaner introduceras (Skolverket 2000). Med de nya kurserna förbättras förutsättningarna att nå ett bra resultat, framförallt genom ökning i kursernas poängtal och genom att nya kurser tillkommit.

Flera av förslagen i de båda utredningarna fick dock inte genomslag i de nya kursplanerna.

På högskolorna och vid universiteten görs också förändringar för att möta studenterna på deras nivå (Högskoleverket 1999). I Luleå genomfördes en stor reform av strukturen av hela civilingenjörsutbildningen 1993. Den baskurs i matematik som då infördes har fungerat relativt väl då det gäller genomströmningen, särskilt de första åren. Men förutsättningarna förändras ständigt. Arbetet med reformering av undervisningsmetoder, arbetsformer och innehåll har pågått kontinuerligt för att upprätthålla kvaliteten (Brandell och Lundberg, 1996, Dunkels, 1996, Brandell och Dahl, 1998, Brandell 1999).

Under läsåret 1998/99 startade fakultetsnämnden vid Luleå tekniska universitet (LTU) en översyn av de obligatoriska baskurserna i civilingenjörsutbildningen. Man beslöt att förnya baskursen i matematik mot bakgrund av att alltför många studenter läsåret 1997/1998 misslyckades med att inhämta kurserna på normal tid. Målet var att överbrygga glappet mellan gymnasium och högskola. Lösningen blev att ge introduktionen och den inledande analysen mer utrymme för att kunna möta den individuella studenten på rätt nivå. Den nya baskursen gavs första gången läsåret 1999/2000, samtidigt som projektet ”Matematik över gränserna” bedrevs. De båda projekten har bedrivits parallellt i tiden och har på så sätt kunnat stärka varandra.

Projektet

En grupp bestående av fyra lärare från Midskogsskolan och två lärare från universitetet har gemensamt planerat och genomfört projektet ”Matematik över gränserna”. Projektgruppens sammansättning redovisas bilaga ett. Av projektgruppens fyra gymnasielärare var tre mer aktiva i arbetet med utvecklingen av kursen genom att de samtidigt undervisade var sin grupp i den nya kursen.

Projektet har haft två delar, dels en elevdel där målet varit att utveckla och ge en valbar kurs för eleverna i sista året på NV-programmet, dels en lärardel med målet att ge lärarna förutsättningar för fortsatt utvecklingsarbete av matematikkurserna på skolan.

Utgångspunkten för elevernas kurs har varit dels de analyser som redovisas i de citerade rapporterna och dels de sammantagna erfarenheterna hos lärarna i projektgruppen.

Det finns stöd för elevdelen av projektets innehåll i forskning. Hiebert (1986) och andra forskare har i analyser som fått stort inflytande på senare forskning visat på sammanhanget mellan procedurkunskap och begreppskunskap och visat att sådana kunskaper ömsesidigt stöder och förutsätter varandra. Problemlösningens centrala roll i utvecklandet av matematisk kompetens har behandlats av många forskare. En av de mest

inflytelserika är Schoenfeld (1985), som i sin egen forskning arbetat med elever på college-nivå.

Projektkursen har utvecklats mot en bakgrund i denna och annan matematikdidaktisk forskning.

Mål för projektet

Det övergripande målet är en bättre överensstämmelse mellan matematiken på gymnasieskolans NV-program och högskolans nybörjarkurser i matematik. Nyckelbegreppen då det gäller elevernas matematiska kompetens är matematisk mognad samt säkerhet och överblick då det gäller metodkunnande.

Målgruppen har varit alla lärare vid Midskogsskolan som undervisar i matematik. Syftet var att lärarna skulle få ökad kunskap om olika aspekter av problematiken kring övergången mellan gymnasieskola och högskola. De skulle ges möjlighet att fördjupa sin kunskap om den kompetens gymnasieskolan faktiskt ger i matematik och de krav högskolan ställer då det gäller nybörjarnas kunskaper, attityder, studieteknik och matematiska mognad.

Målet gäller i första hand projektkursen men inte enbart den. Lärarna skulle också få inspiration och kunskap för att kunna vidareutveckla innehållet och undervisningsformerna i NV-programmets matematik genom att i den nya kursen få tillfälle att pröva eller se exempel på nytt innehåll och delvis nya arbetsformer.

Den valbara kursen

Kärnan i projektet har utgjorts av konstruktion av en valbar kurs (i det följande kallad projektkursen) i matematik för eleverna i gymnasiets årskurs tre på NV-programmet vid Midskogsskolan i Luleå. Kursen gavs under läsåret 1999/2000 inom ramen för projektet. Kursen avser att ge en fördjupning av matematiken på A-D nivån och vänder sig till elever som inte är specialintresserade av matematik eller särskilt duktiga i ämnet men som planerar att fortsätta med utbildningar på högskolan som innehåller studier i matematik. Kursen har utvecklats och undervisats av gymnasielärare och universitetslärare i samarbete. Projektet är avslutat men kursen ges även innevarande läsår, 2000/2001.

Målgruppen för undervisningsinsatsen i projektet var alla elever i årskurs tre år 1999/2000 på NV-programmet som planerade att eventuellt gå vidare till högskolestudier inom naturvetenskap eller teknik, däribland civilingenjörs-, ingenjörs- och lärarutbildning.

Strävan var att arbeta för att eleverna skulle uppnå en mer sammanhängande och fördjupad förståelse av innehållet i de skilda kurserna i matematik på NV-programmet, främst kurserna matematik B, C och D.

Planering och genomförande av projektet, lärardelen

Samarbete mellan gymnasium och universitet

Kontakter finns sedan tidigare mellan skolledning och matematiklärarna vid Midskogsskolan å ena sidan och lärarna vid institutionen för matematik vid LTU å den andra. Möten och besök på respektive institution och auskultation vid undervisningen har genomförts sedan år 1996. Lärare från Midskogsskolan deltar i det seminarium i matematikdidaktik som drivs sedan flera år vid LTU, speciellt då frågor som rör problematiken kring övergången mellan gymnasium och högskola behandlas i seminariet.

Initiativet till projektet kom från LTU. Redan under hösten 1998 togs kontakter mellan projektledaren vid LTU och den lärare som är ansvarig för ämnesutvecklingen i matematik vid Midskogsskolan. Matematiklärarna vid skolan diskuterade inriktningen av projektet vid ett möte i december 1998 och vid ett gemensamt möte med projektledaren och ytterligare

en lärare från LTU i januari 1999. Olika alternativ för ett gemensamt utvecklingsprojekt diskuterades och man beslöt tillsammans att ge projektet den inriktning som det sedan fick.

De fortsatta kontakterna har skett genom en projektgrupp bestående av fyra lärare från skolan och de två lärarna från LTU.

Gemensamma studiedagar och seminarier

Lärarna samlades vid ett antal tillfällen till gemensamma diskussioner och arbete kring följande teman:

- övergången mellan gymnasium och högskola och matematikens roll - analys av problemen utgående från den forskning, de rapporter och undersökningar som gjorts
- målen för och innehållet i matematikutbildningen i gymnasiet och på högskolan, paralleller och skiljelinjer
- mål för den nya valbara kursen i matematik, projektkursen
- innehåll och arbetsformer i projektkursen.

Projektgruppen, bestående av lärare från universitetet och från Midskogsskolan, anordnade en studiedag i juni 1999 (heldag) som den officiella startpunkten för projektet (program och minnesanteckningar i bilaga två). I denna deltog alla Midskogsskolans matematiklärare och flera representanter från universitetets matematiska institution. Under dagen diskuterades och analyserades de svårigheter som studenterna möter vid övergången från gymnasiestudier till högskolestudier i matematik med utgångspunkt från Högskoleverkets och Skolverkets aktuella rapporter om övergången mellan gymnasium och högskola. Dessutom diskuterades mål, innehåll och uppläggning av projektkursen.

En andra studiedag för samtliga matematiklärare på Midskogsskolan genomfördes i november 1999 (heldag, program i bilaga tre). Under denna diskuterades och analyserades projektets resultat så långt. Gymnasielärarna fick tillfälle att auskultera vid föreläsningar och lektioner i baskursen i matematik för civilingenjörer vid LTU. Matematikinstitutionens reformer i de inledande studierna i matematik, som är en anpassning till ändrade förkunskaper bland studenterna vid övergången från gymnasiet, behandlades också. De två initiativen (projektet och den nya baskursen vid universitetet) kompletterar varandra och utgör en utmärkt grund för ökad förståelse och ökade kunskaper om gymnasiets matematikutbildning bland universitetslärarna och vice versa.

Projektgruppen

Projektgruppen har haft ett nära samarbete med täta möte sedan juni 1999, då det detaljerade planeringsarbetet av kursen startade. I juni och augusti beslutades innehållet i stort i projektkursen. De första avsnittet detaljplanerades. Under hela läsåret 1999/2000 då kursen gavs för första gången, träffades projektgruppen i samband med planering och utvärdering av varje avsnitt i kursen, i genomsnitt cirka varannan vecka. Kursmaterialet utvecklades under dessa träffar. En modell som växte fram var ett arbete i fem faser enligt följande:

- fas 1:* probleminventering, analys, diskussion om målet, brainstorming med idéer till innehåll i ett avsnitt
- fas 2:* ett förslag till elevmaterial skrevs av en av universitetslärarna
- fas 3:* möte med genomgång av förslaget och diskussion av uppläggning och detaljer
- fas 4:* materialet användes av eleverna på lektionerna och i hemarbetet
- fas 5:* utvärdering efter undervisningsavsnittet.

Dessutom diskuterades och utvecklades förslag till projekt och laborationer i gruppen. Proven planerades gemensamt. Repetitionsmaterial och de betyggrundande proven utvecklades av gymnasielärarna. Resultaten följdes kontinuerligt upp i hela projektgruppen.

De tre undervisande lärarna hade hand om var sin undervisningsgrupp. Universitetslärarna deltog ibland i lektionerna och fungerade då som extra resurs och kunde ibland komplettera genomgångarna. Detta deltagande motiverades främst av att lärarna skulle få egen erfarenhet av hur kursen fungerade och av elevernas kunskaper och förståelse. Ett annat skäl var att eleverna skulle få tillfälle att få direkt information om högskolematematikens krav och få möta ett delvis annorlunda sätt att se på matematiken.

Planering och genomförande av projektkursen

Mål och målgrupp

Målet för projektkursen formulerades på följande sätt i ansökan till skolverket i februari 1999:

”Kursens mål är att fler elever utvecklar högre grad av matematisk mognad, med syfte att underlätta deras (eventuellt) kommande studier i matematik vid högskolan. Målet är ökad förmåga att

- *kommunicera matematik i tal och skrift*
- *läsa och förstå matematisk text*
- *lösa sammansatta problem*
- *genomföra logiska resonemang*
- *utveckla en förståelse för det egna tänkandet i matematik (metakognition).”*

Förutom dessa övergripande mål var målet för kursen att ge eleverna breddade och fördjupade kunskaper och färdigheter i att lösa problem som bland annat berör förändring och extremvärden hos olika typer av funktioner samt fördjupade insikter i hanteringen av algebra, geometri och trigonometri.

Den nya kursen kallades liksom hela projektet ”Matematik över gränserna”. En viktig drivkraft vid utvecklingen av kursen var behovet av en integration av gymnasie-matematiken. Nuvarande kurssystem är speciellt för matematikämnets del mycket uppsplittrat, vilket är olyckligt. Eleverna behöver i slutet av utbildningen integrera och befästa sina matematikkunskaper för att kunna ha nytta av dem i kommande studier. En kurs med det målet saknas i utbudet av nationellt definierade kurser enligt Lpf 1994.

Övergripande kunskapsmål för projektkursen är att eleverna ska fördjupa sina kunskaper från B, C och D-kurserna och tidigare kurser och få mer sammanhang i sina kunskaper. Centrala mål är att eleverna ska få djupare kunskaper både om hur begreppen hänger ihop och hur metoderna fungerar. Målet är att de utvecklar rikare associationer mellan begreppen. På så sätt får eleverna förutsättningar att skapa en högre grad av syntes av sina tidigare delvis osammanhängande kunskaper.

Målgrupp var alla elever på NV-programmet, oavsett om de samtidigt läser någon annan matematikkurs eller ej. Till skillnad från F-kursen vänder sig den nya kursen mycket tydligt till elever som tidigare inte fått överbetyg på matematikkurserna och som inte är specialintresserade av ämnet. En stor del av dessa elever går vidare till högskolan. Just den gruppen möter de största svårigheterna vid övergången till högskolestudier i matematik. Men kursen riktas även till matematikintresserade elever.

Relationen till övriga valbara kurser

Midskogsskolans valbara matematikkurser inom ramen för det individuella valet framgår av bilaga fyra. Den planerade kursen kommer in som ett komplement till tre andra kurser och har ett annat mål än de övriga.

Kursens organisation och introduktion

Projektet genomfördes som ett individuellt val i matematik i år tre på NV-programmet. Den omfattar 50 poäng. Kursen schemalades med 100 minuter per vecka och med ett sammanhängande pass varje vecka på fredag morgon, totalt 30 sådana lektionspass. Uppläggningsen med ett pass i veckan skulle ge utrymme för längre sammanhängande diskussioner utan tidspress. På så sätt rymdes också laborativa moment och projektarbete inom det ordinarie schemat.

Vid kursstarten fick alla som hade valt matematik som individuellt val i år tre gemensam information under medverkan av en av lärarna från universitet. Han informerade om en del av de problem som eleverna stöter på när de börjar sina matematikstudier vid universitetet. Syftet med kursen är att delvis överbrygga sådana svårigheter och eleverna fick detta mål klargjort både vid valinformationen på våren i år två och vid starten av höstens kurser.

De flesta av eleverna som valde projektkursen läste samtidigt E-kursen i matematik.

Innehåll

Innehållet i kursen har utvecklats successivt under projektet. Innehållsmässigt ligger fokus på moment som är av betydelse i fortsatta studier såsom matematisk analys (funktionslära) med tillämpningar och hantering av ekvationer, rationella uttryck och uttryck som innehåller elementära funktioner.

Projektgruppen utgick från en preliminär plan som innehöll följande moment

- | | |
|--|------------------|
| • <i>Polynom och rationella funktioner</i> | <i>8–10 pass</i> |
| • <i>Ekvationer och olikheter, logik</i> | <i>2–3 pass</i> |
| • <i>Geometri och trigonometri</i> | <i>5–6 pass</i> |
| • <i>Funktionsbegreppet</i> | <i>2–3 pass</i> |
| • <i>Potenser och exponentialuttryck, logaritmer</i> | <i>5 pass</i> |
| • <i>Repetition och reserv, prov</i> | <i>3 pass</i> |

Planeringen var öppen och anpassades efter eleverna men kom med mindre förskjutningar och ändrad ordningsföljd att följa den ursprungliga planeringen.

Kursmaterial

Det material som användes utarbetades under kursens gång i samverkan mellan medlemmarna i projektgruppen. Inför varje lektionspass hade projektgruppen gemensamma genomgångar rörande innehållet. Kursmaterialet skrevs av någon av de två universitetslärarna efter en gemensam diskussion. Materialet delades ut successivt och eleverna samlade det i en kurspärm.

Ett problem för en kurs som har karaktär av repetition och fördjupning är risken att eleverna blir uttråkade genom att den upplevs som en upprepning. För att undvika detta valde projektgruppen att följa en annan struktur än den som matematikkurserna bygger på. Kursen strukturerades utifrån teman som gick tvärs genom tidigare kurser. För varje tema var strävan att starta utifrån det grundläggande och enkla och nå fram till en fördjupning.

Ett exempel på den didaktiska analys som ligger bakom ett avsnitt sammanfattas här. Exemplet gäller det till omfånget största avsnittet, nämligen polynom och rationella funktioner.

Den bärande idén bakom avsnittet polynom och rationella funktioner var att studera temat "rationella tal och uttryck" genom hela skolkursen. Det temat dyker upp första gången i samband med introduktionen av rationella tal (bråk) som görs i skolor fyra och fem och når fram till rationella funktioners egenskaper enligt gymnasiets C- och D-kurser.

Förståelse för rationella funktioner bygger på kunskaper om grundläggande algebra och rationella tal. En didaktisk ledstjärna var att sammanknyta talbegreppet med studiet av rationella funktioner. Många elever har en bristande taluppfattning och osäkerhet om framförallt innebörden i divisionsoperationen. Det blir ett hinder för förståelsen för hanteringen av algebraiska uttryck och för egenskaper hos rationella funktioner. Därför startade avsnittet med en analys av division som en invers operation till multiplikation.

Innehållet av avsnittet bestod av

- rationella tal, grundläggande förståelse för operationer med tal
- räkning med bråk och dubbelbråk
- polynom, analytisk och algebraisk beskrivning
- faktorisering av polynom och teckenanalys
- grafer till polynom och rationella funktioner, växande och avtagande, nollställen och asymptoter

För att uppnå de övergripande målet för avsnittet kunde valet av innehåll säkerligen gjorts annorlunda. Styrande var erfarenheterna av vilka metoder och begrepp som studenterna är mest osäkra på i de inledande matematikstudierna vid högskolan.

Momenten kopplades till varandra. Innehållet är delvis en repetition och fördjupning av moment som behandlats inom kurserna A–D. Samtidigt tillförs nytt stoff, till exempel grafer till polynom av högre grad och asymptoter.

Kursmaterial för varje avsnitt inleds med en relativt kort presentation av de begrepp som avsnittet behandlar. Den är inte fullständig utan förutsätter att eleverna känner igen sig. Betoningen ligger på vissa inslag som lärarna av erfarenhet vet kan vara problematiska. Huvuddelen av materialet består av övningsexempel för arbete under lektionstid och hemma. Även där ligger betoningen naturligtvis på uppgifter som fokuserar begrepp och metoder som är speciellt viktiga och som brukar vålla problem. Materialet är inte tänkt att fungera för självstudier utan används av läraren som komplettering till samtal och genomgångar under lektionerna. Eftersom eleverna inte i allmänhet hade tillgång till tidigare läroböcker, kunde man inte hänvisa till dessa.

Övningsexemplen innebär ibland direkt träning på metoder och begreppsförståelse men har ibland mer undersökande och utredande karaktär. Facit finns inte. Eleverna får under arbetet bekräftelse på om lösningen på en övningsuppgift är riktig genom diskussion i hela gruppen eller i en mindre grupp eller direkt i samtal med läraren.

Arbetsätt

Eleverna var indelade i tre undervisningsgrupper och de tre lärarna hade hand om varsin grupp. Elevgrupperna hade olika intressen och lärarna arbetade naturligtvis litet olika utifrån sina egna och elevernas prioriteringar men gemensamt för alla tre grupperna var att kommunikationen stod i centrum för arbetet under lektionerna.

Kursen rymde flera olika arbetsätt, kommunikativ matematik, grupparbeten, projektarbete, undervisning i dialog med hela gruppen och problemlösning enskilt och i

mindre grupper. Undervisningsgrupperna var ganska små, cirka 15 – 20 elever vilket underlättade ett flexibelt arbetssätt.

Lärarna valde att i stor utsträckning tillsammans med eleverna ”prata” matematik och analysera problemen från flera olika infallsvinklar. Detta gjordes för att förstärka elevernas matematiska tänkande.

Vid varje lektionspass gavs också gott om tid för eleverna att på egen hand eller i grupp lösa övningsuppgifter. En sammanfattning och efterföljande diskussion i hela gruppen gjordes ofta för att bekräfta vilka metoder och tänkesätt som är användbara.

Två gruppuppgifter gavs, en laboration och en teoretisk uppgift. Redogörelse för båda uppgifterna lämnades in och bedömdes. Den teoretiska uppgiften hade formen av ett miniprojekt. Eleverna fick välja mellan två projekt, ”Leksaksprojekten” och ”Cykliden”.

Deltagande i kursen

Under läsåret 1999/2000 läste de flesta eleverna i år tre på NV-programmet den nationella kursen E. De flesta av dem som valde projektkursen läste kurs E parallellt. Femtiofem elever valde att påbörja kursen ”Matematik över gränserna”. Hur valen fördelade sig framgår av tabell ett. Projektkursen har koden Ma 203.

Tabell 1. Valkombinationer för alla elever i NV 3

Valkombination	Antal elever, andel elever av hela gruppen
Ma E, enbart	86 (45%)
Ma 203 och Ma E	45 (24%)
Ma 203, enbart	10 (5%)
Ma F och Ma E	16 (9%)
Ma F, enbart	2 (1%)
Inget val	29 (15%)
Totalt antal elever (summa av grupperna ovan)	188 (100%)

En stor majoritet har valt Ma E. Den kursen har en särställning genom att den är förkunskapskrav på många högskoleutbildningar. Den största gruppen, nästan hälften, har valt enbart Ma E som tillval. Det närmast vanligaste valet är Ma E kombinerat med projektkursen. Nästan en fjärdedel av eleverna valde denna kombination.

Betygsbakgrunden från Ma D har samband med valet av kurser sista året. Hur det spelar in för de olika valbara kurserna framgår av tabell två.

Tabell 2. Betygsbakgrund från matematik D för elever som gjort olika tillval. Totalt 188 elever, där vissa valt mer än en kurs.

Valt kurs	Antal elever med visst betyg från Ma D som valt viss kurs/ ej valt valbar kurs					
	Ej betyg ma D	IG	G	VG	MVG	Alla
Ma E	1 (1%)	15 (10%)	65 (44%)	52 (35%)	14 (9%)	147 (100%)
Ma 203	7 (13%)	4 (7%)	25 (45%)	16 (29%)	3 (5%)	55 (100%)
Ma F	2 (11%)	-	1 (5%)	9 (50%)	6 (33%)	18 (100%)
Ej tillval	21	3	4	-	1	29
Alla som läst Ma D		18 (11%)	72 (46%)	52 (33%)	15 (10%)	157 (100%)
Samtliga elever	31 (16%)	18 (10%)	72 (38%)	52 (28%)	15 (8%)	188 (100%)

Kursen Ma D är förkunskapskrav för Ma E och Ma F och det framgår att den är starkt styrande för valet. Om eleven läst eller inte läst Ma D är nästan helt avgörande för om eleven väljer eller inte väljer en valbar kurs. I stort sett alla som har läst Ma D väljer minst en av de valbara kurserna och de som inte läst Ma D väljer ingen valbar kurs. Några undantag finns.

De intressantaste undantagen är sju elever som ej läst Ma D men som trots det valt att läsa Ma 203. Den gruppen visar att Ma 203 rekryterar delvis andra elever än de övriga valalternativen, vilket var ett av målen med kursen.

Ungefär lika många har läst Ma D men läser inte någon valbar kurs. Ytterligare enstaka undantag finns utöver dessa.

De elever som valt Ma F har klart bättre resultat från Ma D än hela gruppen, vilket beror på att Ma F är en mer krävande fortsättningskurs som rekommenderas elever med intresse för och goda tidigare resultat i matematik.

Eleverna som valt Ma E eller Ma 203 fördelar sig i stort sett proportionerligt över hela gruppen av elever som läst Ma D respektive hela gruppen. Ungefär två tredjedelar av dem som valt Ma 203 har inte överbetyg från Ma D, det vill säga de har antingen G eller IG från Ma D eller har inte läst kursen. En målgrupp var elever som inte har överbetyg på andra matematikkurser. Den gruppen har alltså nåtts.

Fullföljande av kursen

Av de 55 elever som valde kursen och två som tillkom under kursens gång fullföljde 35 elever kursen och fick betyg. Redan efter en termin hade nio elever hoppat av och under vårterminen föll ytterligare 13 elever bort. Totalt fullföljde 35 elever och 22 avbröt av de 57 som valt kursen från början eller hoppat på senare.

I två av undervisningsgrupperna fullföljde de allra flesta eleverna kursen. De flesta av avbrotten gjordes av elever i den tredje undervisningsgruppen. Den bestod helt av elever från en av klasserna som hade en speciell profil på sin utbildning, nämligen en datateknisk specialisering. I den klassen hade från början en större andel av eleverna valt kursen än i de andra klasserna. Dessa elever hade redan genom sitt val av specialisering in-tecknat det ordinarie utrymmet för val och hade därför projektkursen som utökad kurs. Att flera av dem valde att inte fullfölja kursen berodde dels på att den innebar extra arbete men framförallt på att de upplevde att de riskerade ett få betyg på projektkursen som skulle kunna sänka deras meritvärde vid ansökan till högskolan.

I tabell 3 framgår andelen avbrott i de båda grupperna, datateknikerna och övriga.

Tabell 3. Antal och andel elever som fullföljde respektive avbröt projektkursen uppdelat på datateknikklassen och övriga.

	Antal som valde kursen	Antal och andel av dessa som fullföljde kursen
Datateknikgruppen	21	5 (24%)
Övriga klasser	36	30 (83%)
Samtliga	57	35 (61%)

Förutom skälet med betygsmeriterna fanns andra skäl för avbrotten, som kom fram i samtal med lärarna och i enkäten vid kursens slut. Ett par elever upptäckte att kursen inte var nödvändig därför att de redan tyckte sig kunna stoffet, någon ville ha sovmorgon, någon hade haft fel förväntningar, någon tyckte att det blev tungt med fler matematikkurser.

Har avbrotten samband med förkunskaperna såsom de mäts av betyget på Ma D? Eftersom avbrotten hade ett speciellt skäl för datateknikgruppens elever, så visas i tabell 4 sambandet mellan betyg på Ma D och antal och andel som fullföljde för de övriga eleverna.

Tabell 4. Antal och andel elever som fullföljde projektkursen uppdelat på grupper av elever med visst betyg från Ma D, 36 elever som inte tillhör datateknikgruppen.

Betyg Ma D	Antal som valde kursen	Antal och andel av dessa som fullföljde kursen
IG eller ej läst Ma D	9	6 (67%)
G	13	11 (84%)
VG	10	9 (90%)
MVG	4	4 (100%)
Samtliga	36	30 (83 %)

Som framgår av tabellen finns ett positivt samband mellan betyget på Ma D och fullföljandet av kursen, men det är inte någon stor skillnad mellan grupperna med godkänt betyg från Ma D. Även i gruppen som inte läst Ma D så har två tredjedelar fullföljt kursen.

Bedömning och betygssättning

Kursen betygsattes. Två prov av traditionell typ var betygsgrundande, det ena i slutet av höstterminen, det andra i slutet av vårterminen. Dessutom gavs betyg på projektrapporterna, som skrevs i grupp och det räknades in i betygsunderlaget. Betygsfördelningen för de elever som fullföljde kursen framgår av tabell 5.

Tabell 5. Betygsfördelning på projektkursen, 35 elever som fullföljde kursen

Betyg	Antal och andel elever
IG	3 (8%)
G	11 (31%)
VG	8 (23%)
MVG	13 (37%)

Allmänt sett finns starka samband mellan betygen på de olika matematikkurserna på gymnasiet. Det gäller elever på NV-programmet liksom på andra program. Ett sådant

samband finns också för betygen på projektkursen när resultaten på den jämförs med resultaten på Ma D och Ma E. Det visas i tabell 6 och 7.

Tabell 6. Samband betyg på Ma D och betyg på projektkursen.

	Antal elever med visst betyg projektkursen			
	IG	G	VG	MVG
Betyg Ma D				
IG eller ej läst Ma D	3	2	1	
G		5	6	1
VG		4	1	8
MVG				4
Alla	3	11	8	13

Tabell 7. Samband betyg på Ma E och betyg på projektkursen

	Antal elever med visst betyg på projektkursen			
	IG	G	VG	MVG
Betyg Ma E				
Läser ej Ma E	3	2		
G		8	6	
VG		1	2	8
MVG				5
Alla	3	11	8	13

Eleverna har samma eller ett steg högre betyg i projektkursen än i kursen Ma E, medan bilden är litet mer splittrad vid en jämförelse mellan Ma D och projektkursen.

Jämförelse med kontrollgrupp

I utvärderingen ingick två diagnostiska test som genomfördes bland alla elever i år tre som läste kursen Ma E och/eller projektkursen. De båda testen gjordes jämförbara på uppgiftsnivå. Innehållet inriktades på sådana kunskaper och sådan kompetens som ger en god grund för högskolestudier och behandlade moment som grundläggande aritmetik och algebra, trigonometri, linjära funktioner och problemlösning, allt material från grundskolans kurs och från kurserna A, B, C och D. Vissa uppgifter i provet valdes med avsikt att vara nära besläktade med vissa uppgifter som används vid diagnostiska test vid början av högskolestudierna.

Test ett gavs i början av höstterminen 1999 och test två i slutet av vårterminen 2000. Försöksgruppen, bestående av elever som valde och fullföljde projektkursen jämfördes med de övriga som fick utgöra en kontrollgrupp. Alla elever deltog inte i det andra testet och för vissa som deltog noterades inte det individuella resultatet. Av försöksgruppens 33 elever deltog 18 i båda testen med dokumenterade resultat, av övriga 151 elever 40.

Maximumpoängen på båda testen var 22 poäng. Resultatet var att 18 elever i försöksgruppen i genomsnitt höjde sin medianpoäng från 8 poäng till 13 medan 40 elever i kontrollgruppen höjde sin från 6 till 8 poäng. I båda grupperna var spridningen stor. Den individuella förbättringen låg klart högre hos försöksgruppen. Medianen för förbättringen låg på 4 poäng i försöksgruppen och på 1,5 i kontrollgruppen. Den nedre kvartilen för

förbättringen hos försöksgruppen låg på 3 poäng, medan den övre kvartilen för kontrollgruppen låg på samma poäng.

Resultatet visar tydligt att försöksgruppen genom att läsa projektkursen hade fått tillfälle att befästa och fördjupa sådana kunskaper från tidigare kurser, som är särskilt viktiga för högskolestudierna. Kontrollgruppens elever läste alla kursen Ma E. De fick genom den kursen uppenbarligen inte samma utrymme för att stärka kunskaperna som hör till tidigare kurser.

Projektkursen hade ju det uttalade målet att repetera och fördjupa kunskaper från tidigare år så resultatet är i och för sig inte oväntat. Men det är viktigt att notera att resultatet visar att det faktiskt är möjligt att genom undervisning i sista året på gymnasiet reparera en del brister och svagheter som uppkommit långt tidigare.

Vad tycker eleverna?

Attityden till kursen har från eleverna varit övervägande positiv. Eleverna var stolta över att de fick arbeta med material utarbetat av universitetet. De kände att de fick kunskaper som de andra eleverna inte hade, samt att förståelsen för det egna matematiska tänkandet stärktes.

Vid kursens slut fick eleverna besvara en enkät. 36 elever besvarade den, framförallt elever som då fortfarande läste kursen. Svandsandelen bland dessa var hög. I bilaga fem finns enkätfrågorna och svarsfrekvensen på alla frågor med fasta svarsalternativ.

Några kommentarer får illustrera den positiva helhetsbedömning de flesta elever gör:

Den (kursen) är väldigt pedagogisk.

(Kommentar till "Det här tycker jag speciellt bra om i kursen.")

Allt har varit i stort sett lyckat.

(Kommentar till "Det här tycker jag inte var så lyckat")

Kursen har varit mycket bra. Jag har lärt mig mycket. Jag känner mig mer förberedd på universitetsstudier.

Bra kurs! Tur att jag gick den. Man har bättre koll på hur man ligger till i matte.

Jag tycker den var bra. Det är första gången som jag verkligen förstått matte som jag lärt mig. Det har varit intressant.

(Kommentar till "Övriga synpunkter – skriv fritt vad Du tycker om kursen.)

Många elever lämnade svar på de öppna frågorna. Några är speciellt intressanta för den samlade utvärderingen och den fortsatta utvecklingen av projektkursen. Här redovisas endast de svar som gäller hur kursens centrala mål uppnåtts och hur kursmaterialet fungerat. Det kom också fram många intressanta synpunkter och förslag som gäller innehåll och organisation av kursen, arbetsätt och rekryteringen till kursen.

Temat som återkommer i många av svaren är följande:

- Djupare förståelse
- Repetitionen
- Kursmaterialets utformning

Många svar kretsar kring den fördjupade förståelse som kursen givit. Exempel på sådana svar är följande:

Den (kursen) har gett mig bättre förståelse för många områden inom matematiken.

(Kommentar till "Det här tycker jag speciellt bra om i kursen.")

Att man lär sig komma ihåg vad man lärt sig.

Nu förstår man varför man gör vissa saker, tidigare har man inte hunnit lära sig utan man har gjort allt utan att begripa varför.

Litet mer djupgående.

*Att den har inga begränsningar, olika sorts matte blandas och kombineras.
I den här kursen fick man förklaring till många obegripliga formler.
Tempot är inte lika snabbt. Man hinner tänka efter mer.
Mycket bättre förklaringar av samband som gett ökad förståelse.
Denna kurs har gått litet mer på "djupet". Andra mattekurser är väldigt "ytliga".
(Svar på frågan "Vilken är den viktigaste skillnaden mellan denna kurs och andra mattekurser?")*

Vissa av kommentarerna kan uppfattas som indirekt kritik mot andra matematikkurser. Det uppdrivna tempot i speciellt C- och D- kurserna är en synpunkt som kommer fram från många elever.

Den bättre förståelse som många tar upp hänger naturligtvis samman med att man nu repeterar och alltså bygger vidare på tidigare kunskaper. Att repetera tidigare kurser har varit positivt anser många. Exempel på kommentarer med den innebörden är följande:

*Man lärde sig inte så jättemycket nytt om det var tanken eller ej, men bra repetitionskurs.
Lärorikt och nyttigt med repetition av större delen av gymnasiekursen.
(Kommentar till betygssättningen av hela kursen av två elever som givit högsta betyg 3: Kursen är bra och behöver bara mindre justeringar)
Bra repetition med litet fördjupning. Jag har lärt mig mycket.
(Kommentar till "Det här tycker jag speciellt bra om i kursen.")
Denna kurs har varit nyttigare, kanske för att det var en repetitionskurs.
Den här bygger på det man redan läst.
(Svar på frågan "Vilken är den viktigaste skillnaden mellan denna kurs och andra mattekurser?")*

Uppfattningen om kursmaterialet varierar. Kritiken riktar in sig på att det inte är fullständigt och att det varit besvärligt med alla lösblad.

*Men det skulle varit bra att ha en bok eller något slags text till så man kan läsa sig till det man ej förstår.
(Kommentar till frågan "Hur fungerade kursmaterialet?" av en elev som svarade "Mycket bra".)
Dåligt med lösblad.
(Kommentar till frågan "Hur fungerade kursmaterialet?" av en elev som svarade "Mycket dåligt".)
Avsaknaden av ordentlig kurslitteratur.
(Kommentar till betygssättningen av hela kursen av en elev som givit betyg 2: Kursen är i stort sett bra men behöver omarbetas på en del punkter.)*

Systemet med lösbladen är naturligtvis möjligt att hantera annorlunda i fortsättningen, då en stomme till kursmaterial finns tillgängligt redan från början. Dock ger systemet utrymme för flexibilitet som är positiv. Några elever uttrycker uppskattning av lösbladssystemet.

Att arbeta utan facit har varit ovant och majoriteten av eleverna önskar att få ett facit, som är speciellt viktigt att ha när man repeterar. Många elever kommenterade detta:

*Hur kan man förväntas träna till ett prov med en massa lösa blad utan svar till. Hur vet man att man gör rätt?
(Kommentar till betygssättningen av hela kursen av en elev som givit högsta betyg 3: Kursen är bra och behöver bara mindre justeringar)
Man kan inte gå tillbaka och kolla hur man gör.
Man vill kunna se om man gör rätt.
Möjligt att jag inte litar på mina kunskaper, men jag saknade möjligheten att direkt kontrollera om jag gjort rätt.
(Kommentar till frågan "Vad tycker Du om att det inte fanns något facit?" av elever som svarat "Det är en stor nackdel")*

Men det finns några elever som ger uttryck för en annan syn:

Det är nog litet bättre ibland att inte ha facit så att man inte är helt beroende av facit. Men litet dåligt när man jobbar hemma inför prov.

(Kommentar till frågan "Vad tycker Du om att det inte fanns något facit?" av elever som svarat "Det spelar ingen roll")

Man går ej direkt till facit utan tänker själv.

Så får man en riktig genomgång på hur man verkligen gör.

(Kommentar till frågan "Vad tycker Du om att det inte fanns något facit?" av elever som svarat "Det är en fördel")

En kompletterande uppföljning planeras med de elever som läste projektkursen och som påbörjar högskolestudier i matematik under läsåret 2000/2001, med intervjuer i någon form. Frågan om betydelsen av kursen som förberedelse till högskolestudierna kan då ställas och få en individuell och konkret belysning.

Utvärdering av projektet, lärardelen

Projektgruppen har haft ett mycket nära samarbete under mer än ett läsår. De har tveklöst utvecklat sin kunskap om och ömsesidiga förståelse för elevernas och studenternas situation på gymnasiet respektive universitetet.

Gymnasielärarna har fått konkret kunskap om vilka ämnesmässiga prioriteringar man önskar från universitetet och motiveringarna för dessa utifrån de krav på begreppsförståelse och metodkunskap som fortsatta matematikstudier ställer.

Universitetslärarna å sin sida har fått en levande förståelse för elevernas svårigheter med begreppsbyggnaden och vilka luckor som finns i kunskaperna från grundskolan. De har också fått se vilka begränsningar som finns i dagens gymnasieskola för elevernas lärande. Ett konkret exempel är lärobokens roll. Kommunen låter inte eleverna behålla läroböcker från tidigare matematikkurser, vilket blir ett hinder för de elever som önskar att förankra nytt innehåll i tidigare kurser. En anknytning bakåt är absolut centralt i matematiken där begreppen bygger vidare på varandra.

Övriga matematiklärare på Midskogsskolan har naturligtvis i mycket mindre grad påverkats av projektet. De har dock haft en inblick i projektet och kunnat påverka det under studiedagar och möten. De har fått kunskap om hur lärarna på universitetet ser på problemen både genom studiedagarna och genom informella kontakter. Om projektet får en fortsättning genom ett aktivt arbete med kursutveckling på gymnasiet kan man bygga på en viss gemensam förståelse i frågan om övergångsproblematiken. En möjlighet att sprida erfarenheterna vidare är naturligtvis att låta andra lärare undervisa på projektkursen kommande år.

Med de nya kursplanerna som införs från läsåret 2000/2001 får man möjlighet att utveckla kurserna. Vid utformningen av utbudet av valbara kurser, liksom i planeringen av de obligatoriska kurserna, kommer lärarna att bygga på erfarenheterna från projektet.

Presentation av projektets resultat

Projektet har presenterats vid matematikbiennalen i Göteborg i januari 2000 vid ett välbesökt seminarium. Det kommer också att presenteras vid en studiedag som planeras till februari 2001. Till den inbjuds lärare från gymnasierna i orter som ligger nära Luleå.

En utvidgad rapport kommer att tryckas i en rapportserien Didaktik och tillämpningar som ges ut vid institutionen för matematik vid LTU i början av 2001.

Kursmaterialet kommer samtidigt att läggas ut på nätet och är fritt att använda för de lärare vid andra gymnasieskolor som önskar.

Behövs kursen?

I de nya kursplanerna har poängen för kurserna matematik A-D totalt ökat från 250 till 350 poäng. Om man väljer att satsa den utvidgningen på att arbeta mot de mål som projektkursen haft kan situationen förbättras. Frågan uppkommer då om behovet av en kurs som projektkursen i så fall minskar. I projektgruppen har vi gjort den bedömningen att projektkursen kommer att vara ett viktigt inslag även framöver och det av flera skäl.

Först och främst är poängtal inte detsamma som undervisningstid och ökningen av tiden för kurserna blir inte lika stor som den formella ökningen av poäng. Dessutom väntar sig gymnasielärarna nya svårigheter för nybörjarna på NV-programmet med brister i kunskaper i till exempel grundläggande algebra från grundskolan. Mer av tiden i kurserna måste troligen ägnas förstärkning av kunskaperna från grundskolan.

I Skolverkets beslut finns en valbar kurs som kallas breddningskurs, som har liknande målsättning som projektkursen. Större delen av innehållet i projektkursen kan användas i en breddningskurs och vår rekommendation är att använda breddningskursen för att introducera en kurs liknande projektkursen ”matematik över gränserna”.

Sist och inte minst viktigt är att en sammanfattande och övergripande kurs är viktig för att motverka den uppsplittring mellan kurserna som ger många elever en alltför ytlig inläring.

”Matematik över gränserna” har en tydlig inriktning mot högskolestudier. För många elever som går vidare till högskolestudier och som inte väljer matematik F på gymnasiet, bör en sådan kurs vara till stor hjälp för att minska klyftan mellan gymnasium och matematikstudier vid högskolan.

Sammanfattning

Projektet ”Matematik över gränserna” har givit en ökad förståelse för de problem många elever möter vid övergången från gymnasiet till högskolestudier i matematik. Projektet har visat att glappet mellan gymnasium och högskola kan minskas genom en extra kurs sista året. Många elever önskar läsa en kurs under sista året i gymnasiet där man samtidigt repeterar, fördjupar och vidareutvecklar tidigare matematikkunskaper. Att en sådan kurs är möjlig att utveckla och ge med gott resultat visas av projektet. Kursen har fungerat bra för elever med skiftande bakgrund från tidigare matematikkurser.

Kursen har förutom gymnasiematematik behandlat också mycket grundläggande metoder och begrepp från grundskolan. Trots det har den inte legat på en låg nivå, utan dessa grunder har givit en bas för att bättre förstå centrala begrepp i exempelvis funktionsläran.

Samarbetet mellan gymnasielärare och universitetslärare har fungerat utomordentligt bra och givit båda parter nyttiga erfarenheter och kunskaper om hur eleverna/studenterna upplever matematikstudierna på gymnasiet och övergången till högskolestudier.

Planeringen av uppläggning av och innehåll i rapporten gjordes tillsammans med Harry Hanse, Luleå tekniska universitet, Urban Amrén, Eva Johansson och Britt-Marie Svensson, Midskogsskolan. Alla ingick i projektgruppen och de tre senare undervisade i kursen ”Matematik över gränserna”. Utan deras medverkan kunde inte rapporten ha skrivits.

Skolverket har bekostat projektet inom ramen för stödet till kompetensutveckling 1999. Projektgruppen tackar för detta stöd utan vilket projektet inte kunnat genomföras och för stöd från Luleå kommun.

Referenser

- Brandell Gerd och Lundberg Jonas. (1996) *Föreläsningar och smågrupper. En studie av en pedagogisk försöksverksamhet*. I rapportserien Didaktik och tillämpningar, Institutionen för matematik, Luleå tekniska universitet.
- Brandell Gerd och Dahl Erlend. (1998). *Utvärdering av undervisningsformer. Grundkursen 97/98*. Intern rapport daterad 16 juni 1998. Institutionen för matematik. Luleå tekniska universitet.
- Brandell Gerd (1999). *Förkunskaper och studieresultat i matematik hos Luleås civilingenjörstudenter. Rapport från två undersökningar av nybörjarna vid universitetet*. I rapportserien Didaktik och tillämpningar, Institutionen för matematik, Luleå tekniska universitet.
- Dunkels Andrejs. (1996) *Contributions to mathematical knowledge and its acquisition*. Högskolan i Luleå
- Hiebert, J. (Ed). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.
- Johansson Bengt. (1998) *Förkunskapsproblem i matematik*. Skolverket
- Högskoleverket. (1999) *Räcker kunskaperna i matematik?* Bedömningsgruppen för studenternas förkunskaper i matematik
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Bilagor

1. Förteckning över projektgruppens medlemmar (1 s)
2. Program och minnesanteckningar från studiedag 1999-06-08 (9 s)
3. Program för studiedag 1999-11-01 (2 s)
4. Kursplan för projektkursen, Midskogsskolan, läsåret 1999/2000.
5. Elevenkät maj 2000 med svarsfrekvenser. (4 s)

Bilaga 1

Projektgrupp

LTU, Luleå tekniska universitet

Gerd Brandell
Harry Hanse

projektledare, universitetslektor i matematik
universitetsadjunkt i matematik, fil. lic.

Midskogsskolan

Lennart Lantto

adjunkt i matematik och fysik, projektansvarig vid
Midskogsskolan

Britt-Marie Svensson

adjunkt i matematik och fysik, undervisande lärare
på projektkursen

Urban Amrén

adjunkt i matematik och fysik, undervisande lärare
på projektkursen

Eva Johansson

adjunkt i matematik och fysik, undervisande lärare
på projektkursen