

Matematik över gränserna

Bifogade sidor innehåller en del av det material som användes i kursen. Kursmaterialet finns att hämta på nätet via en länk från www.sm.luth.se/~harry/.

Kursmaterialet gör inte anspråk på att utgöra någon fullständig lärobok, utan har karaktär av arbetsmaterial som kompletterar annan litteratur och undervisning. Det läggs ut på nätet i en preliminär version som kommer att utvecklas.

Du är välkommen att använda materialet och vi tar tacksamt emot synpunkter på innehållet och utformningen.

Gerd Brandell

Harry Hanse

Räkning med rationella tal och bråk

Rationella tal är tal som kan skrivas $\frac{a}{b}$ där a och b är heltal (**Obs** $b \neq 0$), t ex $\frac{3}{7}$. I grundskolan lär man sig att tolka $\frac{3}{7}$ t ex som att 7 personer ska dela 3 tårter lika mellan sig; $\frac{3}{7}$ tårter är då vad varje person får. Detta kan uttryckas med en ekvation. Om x är den mängd tårter som varje person får när de 3 tårtorna delas lika mellan 7 personer, så måste $7x = 3$. Detta är ett matematisk fruktbart sätt att se på saken:

$$(1) \quad \boxed{x = \frac{a}{b} \quad \text{är lösningen till ekvationen} \quad bx = a}$$

Med hjälp av (1) kan man ta fram regler för hur man räknar med bråk och förstå hur bråk uppför sig.

Exempel 1. (Förkortning): $\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}$
ty om $x = \frac{a}{b}$ så är $bx = a$. Multiplikation av båda leden med c ger $cbx = ca$, vilket enligt (1) betyder att $x = \frac{ca}{cb}$. Alltså är $\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$

Uppgift 1. Förkorta följande bråk så långt som möjligt.

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \frac{8}{12} & \text{b) } \frac{60}{800} & \text{c) } \frac{a^3b^4}{a^3b^3} & \text{d) } \frac{15a^2b^6}{18a^5b} & \text{e) } \frac{ax+ay}{ab+ac} & \text{f) } \frac{ab-ac}{bx-cx} & \text{g) } \frac{4a+4a^2}{6a^2-8a} \\ \text{h) } \frac{2(a+b)}{a^2-b^2} & \text{i) } \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} & \text{j) } \frac{ac-bc-a+b}{a^2-b^2} \end{array}$$

Uppgift 2. Undersök med hjälp av (1) vilket tecken $\frac{a}{b}$ har då

- a) a och b båda är positiva. b) a och b båda är negativa.
c) a är positiv och b är negativ. d) a är negativ och b är positiv.

Exempel 2. (addition av rationella tal): $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Om $x = \frac{a}{b}$ och $y = \frac{c}{d}$ så betyder det enligt (1) att $bx = a$ och $dy = c$. Multiplicera den första av dessa ekvationer med d och den andra med b . Då får vi

$$dbx = da \quad \text{och} \quad bdy = bc$$

Addition ger $bdx + bdy = ad + bc$. Vi bryter ut den gemensamma faktorn bd i vänsterledet och får $bd(x+y) = ad+bc$, vilket enligt (1) betyder att $x+y = \frac{ad+bc}{bd}$,

$$\text{dvs } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Uppgift 3. Skriv nedanstående uttryck på gemensamt bråkstreck (förenkla om det går!).

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{2}{3} + \frac{3}{2} & \text{b) } \frac{3}{2} - \frac{3}{8} & \text{c) } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} & \text{d) } \frac{3a^2}{a+b} - \frac{3b^2}{a+b} \\ \text{e) } \frac{x}{a} + \frac{x}{b-a} & \text{f) } 1 - \frac{m}{m+1} & & \\ \text{g) } \frac{4}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3}{a} + \frac{5}{b} & \text{h) } \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a}{(a+1)^3} & \text{i) } \frac{3x}{x^2-y^2} - \frac{2}{x+y} & \text{j) } \frac{b}{a^2+ab} - \frac{a}{ab+b^2} \\ \text{k) } \frac{5}{x-1} - \frac{8}{x+1} + \frac{3x+7}{x^2-1} & \text{l) } \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+4} & & \end{array}$$

Uppgift 4. Undersök med hjälp av (1) om det går att bestämma värdet av uttryck som $\frac{1}{0}$ och $\frac{0}{0}$. Motivera ditt svar!

Exempel 3. Vad menas med $\frac{a}{\frac{b}{c}}$? Om $x = \frac{a}{\frac{b}{c}}$ så är enligt (1) $cx = \frac{a}{b}$. Men enligt (1) betyder detta att $bcx = a$, vilket i sin tur (återigen med användning av (1)) innebär att $x = \frac{a}{bc}$.

Uppgift 5. Observera att man måste vara noga med att skilja på $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ och $\frac{\frac{a}{b}}{c}$.

a) Visa med hjälp av (1) att $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$

b) Förenkla $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

Uppgifter för kursen MA503.

Faktorisering av polynom.

Faktorsatsen: Om $p(x)$ är ett polynom och $p(a) = 0$ så är $x - a$ en faktor i $p(x)$, dvs det finns ett polynom $q(x)$ så att $p(x) = (x - a)q(x)$.

Exempel: Om $p(x) = 2x^2 - x - 6$ så är $p(2) = 0$. Enligt factorsatsen är $x - 2$ en faktor i $p(x)$ och $p(x)$ då skrivs $p(x) = (x - 2)q(x)$. Man finner lätt (hur?) att $q(x) = 2x + 3$, dvs $p(x) = (x - 2)(2x + 3)$.

Exempel: Faktorisera $2x^2 - 3x + 1$.

Lösning: Lösning av 2:a gradsekvationen $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ger rötterna $x = 1$ och $x = \frac{1}{2}$. Alltså är både $x - 1$ och $x - \frac{1}{2}$ faktorer i $2x^2 - 3x + 1$, varav vi kan dra slutsatsen $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - \frac{1}{2})$ (varför måste faktorn 2 vara med?).

Uppgift 6. Faktorisera

- a) $x^2 + x - 2$ b) $3x^2 + 17x + 20$ c) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ d) $2x^3 - 4x^2 + x - 2$
e) $x^3 - 8$ f) $x^3 - y^3$ g) $x^3 + x^2a - xa^2 - a^3$ h) $x^4 - a^4$

Uppgift 7. Undersök om $x + 1$ är en faktor i

- a) $x^3 + x + 2$ b) $x^5 - x^4 + 2x^2 - x + 1$ c) $x^{44} + x^6 + x^2 + 5x + 2$

Uppgift 8. Förkorta följande bråk så långt som möjligt

- a) $\frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 2x - 1}$ b) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$ c) $\frac{x^3 - a^3}{x^3 - xa^2}$ d) $\frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2 + x}$ e) $\frac{12x^2 - 3}{12x^2 + 6x}$
f) $\frac{ax + bx + ay + by}{ay + by - ax - bx}$ g) $\frac{a^2b - b + 2a^2 - 2}{a^3 + 1}$ h) $\frac{a^2 + b^2 - 2ab - c^2}{a^2 - b^2 - 2bc - c^2}$

Uppgift 9. Förkorta $\frac{x^2 + ax - 2a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2}$ så långt som möjligt.

(Tips: Vad får du om du sätter $x = a$?)

Räkning med bråk och dubbelbråk.

Vid räkning med dubbelbråk är det viktigt att hålla reda på vad som är "huvudbråkstreck".

Observera skillnaden mellan $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$ och $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$

Uppgift 10. Förenkla nedanstående uttryck

- a) $\frac{6z^4}{\frac{35u^3}{2z}}$ b) $\frac{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^3}{\frac{a^5}{b^7}}$ c) $\frac{\frac{a^2 + 4a + 4}{c^4}}{\frac{a + 2}{c^3}}$ d) $\frac{ab + a}{b - 1} \bigg/ \frac{b^2 - 1}{a}$
e) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{a - b} + 1\right)$ f) $\left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{3a}{a - b} - \frac{2a}{a + b}\right)$

Uppgift 11. Förenkla:

$$\text{a) } \frac{\frac{a}{x} - 1}{\frac{a}{x} + 1} \quad \text{b) } \frac{\frac{3x}{2} - \frac{2z}{3}}{\frac{x}{2} - \frac{3x}{3}} \quad \text{c) } \frac{a+1}{\frac{1}{a} + 1} \quad \text{d) } \frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{1 + \frac{bc}{ad}} \quad \text{e) } \frac{2 - \frac{3a+2b}{2a+3b}}{\frac{8}{a} + \frac{2}{b}}$$

$$\text{f) } \frac{1+a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}} \quad \text{g) } \frac{2}{a-\frac{1}{a}} - \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}$$

Uppgift 12. a) Förenkla uttrycket $\frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1}}$

b) Prova att sätta in olika värden på x för att kontrollera att du förenklat rätt.
 Prova t ex med $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ och $x = 1$. Stämmer dina resultat?

Uppgift 13. Lös ekvationerna

$$\text{a) } \frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{1 + \frac{1}{x-1}} = \frac{1}{2} \quad \text{b) } \frac{2 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{x+1}$$

MA503: Grafer till polynom och rationella funktioner.

14. Utgå från kurvan $y = x^2$ som du säkert vet hur den ser ut. Försök, utan att göra några beräkningar, fundera ut hur kurvorna

a) $y = -x^2$ b) $y = x^2 + 1$ c) $y = x^2 - 1$ d) $y = (x - 1)^2$ e) $y = (x + 1)^2$
f) $y = (x - 2)^2 + 3$ g) $y = -(x - 2)^2 + 3$ h) $y = 2x^2$ i) $y = x^2/2$

ser ut jämfört med $y = x^2$.

Rita kurvan $y = x^2$ i ett xy -diagram (använd åtminstone en halv A4-sida för diagrammet). Försök sedan rita in kurvorna a)–h) i samma diagram *enbart* med hjälp av hur kurvan $y = x^2$ ser ut. När du börjar få för många kurvor i diagrammet ritar du $y = x^2$ i ett nytt diagram och fortsätter med kurvorna som återstår i det nya diagrammet. Om du vill kan du i efterhand kontrollera att du ritat rätt t ex med en grafritande räknedosa.

15. Antag att en funktion $y = f(x)$ är given. Skriv upp en funktion vars graf erhålls genom att flytta grafen till f tre steg till vänster (dvs tre steg i negativa x -axelns riktning) och två steg uppåt (dvs två steg i positiva y -axelns riktning).

16. Ett 2:a gradspolynom $x^2 + ax + b$ kan med hjälp av kvadreringsregeln skrivas om på följande sätt (metoden kallas *kvadratkomplettering*):

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} \quad (\text{kontrollera!})$$

Du ska nu skissera grafen $y = x^2 - 6x + 5$. Använd tre olika metoder:

- Derivera, ta reda på derivatans 0-ställen och gör teckenstudium på derivatan. Kombinera med värdetabell.
- Kvadratkomplettera och utnyttja att du vet hur grafen till $y = x^2$ ser ut.
- Använd grafritande räknedosa (om du har en sådan!).

Kontrollera att resultatet blir detsamma!

17. Vad får man för resultat i uppgift 15 då

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^3 + x$ c) $f(x) = x^3 - x$?

18. Det finns tre olika grundtyper av grafer till tredjegradspolynom:

$$y = x^3 \quad y = x^3 + x \quad y = x^3 - x$$

a) Rita graferna till de tre polynomen ovan. Diskutera vad som skiljer dem åt?

b) Av vilken typ är tredjegradspolynomen

$$p(x) = x^3 + 6x^2 + 8x ,$$

$$q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \quad \text{och}$$

$$r(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 4 ?$$

Det gäller att fundera ut vilka möjligheter som finns för att avgöra typen av ett tredjegradspolynom. Fundera på det!

MA503: Grafer till polynom och rationella funktioner.

19. I fig 1–3 nedan ser du tre olika huvudtyper av grafer till tredjegradspolynom.

fig 1. $y = x^3 - x$

fig 2. $y = x^3 + x$

fig 3. $y = x^3$

I fig 1 växlar kurvan från att vara växande till att bli avtagande för att sedan åter bli växande. Låt oss se vad det innebär för derivatan. Om $y = x^3 - x$ så är $y' = 3x^2 - 1$. Derivatan y' blir alltså 0 för $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Teckenstudium av derivatan y' visar var y är växande och avtagande:

x	$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$	
$y' = 3x^2 - 1$	+	0	-	0
$y = x^3 - x$	↗	∩	↘	∪

Det som avgör vilken typ av tredjegradspolynom man har att göra med bestäms av antalet teckenväxlingar hos derivatan. Gör själv teckenstudium av derivatan till polynomet i fig 2. Grafen i fig 3 utgör ett gränsfall mellan graferna i fig 1 och fig 2. Hur ser teckenstudieschemat för derivatan ut i detta fall?

20. Gör teckenstudium av derivatan för $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ så som i exemplet för polynomet i fig 1 i föregående uppgift. Markera på samma sätt som ovan var p är växande och avtagande. Räkna ut vilket värde $p(x)$ har i de punkter där $p'(x) = 0$. Tänk också efter vad som händer med $p(x)$ då $x \rightarrow \infty$ och då $x \rightarrow -\infty$. Försök sedan göra en grov skiss av grafen $y = p(x)$ enbart utifrån det du gjort hittills. Kan du säga något om antalet rötter till ekvationen $p(x) = 0$?
21. Samma uppgift som ovan för
 a) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ b) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ c) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
22. Samma uppgift som ovan för
 a) $p(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ b) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$

23. Nu ska du fundera på vilka möjliga principiella utseenden grafen till ett fjärdegradspolynom $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ kan ha.

Börja med att tänka efter vad som händer med $p(x)$ då $x \rightarrow \infty$ och då $x \rightarrow -\infty$.

Tänk sedan efter hur derivatan $p'(x)$ kan växla tecken. Derivatan $p'(x)$ är ett tredjegradspolynom. När du gjort de föregående uppgifterna bör du ha fått en uppfattning om vilka möjligheter som finns för ett tredjegradspolynom att växla tecken. Resonera utifrån detta hur grafen $y = p(x)$ kan se ut i olika fall.

Ge därefter exempel på fjärdegradspolynom vars grafer ser ut som de huvudtyper du kommit fram till.

24. Nu ska vi studera rationella funktioner, dvs polynom dividerat med polynom. Vi börjar med $y = 1/x$. Att göra en värdetabell är bra, men det är viktigare att kunna göra en grovskiss av grafen genom att bara studera funktionen och dess derivata. För $1/x$ gäller att vi måste ha $x \neq 0$ (man får aldrig ha 0 i en nämnare!!).

Börja med att tänka efter hur $1/x$ uppför sig då $x \rightarrow 0$. Här måste du skilja på två fall: $x > 0$ och $x < 0$. Då $x > 0$ och närmar sig 0 (vi skriver $x \rightarrow 0+$) så är det klart att $1/x$ är positivt och blir större och större. Då x ligger mycket nära 0 är $1/x$ mycket stor. Vi skriver

$$\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \quad \text{då} \quad x \rightarrow 0+$$

Följande lätt insedda fakta bör vara tillräckligt för att göra en grov skiss av kurvan $y = 1/x$ för $x > 0$:

- $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 0+$.
- $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow +\infty$.
- $\frac{1}{x}$ avtar då x ökar (om $x > 0$).
- $y = 1$ för $x = 1$.

Rita kurvan för $x > 0$. Gör sedan motsvarande undersökning för $x < 0$ och rita in hur kurvan ser ut för $x < 0$ i samma diagram.

25. Gör en grovskiss av kurvan $\frac{1}{x^2}$.

26. Gör en grovskiss av graferna a) $y = \frac{1}{x-1} + 2$ $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$

27. Försök göra en grovskiss av $y = \frac{1}{x(x-1)}$. Observera först att $x \neq 0$ och $x \neq 1$ (varför?). Man kommer ganska långt i förståelse av hur grafen måste se ut enbart genom att tänka efter vad som händer med y då $x \rightarrow 0-$, $x \rightarrow 0+$, $x \rightarrow 1-$ och $x \rightarrow 1+$ samt då $x \rightarrow \pm\infty$.

Starta med att försöka skissa kurvan enbart utifrån undersökningen ovan. Tycker du att du behöver ta reda på något mer för att grovskissen ska bli korrekt? Ta reda på det i så fall och komplettera eller rätta till grafen. Skulle du ha nytta av att derivata och göra teckenstudium av derivatan?

MA503: Grafer till polynom och rationella funktioner.

28. Om $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ (jämför uppgift 27!) så blir $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ (kontrollera!!).
Genom att studera tecknet av täljare och nämnare i $f(x)$ och $f'(x)$ får vi fram följande teckenstudiumtabell

x	0			$\frac{1}{2}$	1		
$f'(x)$	+	ej def.		+	0	-	ej def.
$f(x)$	↗	+∞/-∞		+	∩	↘	-∞/+∞

Med beteckningen $+\infty/-\infty$ för $f(x)$ under $x = 0$ menas att $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow 0^-$ och $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^+$ (se uppgift 27!). Om vi förutom uppgifterna i teckenstudiumtabellen konstaterar att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow -\infty$, att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow +\infty$ samt att $f(\frac{1}{2}) = -4$, så har vi tillräckligt med uppgifter för att göra en korrekt skiss av grafen $y = f(x)$. Skissa grafen!

29. Gör en grovskiss av grafen till $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$.
(Ledning: Faktorisera nämnaren först!)
30. Skissa grafen till $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ genom att göra teckenstudium av derivatan. Ta inte med fler x -värden än nödvändigt i teckenstudiumtabellen.
31. När man ska undersöka grafen till en rationell funktion så är det förstas intressant att undersöka hur funktionen uppför sig då $x \rightarrow \pm\infty$.

Låt oss som exempel undersöka hur $\frac{5x+10}{4x^2-8x-24}$ uppför sig då $x \rightarrow \pm\infty$. Om x blir stort så dominerar termen $5x$ i täljaren och termen $4x^2$ i nämnaren. Det betyder att både täljaren och nämnaren blir mycket stora då x blir stort. Vi säger att gränsvärdet av $f(x) = \frac{5x+10}{4x^2-8x-24}$ då $x \rightarrow \infty$ är av "typ $\frac{\infty}{\infty}$ ". Av detta kan man emellertid inte dra någon slutsats om vilket gränsvärde man får. Till exempel är ju gränsvärdena av $\frac{x}{x}$, $\frac{3x^2}{x^2}$, $\frac{x}{x^2}$ och $\frac{x^2}{x}$ då $x \rightarrow \infty$ alla av typ $\frac{\infty}{\infty}$ medan gränsvärdena blir (förklara varför!):

$$\frac{x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{3x^2}{x^2} \rightarrow 3, \quad \frac{x}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{och} \quad \frac{x^2}{x} \rightarrow \infty \quad \text{då} \quad x \rightarrow \infty.$$

Gränsvärdet av $\frac{5x+10}{4x^2-8x-24}$ då $x \rightarrow \infty$ måste alltså undersökas närmare. Ett bra sätt är att bryta ut den dominerande termen i täljare respektive nämnare:

$$\frac{5x+10}{4x^2-8x-24} = \frac{x(5+\frac{10}{x})}{x^2(4-\frac{8}{x}-\frac{24}{x^2})} = \frac{5+\frac{10}{x}}{x(4-\frac{8}{x}-\frac{24}{x^2})} \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad x \rightarrow \infty$$

I uttrycket efter det sista likhetstecknet är det klart att täljaren ligger nära 5 då x är ett stort positivt tal, eftersom $\frac{10}{x}$ då ligger nära 0. På samma sätt måste parentesen i nämnaren ligga nära 4 då x är stort. Nämnaren är alltså ett stort tal (x) gånger

ett tal som ligger nära 4, så nämnaren är mycket stor då x är stor. Ett tal som ligger nära 5 dividerat med ett mycket stort tal måste ligga nära 0. Vi kan därför dra slutsatsen att gränsvärdet måste vara 0.

Låt oss se på ytterligare ett exempel:

$$\frac{4 - x^2}{3x^2 + 2x + 8} = \frac{x^2(\frac{4}{x^2} - 1)}{x^2(3 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2})} = \frac{\frac{4}{x^2} - 1}{3 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2}} \rightarrow \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Undersök på liknande sätt vad nedanstående gränsvärden blir

- a) $\frac{2x^2 + 3x - 1}{7x^3 - x^2 + 5x + 1}$ då $x \rightarrow \infty$ b) $\frac{x^4 + x + 1}{2x^4 - 3x^3 + x + 4}$ då $x \rightarrow \infty$
c) $\frac{2x^4 - 5x + 7}{x^3 + 1}$ då $x \rightarrow \infty$ d) $\frac{1 - x^3}{x^2 + 1}$ då $x \rightarrow \infty$
e) $\frac{3x^5 + x^3 - 3}{2x^4 + x^2 - 7x}$ då $x \rightarrow -\infty$ f) $\frac{3x^5 + x^3 - 3}{2x^3 + x^2 - 7x}$ då $x \rightarrow -\infty$

32. Om en kurva $y = f(x)$ närmar sig en rät linje obegränsat då man följer kurvan långt bort från origo, så säger man att linjen är en *asymptot* till kurvan. En asymptot kan vara *lodrät* (dvs parallell med y -axeln), *vågrät* (dvs parallell med x -axeln) eller *sned*. T ex är $x = 0$ (dvs y -axeln) en lodrät asymptot till och $y = 0$ (dvs x -axeln) en vågrät asymptot till $y = x$.

Lodräta asymptoter till en rationell funktion finner man genom att se efter var nämnaren blir 0. T ex är $x = 3$ en lodrät asymptot till $y = \frac{x}{2x-6}$ eftersom $\frac{x}{2x-6} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 3+$ (och $\frac{x}{2x-6} \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 3-$).

Vågräta asymptoter finner man genom att undersöka om den rationella funktionen har ett ändligt gränsvärde då $x \rightarrow \pm\infty$. T ex gäller $\frac{x}{2x-6} \rightarrow \frac{1}{2}$ då $x \rightarrow \infty$. Alltså är $y = \frac{1}{2}$ en vågrät asymptot till $y = \frac{x}{2x-6}$ då $x \rightarrow \infty$. (På samma sätt är $y = \frac{1}{2}$ en vågrät asymptot till $y = \frac{x}{2x-6}$ då $x \rightarrow -\infty$ eftersom $\frac{x}{2x-6} \rightarrow \frac{1}{2}$ då $x \rightarrow -\infty$.)

Rita linjerna $x = 3$ och $y = \frac{1}{2}$ samt grafen $y = \frac{x}{2x-6}$ i ett xy -diagram.

33. Finn eventuella lodräta och vågräta asymptoter till följande rationella funktioner. Rita i varje uppgift grafen till den rationella funktionen tillsammans med asymptoterna.

a) $y = \frac{1}{x+1}$ b) $y = \frac{x}{x+1}$ c) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ d) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

34. Försök finna en rationell funktion som har lodräta asymptoter $x = 0$ och $x = 3$ samt en vågrät asymptot $y = 2$.

35. Försök finna en rationell funktion som har lodräta asymptoter $x = 0$ och $x = 3$ samt en sned asymptot $y = x - 1$.

36. Skissa grafen till den rationella funktionen $y = \frac{x^2}{x+1}$. Använd teckenstudium av derivatan. Vilka asymptoter har funktionen?

Regeln för hur en kvot deriveras: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

MA503: Grafer till polynom och rationella funktioner.

32. Tre mobiltelefonabonnemang ska jämföras. För abonnemangen har följande prislistor (gäller samtal inom Sverige) hämtats från nätet:

Mobiltel

Inträde: 250:-

Månadsavgift: 95:-

Samtalsavgifter: 6:-/min kl 9-17 vardagar, 2:-/minut övriga tider.

Mobiltel Bonus

Inträde: 250:-

Månadsavgift: 145:-

Samtalsavgifter: 5:50/min kl 9-17 vardagar, 1:-/minut övriga tider.

Mobiltel Volym

Inträde: 250:-

Månadsavgift: 162:50

Samtalsavgifter: 3:63/min kl 9-17 vardagar, 2:50/minut övriga tider.

Vilket abonnemang ska man välja för att minimera sina kostnader?

33. För vilka värden på x gäller följande olikheter?

a) $3x - 2 \leq x + 1$ b) $-x + 7 < -2x + 1$ c) $4x - (1 - x) > 3x$

34. För vilka värden på x gäller följande olikheter?

a) $(x-1)(x-3) < 0$ b) $(x+3)(x+4) \geq 0$ c) $x(x-1)(x-2)(x-3)^2(x-4) \geq 0$

d) $\frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leq 0$ e) $(x-1)(x-3) < 8$ f) $\frac{x-1}{x+1} > 3$

35. För vilka värden på x gäller följande olikheter?

a) $2x^2 - 3x + 1 > 0$ b) $x^2 < x + 6$ c) $x^2 \geq 2x + 8$ d) $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \leq 0$

36. För vilka värden på x gäller följande olikheter?

a) $\frac{2}{x+1} > x$ b) $\frac{2x+1}{x+1} < 1$ c) $\frac{2x-1}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+1}$ d) $\frac{2x-1}{x+1} \leq \frac{x-1}{2x+1}$

Matematik över gränserna

Uppgifter för kursen MA 503

Trigonometri och geometri

Vi har med författarnas tillstånd kopierat ett avsnitt ur boken Dunkels A, Klefsjö, B Näslund R & Nilsson I, Mot bättre vetande i matematik, Studentlitteratur, 1997. Läs utdraget parallellt med att Du arbetar med följande. Uppgifterna 401 och framåt hämtas ur utdraget.

Enhetscirkeln

Den enklaste trigonometrin utgår ifrån rätvinkliga trianglar. Enhetscirkeln är grunden för all fortsatt trigonometri, bland annat alla tillämpningar i vågrörelseläran och mekaniken. Därför är det viktigt att förstå hur enhetscirkeln används.

Grader och radianer

Sambandet mellan grader och radianer kan formuleras på olika sätt. De två formlerna

$180^\circ = \pi \text{ rad}$	$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$
-------------------------------	--------------------------------

är de grundläggande sambanden som utgår från ett halvt respektive ett helt varv. Lär Dig en av dessa så att Du säkert kommer ihåg den. Utifrån den kan Du härleda sambanden

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0174 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

42. Rita en stor och tydlig enhetscirkel med passare. Gör skalor på axlarna. Använd enhetscirkeln för att illustrera vridningarna i uppgifterna 401 och 402 och i uppgifterna nedan.

43. Illustrera följande vinklar/vridningar i enhetscirkeln. Alla är givna i radianer. Översätt vid behov till grader.

$$-0,25\pi, 1,25\pi, \frac{7\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, -3\pi, 2, -5$$

44. Illustrera följande vinklar i enhetscirkeln. Alla är givna i grader. Översätt alla till radianer.

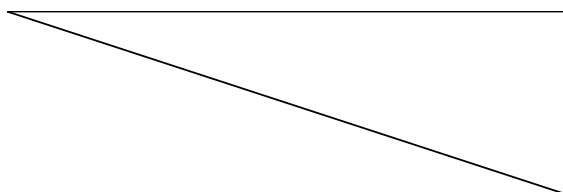
$$30^\circ, 220^\circ, -135^\circ, 450^\circ, 165^\circ, 5\pi^\circ \text{ (udda uppgift!)}$$

45. Diskutera i en grupp eller två och två. Varför använder man vridningar som är större än ett helt varv? Varför använder man negativa vridningar?

Cosinus och sinus

De två trigonometriska funktionerna *cosinus* och *sinus* definieras utgående från enhetscirkeln. Se utdraget. Den definitionen fungerar för alla vinklar.

För spetsiga vinklar finns en helt annan definition som bygger på rätvinkliga trianglar.



$$\cos v = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}} =$$

$$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}} =$$

Skriv in beteckningar på sidorna och en spetsig vinkel i figuren ovan och fyll i formelerna.

46. För spetsiga vinklar finns det alltså två definitioner av *cosinus* och *sinus*. Motivera noga varför de två definitionerna ger samma resultat för dessa vinklar.

Det finns två viktiga trianglar som Du bör känna till, den *halva kvadraten* och den *halva liksidiga triangeln*. Lär Dig hur Du kan ta fram längden av sidorna i dessa trianglar. Utifrån dem kan Du sedan bestämma värdet av cosinus och sinus för vinklarna 30° , 45° , 60° . Se sidan 67, 68 och 69 i utdraget.

47. Illustrera vridningarna i uppgift 403 i enhetscirkeln och lös uppgiften.

48. Beräkna värdet av cosinus och sinus för följande vinklar. Använd enhetscirkeln.

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, -135^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

Periodiciteten

Eftersom en vridning ett helt varv återför en viss punkt på enhetscirkeln till sitt ursprungliga läge, så kommer *cosinus*- och *sinus*-funktionerna att upprepa sig periodiskt. Se sidan 67. Det kan man använda när man bestämmer värdet av funktionerna för en viss vinkel.

49. Bestäm *cosinus* och *sinus* för vinklarna

$$450^\circ, 945^\circ, -390^\circ$$

50. Gå igenom några av vinklarna i uppgift fr o m 404 t o m 407, tills Du känner Dig säker på beräkningen av *cosinus* och *sinus* för vridningar mer än ett helt varv.

Trigonometriska samband

Enhetscirkeln är ett ovärderligt hjälpmedel för att hitta trigonometriska samband. Sådana finns det gott om och det är ingen idé att försöka lära sig alla utantill. Det är också tidsödande att behöva slå upp och leta fram dem. Det är mycket bättre att lära sig använda enhetscirkeln. Se sidan 69, 70 och 71 i utdraget.

Metoden är följande. För varje vinkel hittar man en jämförelsevinkel i första kvadranten. Man jämför tecknen för koordinaterna för de två punkterna på enhetscirkelns rand. På så sätt får man fram sambanden.

Välj en vinkel i fjärde kvadranten. Spegla den i x-axeln och Du får fram jämförelsevinkeln. Görs i utdraget på sidan 69. Kontrollera formelerna i rutan.

Välj en vinkel i tredje kvadranten. Spegla den i origo eller vrid tillbaka ett halvt varv så får Du jämförelsevinkeln. Görs i utdraget sidan 71. Kontrollera formelerna i rutan.

Välj en vinkel i andra kvadranten. Spegla vinkeln i y-axeln. Konstruera tillhörande formler. (Uppg 51)

51. Ta fram formler för supplementvinklarna v och $\pi - v$ med denna metod.

Den allra mest kända trigonometriska formeln är den s k *trigonometriska ettan*. Den gäller för alla vinklar, inte bara för spetsiga. Den hänger ihop med Pythagoras sats.

52. Kontrollera att den trigonometriska ettan verkligen gäller för några vinklar utanför första kvadranten. Välj t ex vinklarna i uppgift 48.

53. Vad säger Pythagoras sats? Välj en spetsig vinkel v och visa att Pythagoras sats kan användas för att få fram (= härleda, bevisa) den trigonometriska ettan.

54. Lös uppgift 413.

Matematik över gränserna

Uppgifter för kursen MA 503

Lektionen fredag 28/1 bedrivs utan lärarhandledning med självstudier. Arbeta igenom materialet nedan och lämna in lösningar till uppgifterna fredag 4/2. Det finns hänvisningar till utdraget ur *Mot bättre vetande i matematik* som delats ut tidigare.

Trigonometriska ekvationer

Trianglar

I många tillämpade problem som har att göra med bestämning av avstånd och vinklar behöver man använda metoder för att bestämma en okänd sida eller vinkel i en triangel. Standardmetoderna bygger på två viktiga satser, sinussatsen och cosinussatsen

Sidorna i en triangeln kallas a , b och c och motstående vinklar A , B och C .

Sinussatsen	Cosinussatsen
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

- Om alla tre sidorna är givna kan man använda cosinussatsen för att bestämma var och en av vinklarna i tur och ordning. (Den tredje vinkeln beräknas enklast med hjälp av triangelns vinkelsumma!)
 - Om alla tre vinklarna och en sida är givna får man fram övriga två sidor med sinussatsen. (Det räcker med två givna vinklar. Den tredje bestäms då ur vinkelsumman.)
 - Om två sidor och mellanliggande vinkel är givna använder man cosinussatsen för att bestämma den tredje sidan och kan sedan fortsätta med de övriga vinklarna enligt ovan.
 - Om två sidor och en vinkel som inte ligger mellan dessa två är givna använder man sinussatsen för att bestämma en av de okända vinklarna. I detta fall finns det i oftast *två* möjliga trianglar.
55. Gör fyra egna exempel på trianglar med givna sidor/vinklar enligt fallen ovan och beräkna övriga sidor/vinklar med hjälp av satserna. Kontrollera med hjälp av så skalenliga figurer som möjligt att svaret är rimligt.
56. Analysera det sista fallet – två sidor är givna tillsammans med en vinkel som inte ligger mellan de givna sidorna. Vilken typ av ekvation får man för en av de okända vinklarna? Hur kommer det sig att den kan ha två lösningar? Finns det något fall då den bara har en lösning? Finns det något fall då den inte har någon lösning?
57. Om tre sidor är givna kan man ibland få fram ett värde på cosinus för en av vinklarna som är negativt. Vinkeln blir då trubbig. (Kontrollera med enhetscirkeln.) Vilket villkor måste sidorna uppfylla för att det ska bli ett negativt cosinusvärde för en vinkel och därmed en trubbvinklig triangel?
58. Vid mätning med hjälp av triangulering har man mätt upp en referenssträcka AB till 250 m. Utifrån punkterna A och B har man mätt syftvinklarna till två andra punkter P och Q och fått fram att $\alpha = 17,2^\circ$, $\beta = 39,7^\circ$, $\gamma = 32,4^\circ$ och $\delta = 76,1^\circ$. Bestäm avståndet PQ .

Periodiska lösningar

När man sysslar med trianglar vet man att vinklarna ligger mellan 0 och π rad (0° och 180°). När man sysslar med tillämpningar som t ex rotationsrörelser eller pendelrörelser, så blir alla lösningar intressanta, även de som svarar mot vridningar större än ett varv eller negativa vridningar. Därför vill man i dessa fall finna alla lösningar.

59. Lös uppgifterna 414 och 415 i utdraget. Observera att dessa uppgifter kan lösas utan hjälp av miniräknaren.

I uppgiften 59 blir perioden 360° eller 2π . Men om det finns en koefficient framför x blir perioden en annan.

60. Undersök värdet av $\sin 3t$ för vinklarna $t = 20^\circ, 140^\circ$ och 260° . (Använd närmevärden från miniräknaren.) Rita en enhetscirkel och pricka in motsvarande punkter på enhetscirkeln. Sammanbind punkterna och beskriv vilken figur man får. Vilken är vridningen från en av vinklarna till en annan?

61. Gör om uppgiften 60 för vinklarna $t = 40^\circ, 160^\circ$ och 280° .

I uppgifterna 60 och 61 finns alla lösningar till ekvationen

$$\sin 3t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

som ligger i första varvet, dvs mellan 0° och 360° . För att få med samtliga lösningar måste man också lägga till ett helt antal hela varv, dvs addera $n \cdot 360^\circ$, där n kan vara vilket heltal som helst, till var och en av de sex vinklarna. Men perioden är i själva verket 120° , enligt uppgifterna 60 och 61. Därför kan man sammanfatta alla lösningar i uttrycket

$$t = 20^\circ + n \cdot 120^\circ, \quad t = 40^\circ + n \cdot 120^\circ.$$

62. Kontrollera att formeln ovan ger alla vinklarna i uppgifterna 60 och 61, och alla vridningar som man får från dessa genom att lägga till hela varv.

En direkt lösningsmetod är följande

$$\sin 3t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3t = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller } 3t = (180^\circ - 60^\circ) + n \cdot 360^\circ, \text{ där } n \text{ är ett heltal}$$

$$t = 20^\circ + n \cdot 120^\circ \text{ eller } t = 40^\circ + n \cdot 120^\circ$$

I andra steget har hela högerledet dividerats med 3, och på så sätt uppkommer perioden 120° .

63. Lös ekvationerna

$$\text{a) } \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{b) } \cos 4t = 0$$

$$\text{c) } \sin \frac{t}{2} = 0.5$$

$$\text{d) } \sin 5x = -1$$

$$\text{e) } \cos 3t = \cos 45^\circ$$

$$\text{f) } \sin 50x = 0,2$$

Använd exakta värden om det är möjligt. Uttryck i grader eller radianer. Pricka in lösningarna på enhetscirkeln.

64. Lös ekvationerna och pricka in lösningarna på enhetscirkeln.

$$\text{a) } \sin(2x - 50^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$$

Matematik över gränserna

Uppgifter för kursen MA 503

Trigonometriska samband, fortsättning

Summaformler

Det finns många trigonometriska formler som man har nytta av när man ska förenkla trigonometriska uttryck. De kan man behöva utnyttja då man arbetar med tillämpade problem, eller studerar egenskaper hos sammansatta trigonometriska funktioner.

Vi har tidigare behandlat formler som har med periodiciteten och med symmetrier i enhetscirkeln att göra. En annan viktig grupp är summaformlerna och formler för dubbla och halva vinkeln:

Summaformlerna	Formler för dubbla vinkeln
$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ $\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$	$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = 2 \cos^2 v - 1 = 1 - 2 \sin^2 v$ $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$
	Formler för halva vinkeln $\cos^2 \frac{v}{2} = \frac{\cos v + 1}{2}$ $\sin^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{2}$

Det finns samband mellan dessa formler. De hänger också ihop med formler vi tidigare behandlat. Det är bra att kunna alla formlerna utantill. Det är ännu viktigare att känna till hur man kan härleda dem ur varandra. Kan man det så behöver man bara lära sig de allra viktigaste helt säkert utantill!

65. Härled de tre sista summaformlerna ur den första. Du måste utnyttja ett par av de formler som vi tidigare behandlat.
66. Härled formlerna för dubbla och halva vinkeln ur summaformlerna. Även här måste Du använda en annan bekant formel.

Ett knep som kan vara bra att känna till är följande: Antag att Du minns strukturen på en av formlerna (dvs i stora drag hur den ser ut) men inte är säker på vilket tecken som gäller, eller om det var sinus eller cosinus på ett visst ställe. Då kan Du kontrollera formeln rätt enkelt genom att sätta in värden på vinklarna u och v . Du kan välja t ex bland värdena $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ eller 180° . För de vinklarna vet Du ju värdena för sinus och cosinus. Genom detta kan Du se om formeln stämmer.

67. Antag att Du har glömt om det står plus eller minus i höger led i formlerna för sinus respektive cosinus för halva vinkeln. Föreslå något lämpligt värde på vinkeln med vars hjälp Du kan pröva vilket tecken som gäller för den ena och andra formeln. Välj gärna så enkelt värde som möjligt!

I följande undersökande uppgift får Du tillämpa bland annat vissa formler ovan.

68. I en triangel är en vinkel dubbelt så stor som en annan. Kalla de vinklarna v och $2v$. Den mellanliggande sidan är 5 cm. Man vill undersöka arean av triangeln när vinkeln v varierar. Arean av triangeln kallas $A(v)$. Skissera till att börja med ett par trianglar som uppfyller kraven. Undersök sedan följande frågor.

- a) Mellan vilka värden kan v variera?
b) Visa att

$$A(v) = \frac{25}{2} \frac{\sin 2v}{2 \cos 2v + 1}$$

- c) Undersök med miniräknare hur arean varierar då vinkeln v varierar. Plotta grafen på papper utifrån miniräknarens graf..
- d) Undersök i vilka intervall arean växer/avtar med olika metoder enligt punkterna 1, 2 och 3.
1. Med hjälp av miniräknaren.
 2. Med hjälp av derivatan.
 3. Med hjälp av någon annan metod som Du kan komma på.
- e) Hur stor kan arean bli? Motivera svaret på tre olika sätt enligt punkterna 1, 2 och 3.
1. Med hjälp av miniräknaren och funktionen $A(v)$.
 2. Direkt utifrån en analys av uttrycket för funktionen $A(v)$.
 3. Geometriskt utifrån triangeln.

69. (Extra uppgift.) Studera tangensfunktionen, $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ och dess graf.

- a) För vilka värden på x är funktionen definierad?
- b) Vilka nollställen har funktionen?
- c) Vilken periodicitet har funktionen?
- d) Härled funktionens derivata.
- e) I vilka intervall är funktionen växande? Använd derivatans tecken för att avgöra detta.
- f) Skissera grafen med hjälp av miniräknaren och uppgifterna Du fått fram ovan. Skissera den på ett intervall som är minst tre perioder långt.

Matematik över gränserna

Logaritmer – varför det då?

Två sätt att beskriva ett positivt tal – som ”vanligt” och med hjälp av logaritmen. I tabellen sammanfattar vi skillnaden när man ska operera med talen.

TALET	motsvarar	LOGARITMEN
$a \quad (a > 0)$	$\leftrightarrow$	$\lg a$
Multiplikation	motsvarar	Addition
ab	$\leftrightarrow$	$\lg a + \lg b$
Division	motsvarar	Subtraktion
$\frac{a}{b}$	$\leftrightarrow$	$\lg a - \lg b$
Upphöja till en potens	motsvarar	Multiplikation
a^c	$\leftrightarrow$	$c \lg a$
Neutralt element vid multiplikation	motsvarar	Neutralt element vid addition
1	$\leftrightarrow$	0

Historiskt sett så betydde uppfinningen av logaritmerna lika mycket som konstruktionen av de första datorerna i mitten av 1900-talet. De första logaritmtabellerna publicerades i början av 1600-talet. Båda uppfinningarna ökade dramatiskt möjligheterna att genomföra stora beräkningar. Beräkningstiden med logaritmer minskade eftersom addition av två tal går så mycket snabbare att genomföra än multiplikation. Därmed kunde man lösa problem som tidigare varit omöjliga att ge sig på. På 1600-talet gällde det framförallt astronomiska beräkningar till nytta för sjöfarten och för förståelsen av solsystemets mekanik. På 1900-talet handlade det t ex om väderprognoser.

Matematik över gränserna

Logaritmer

65. Finn ett tal sådant att 10 upphöjt till talet blir 100 000.

66. Finn ett tal y sådant att 10^y blir a) 0.1 b) 5 c) 50 d) -1 e) 0.

(Du kan behöva använda miniräknaren!)

67. Jämför dina svar i uppgift 65 och 66 a)-c) med $\lg 100000$, $\lg 0.1$, $\lg 5$ och $\lg 50$.

Definition: $\lg a$ är det tal som 10 ska upphöjas till för att resultatet ska bli a .

I formelspråk kan definitionen skrivas: $10^{\lg a} = a$

68. Varför kan inte $\lg a$ definieras för $a \leq 0$?

69. Vad blir a) $\lg(10^2)$ b) $\lg(10^{1.5})$ c) $\lg 0.01$ d) $\lg(\lg 10\,000\,000\,000)$?

Av definitionen följer att $\lg(10^b) = b$ (Jämför med uppgift 69.)

70. Skissa kurvan $y = \lg x$. Ange speciellt eventuella skärningspunkter med axlarna. Vilken definitions mängd och värdemängd har $\lg$ -funktionen?

71. Använd miniräknaren för att beräkna a) $\lg 3$ b) $\lg 7$ c) $\lg(3 \cdot 7)$

d) $\lg\left(\frac{3}{7}\right)$ e) $\lg(3^7)$ f) $\lg\left(3^{\frac{1}{7}}\right)$ g) $\lg(\sqrt[7]{3})$.

Lagarna för potensräkning kan översättas till lagar för logaritmer.

Exempel: Eftersom $10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$ så gäller:

$$10^{\lg a + \lg b} = 10^{\lg a} \cdot 10^{\lg b} = a \cdot b = 10^{\lg(a \cdot b)}$$

varav vi kan dra slutsatsen att $\lg a + \lg b = \lg a \cdot b$ för $a, b > 0$ (tänk noga efter vad varje likhet och slutsatsen beror på!).

72. Visa att $\lg\left(\frac{1}{b}\right) = -\lg b$ för $b > 0$ (du har nytta av att veta att $10^{-x} = \frac{1}{10^x}$).

73. Visa att $\lg a - \lg b = \lg\left(\frac{a}{b}\right)$ för $a, b > 0$.

74. Visa att $\lg(a^c) = c \lg a$ för $a > 0$ (använd potenslagen $10^{x \cdot z} = (10^x)^z$).

Sammanfattning av logaritmlagarna:

$$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$$

$$\lg(a^c) = c \cdot \lg a$$

De två ovanstående logaritmlagarna är viktiga kunna utantill. Nedanstående lagar kan härledas ur dessa två:

$$\lg 1 = 0 \quad , \quad \lg\left(\frac{1}{b}\right) = -\lg b \quad , \quad \lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

75. Härled de tre sistnämnda lagarna ur de två föregående.

76. Lös ekvationerna a) $8^x = 5$ b) $0.1^x = 3$.

77. Lös ekvationen $10^{x+2} - 15 = 0$.

Nedanstående tre ekvationen leder alla till att lösa en andragradsekvation. I en av uppgifterna kommer du att få fram en falsk rot, dvs ett x -värde som inte satisfierar den i uppgiften givna ekvationen. Lös ekvationerna. I vilken av uppgifterna får du fram en rot som måste förkastas? Förklara också varför roten måste förkastas.

78. Lös ekvationen $(\lg x)^2 - \lg x - 2 = 0$. (Ledning: Sätt $\lg x = t$.)

79. Lös ekvationen $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2)$.

80. Lös ekvationen $\lg(8-x) + \lg(1-x) - \lg(2-x) = \lg 5 + 2\lg 4 - 3\lg 2$.

Matematik över gränserna Uppgifter för kursen MA 503

Logaritmer, olika baser

Det går att använda olika baser när man beskriver ett tal med hjälp av en logaritm. Varje positivt tal har många olika logaritmer och man måste ange vilken bas man använder för att veta vilken logaritm det handlar om.

Här tar vi bara upp en annan bas vid sidan av basen 10, nämligen den naturliga logaritmen som har basen e . I tidigare kurser finns också 2-logaritmen behandlad.

Definition: Den naturliga logaritmen, $\ln a$, är det tal som basen e ska upphöjas till för att resultatet ska bli a . I formelspråk kan definitionen skrivas:

$$e^{\ln a} = a$$

Liksom tidigare är logaritmen bara definierad för positiva tal a .

81. Varför är de tre baserna 10, 2 och e speciellt intressanta?

82. Hur ser logaritmlagarna ut för den naturliga logaritmen? Skriv upp alla lagar som motsvarar de inramade lagarna för 10-logaritmen på förra bladet om logaritmer.

Omvandling mellan baser gör man genom att använda definitionen och en av logaritmlagarna. Definitionen ger

$$a = 10^{\lg a} = e^{\ln a}$$

Man sätter 10-logaritmen lika och får då

$$\lg a = \lg(e^{\ln a}) = \ln a \cdot \lg e$$

vilket kan skrivas

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e}.$$

På motsvarande sätt får man fram

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10}.$$

Du behöver inte lära Dig formlerna utantill. Det är bättre att komma ihåg hur man härleder dem. Med närmevärden får man följande samband.

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e} \approx \frac{\lg a}{0.4343} \approx 2.303 \lg a \qquad \lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} \approx \frac{\ln a}{2.303} \approx 0.4343 \ln a$$

83. Följande tal är närmevärden till logaritmer för åtta olika tal i baserna 10 respektive e . Para ihop de logaritmer som hör till samma tal. Försök lösa uppgiften utan miniräknare och använd miniräknaren för kontroll.

3.97, 0.43, -6, 0, -0.69, 6, 1.25, 1, -0.30, 1.72, 13.81, 2.30, 0.54, 0, -13.81, 1

84. Skissera graferna till de två logaritmfunktionerna i samma diagram. Var noga med att ange definitionsmängden.

85. Lös ekvationerna

a) $\ln x + \ln x^2 + \ln x^3 + \ln x^4 + \ln x^5 = 5$

b) $\ln x + \ln x^2 + \ln x^3 + \ln x^4 + \ln x^5 = \frac{1}{5}$

c) $\lg y + \lg y^2 + \lg y^3 + \lg y^4 + \lg y^5 = -5$

d) $\lg y + \lg y^2 + \lg y^3 + \lg y^4 + \lg y^5 = -\frac{1}{5}$

86. Lös ekvationen

$$\ln(x^2 - 6) - \ln(1 - x) = \ln 2$$

87. a) För vilka värden på x gäller likheten

$$2^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} ?$$

b) Skissera de två kurvorna $y = 2^{2x+1}$ och $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

c) För vilka x gäller olikheten

$$2^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} ?$$

Logaritmer, tillämpningar

Logaritmer som räknehjälpmedel är idag ersatta av miniräknare. Men det finns många viktiga tillämpningar av logaritmer vid studiet av exponentiell förändring. Därför behöver man kunna hantera exponentiella uttryck och räkna med logaritmer.

Exponentiellt växande och avtagande är vanligt i många förlopp och processer inom så skilda områden som fysik, ekonomi och biologi. Några exempel är kapitaltillväxt vid räntepålägg, radioaktivt sönderfall, temperaturförändring vid avsvälning och populationstillväxt inom biologin.

88. Halveringstiden för radium-226 är 1590 år.

a) Ett prov på radium-226 väger 100 mg. Bestäm en formel som anger den mängd radium-226 som återstår efter t år.

b) Bestäm den återstående mängden radium-226 efter 1000 år på 0.5 mg när.

c) Efter hur lång tid har mängden reducerats till 30 mg?

89. En bakteriekultur växer så att populationen fördubblas på en halvtimme. Om kulturen startar med 1000 bakterier i ett prov, hur många bakterier finns i motsvarande prov efter 2 timmar? När kommer populationen i ett motsvarande prov att ha vuxit till 50 000?

Newtons avsvälningslag säger att avsvälningshastigheten hos ett objekt är proportionell mot temperaturskillnaden mellan objektet och omgivningen. Temperaturen T vid tiden t hos objektet följer enligt Newtons lag utvecklingen

$$T = T_0 + (T_s - T_0)e^{-kt}$$

där T_0 är omgivningens temperatur och T_s är begynnelsestemperaturen hos objektet, dvs temperaturen vid tiden $t=0$. Konstanten k är ett positivt tal som beror på objektets storlek, form och värmeledningsegenskaper men som är konstant i en viss given situation. Avsvälningslagen gäller om inte temperaturskillnaden är alltför stor.

90. Kaffe hålls upp i en kopp. Kaffet svalnar från 85° till 75° på 6 minuter i ett rum med temperatur 22° . Vilken är temperaturen efter ytterligare 6 minuter? Vilken är temperaturen 15 minuter efter att kaffet hållts upp? När kommer temperaturen att ha sjunkit till 50° ? Hur lång tid tar det tills temperaturen sjunkit till 22° ?

Matematik över gränserna

96. Har kurvan $y = \ln x$ någon a) lodrät asymptot? b) vågrät asymptot?
Motivera dina svar! Ange asymptoten/asymptoterna då svaret är ja.

Inversa funktioner

Definition: Man säger att två punkter P och Q är varandras *spegelbilder* i linjen L om sträckan PQ är vinkelrät mot linjen och delas mitt itu av den (se fig 1).

Figur 1: Spegling i en linje.

97. Undersökning av spegling i linjen $y = x$.
- a) Vilken punkt är spegelbilden till punkten $(1, 4)$?
 - b) Vilken punkt är spegelbilden till punkten (a, b) ?

Man säger att funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = \ln x$ är varandras *inverser* eftersom

$$b = e^a \quad \text{om och endast om} \quad a = \ln b.$$

98. Skissa graferna till funktionerna $y = e^x$ och $y = \ln x$ i samma diagram. Visa att de två graferna är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.
(Anm. Detta gäller generellt för alla par av inversa funktioner)
99. Funktionerna $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$ är varandras inverser. Skissa båda funktionsgrafterna i samma diagram.

Ekvationer, falska och borttappade rötter

100. Ekvationen $\ln(x^2 - 6) - \ln(1 - x) = \ln 2$ (se uppgift 86) har bara en rot. Vid lösningen av ekvationen dyker det upp en rot som förkastas. Gå igenom din lösning och analysera i *vilket steg* den falska roten dyker upp. Vad är förklaringen till att man inte kan "gå bakåt" i kedjan av omskrivningar?
101. Lös ekvationen $\sqrt{x} + 2 = x$. Analysera på samma sätt som i föregående uppgift om du får någon falsk rot.
102. Samma uppgift för ekvationerna a) $\sqrt{\frac{13}{16} - x} + x = 1$ b) $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x - 9}$.
103. Finn felet i följande "bevis" för att $1 = 2$.

Låt a och b vara två tal som uppfyller $a = 2b$. Då gäller

$$2a - a = 4b - 2b$$

$$2b - a = 4b - 2a$$

$$2b - a = 2(2b - a)$$

$$\frac{2b - a}{2b - a} = \frac{2(2b - a)}{2b - a}$$

$$1 = 2$$

104. Var ligger felet i följande ekvationslösning:

$$2(x + 3)^2 = 5(x + 3)$$

$$2(x + 3) = 5$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad ?$$

Hur ser en korrekt lösning ut?

Minnesregel: Undvik division av båda leden i en ekvation med en faktor som kan vara noll för att inte tappa bort rötter. Skriv i stället om ekvationen så att högerledet blir noll och faktorisera vänsterledet.

Exempel: $15x^2 = 16x$; $15x^2 - 16x = 0$; $x(15x - 16) = 0$.

En produkt är noll om och endast om någon av faktorerna är noll. Ekvationen har därför rötterna $x_1 = 0$ och $x_2 = \frac{16}{15}$.

105. Lös ekvationerna a) $3(x - 2)^2 = x - 2$ b) $x^3 + x^2 - 20x = 0$
c) $(4x - 7)(2x + 1)(x - 9) = 0$.

Kurvritning

106. Rita kurvan $y = e^x$ för $-2 \leq x \leq 2$ i ett diagram. Låt en enhet på x -axeln motsvara 4 cm och en enhet på y -axeln 2 cm. Använd miniräknare för att göra en värdetabell som underlag (spara värdetabellen för senare bruk!). Rita därefter kurvan $y = e^{-x}$ i samma diagram utan att använda miniräknaren. Använd endast den redan ritade kurvan $y = e^{-x}$ som hjälp. Kontrollera ditt resultat med miniräknaren.

107. Rita utan att använda miniräknare, men med hjälp av kurvorna som du gjorde i föregående uppgift, kurvan $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Använd samma skalor på axlarna som i förra uppgiften. Kontrollera med en grafritande miniräknare.
108. Rita utan att använda miniräknare kurvan $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ i samma diagram som du gjorde i föregående uppgift. Jämför med vad miniräknaren ger.
109. Derivera funktionen $y = xe^{-x}$ och gör teckenstudium av derivatan. Skissa grafen med hjälp av teckenstudiumtabellen. Ange speciellt eventuella extrempunkter och asymptoter.
110. Samma uppgift för $y = x + 1 - \ln x$.
111. Samma uppgift för $y = -x^2 + 2x + 12 \ln x$.
112. Samma uppgift för $y = \frac{e^x}{x - 1}$.
113. I figur 2 ser du grafen för en funktion $y = f(x)$. Rita graferna $y = kf(x)$ för $k = 0, 1, -1, 2$ och $-\frac{1}{2}$ i ett diagram. Använd stor skala (2 cm/enhet på båda axlarna).

Figur 2: $y = f(x)$

114. Rita kurvan $y = e^x$ för $-2 \leq x \leq 2$ i ett diagram. Låt en enhet på x -axeln motsvara 4 cm och en enhet på y -axeln 1 cm (använd värdetabellen från uppgift 106). Skissa sedan i samma diagram, utan hjälp av miniräknare, kurvorna $y = 2e^x$, $y = \frac{1}{2}e^x$, $y = -e^x$, $y = -\frac{1}{2}e^x$ och $y = -2e^x$.
115. Sätt $f(x) = e^x$. Skissa kurvan $y = f(x)$. Skissa sedan i samma diagram kurvorna $y = f(-x)$, $y = f(x) + 2$, $y = f(x + 1)$ och $y = f(x - 1)$.

Anm. Kurvan $y = f(x + 1)$ kan dels erhållas genom att göra en förskjutning av kurvan $y = f(x)$ parallellt med x -axeln. Man kan också se att $f(x + 1) = e^{x+1} = e \cdot e^x = e \cdot f(x)$. Verkar detta stämma med den graf du ritat? Ett liknande betraktelsesätt kan anläggas på kurvan $y = f(x - 1)$.

Matematik över gränserna Projektuppgift 1

Leksaksprojektilen

Med en fjärrstyrd leksak kan man skjuta pil. Det går att styra både pilens utskjutningsvinkel och dess riktning.

En matematisk modell för pilens rörelse kan man beskriva på följande sätt. Ett koordinatsystem placeras så att utskjutningspunkten befinner sig i origo. Axlarna bestäms så att y -axeln är vertikal och x -axeln horisontell. Pilens rörelseplan definierar xy -planet. För att förenkla modellen antar vi att pilen skjuts iväg från markplanet och att vi kan försumma luftmotståndet. Pilens rörelse bestäms av gravitationskraften och kan i modellen beskrivas enligt de kända ekvationerna för kastparabeln.

Tiden efter det att pilen skjuts iväg kallas t och mäts i sekunder. Båda koordinaterna mäts i meter. Pilens bana bestäms av utgångsvinkeln α och av utgångsfarten v_0 (m/s). Vinkeln mäts mot horisontalplanet. Pilen befinner sig vid tiden t i punkten $(x(t), y(t))$ och koordinaterna ges av

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t \\ y(t) = (v_0 \sin \alpha)t - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

där g är tyngdaccelerationen, mätt i m/s^2 .

Utgångsfarten är i detta exempel given. Om värdet på v_0 sätts in och t elimineras ur ekvationerna visar det sig att man får sambandet

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Pilen rör sig alltså längs denna kurva.

Frågor

Hur långt och hur högt kan pilen nå? För att undersöka de frågorna ska gruppen genomföra en undersökning enligt punkterna 1 – 5.

1. a) Skissera pilens bana för tre olika värden på vinkeln som alla ligger mellan 0° och 90° . Bestäm högsta höjden och banans längd för dessa tre värden.
b) Vilken är den absolut högsta höjd som pilen kan nå om man varierar utgångsvinkeln? Motivera svaret på ett övertygande sätt.
2. Om pilen inte möter något hinder i sin bana, så når den marken på olika avstånd från utskjutningspunkten beroende på vinkeln α . Hur långt kan pilen längst nå och för vilken vinkel uppnås detta maximum? Motivera svaret övertygande.
3. Antag nu att det finns en vertikal vägg framför pilen. Den befinner sig 1 m från utskjutningspunkten.
a) Undersök för tre olika värden på vinkeln vilken höjd pilen når när den möter väggen.
b) Vilken är den högsta höjd pilen kan nå på denna vägg? Motivera svaret övertygande.
4. Antag att väggen är placerad på avståndet 5 m från utskjutningsplatsen. Genomför samma undersökning som i 3.
5. Antag slutligen att väggen är placerad 8 m från utskjutningspunkten. Genomför samma undersökning som i 3.

Rapporten

Rapporten ska innehålla följande delar:

1. En snygg titelsida med titel, namn på författarna och datum.
2. Presentation av frågeställningarna (t ex i form av uppgiftsbladet).
3. Fem avsnitt där de fem frågorna behandlas. Grafer ska ritas på särskilda sidor och i stor och tydlig skala.
De tre graferna som hör till var och en av uppgifterna 1, 3, 4 och 5 bör ritas i samma figur.
4. Kort sammanfattning av resultaten.

Till Britt-Marie, Eva och Urban.

Kommentarer till uppgifterna.

1. a) Oproblematiskt. Kräver att eleverna klarar av att rita snygga grafer. De kommer troligen att utgå från funktionsuttrycket. Om de vill använda parameterformen måste de först bestämma v_0 genom att jämföra de två framställningarna av parabeln.
- b) Här måste de antingen se detta som ett gränsvärde av högsta höjden då vinkeln närmar sig 90 grader, eller bestämma v_0 och använda parameterframställningen, där man kan sätta in 90 grader direkt och sedan hitta maximum i en parabel.
2. En upprepning av vad de sett i fysiken då man härleder kastvidden. Kräver derivering och litet trigonometri. Lättast att använda parameterframställningen, men det går bra också med funktionsuttrycket.
- 3 – 5. Här är det svårt att göra en analytisk lösning. Så då återstår grafisk eller numerisk lösning. Den grafiska lösningen kanske inte blir tillräckligt noggrann på en grafitande räknare? Resultatet blir intressant eftersom det i det första fallet högsta höjden tycks uppnås för den kastparabel som har sitt maximum i den punkten, men skillnaden blir tydlig i det andra fallet och naturligtvis det tredje, eftersom det inte finns någon kastparabel som har max så långt bort.

Frågor att diskutera efter projektet:

Frågorna 1b) och 2 är likartade. Varför går det inte att använda samma metod?

Hur skulle en analytisk lösning av uppgifterna 3 (och 4,5) planeras? Är den genomförbar? Varför inte om svaret är nej.

Matematik över gränserna

Projektuppgift 2: Cykliden

Den kurva som en punkt på periferin av ett hjul beskriver då hjulet rullar på ett plant underlag kalls *cykloid*. Arbeta i grupper om 2-4 personer för att undersöka cyklidens egenskaper.

1 Experimentell undersökning

Markera en punkt på periferin av ett hjul. Placera hjulet på ett plant underlag med punkten mot underlaget. Rulla hjulet ett varv så att punkten kommer tillbaka till utgångsläget. Observera hur punkten rör sig och försök att skissa kurvan på ett papper.

2 Matematisk beskrivning

Placera en cirkel med radie 1 med medelpunkten M i $(0, 1)$. Låt P vara en fast punkt på cirkelperiferin och som från början befinner sig i origo (se figur 1).

Figur 1: Hjulets begynnelseläge.

När cirkeln rullar i x -axelns riktning flyttar sig cirkelns medelpunkt M parallellt med x -axeln. Samtidigt kommer punkten P att rotera kring medelpunkten. Rotationen kring M beskrivs bäst i ett koordinatsystem som följer med M (se figur 2). Koordinatsystemet $x'y'$ har sitt origo i M och axlar parallella med xy -systemets axlar.

Uppgifter

1. Antag att M har koordinaterna (a, b) i xy -systemet och att Q är en punkt som har koordinaterna (x', y') i $x'y'$ -systemet. Hur räknar man ut Q 's koordinater i xy -systemet?

Tips: Om man har svårigheter med att lösa en uppgift av det här slaget brukar det underlätta om man börjar med mer konkreta fall. I det här fallet kan man t ex först tänka sig att $(a, b) = (5, 1)$ och $(x', y') = (-1, 2)$. Vad blir då x och y ? Efter att ha prövat några sådana fall kan ni säkert se hur man gör i det allmänna fallet i uppgiften.

Figur 2: P 's läge då hjulet rullat en bit (cirka $1/3$ varv).

2. Låt u beteckna vinkeln mellan positiva x' -axeln och radien MP (se figur 2). Vad blir koordinaterna för P i $x'y'$ -systemet uttryckt med hjälp av vinkeln u ?
(Ledning: Tänk på definitionen av cosinus och sinus med hjälp av enhetscirkeln! Tipset i uppgift 1 är naturligtvis också bra.)
3. Vad blir medelpunkten M 's koordinater (a, b) i xy -systemet uttryckt med hjälp av vinkeln v (se figur 2)? Förutsätt att vinklar anges i radianer.
4. Vilket samband råder mellan vinklarna u och v ? I begynnelseläget (se figur 1) kan ni sätta $v = 0$ och $u = \frac{3\pi}{2}$.
5. Uttryck P 's koordinater i xy -systemet med hjälp av vinkeln v .
6. Plotta med hjälp av resultatet i uppgift 5 den kurva som P beskriver då hjulet rullar ett varv, det vill säga då vinkeln v går från 0 till 2π . Det kan göras med hjälp av en grafritande kalkylator (kurva i parameterform). För att få en riktig uppfattning av cykloidens utseende måste axlarna graderas lika (så att en cirkel ser ut som en cirkel och inte som en ellips!). Naturligtvis kan ni också välja att göra en värdetabell och plotta för hand. Då måste ni räkna ut tillräckligt många punkter för att få en riktig uppfattning av kurvans utseende. Speciellt är det viktigt att ha många punkter då v ligger nära 0 och 2π . Hur bra stämde den experimentella kurvan som ni gjorde?
7. Om hjulet rullar med konstant hastighet, så svarar det mot att vinkeln v ändras med en konstant vinkelhastighet. Antag t ex att vinkelhastigheten är 1 radian per tidsenhet. Det innebär att $v = t$ där t är tiden. Om ni i uttrycken för P 's koordinater i xy -systemet ersätter v med t , så får ni P 's läge uttryckt som en funktion av tiden t . Genom att derivera med avseende på t kan ni beräkna vilken hastighet P har i x - och y -led i varje punkt på kurvan. Hur varierar P 's hastighetskomponenter i x -led och y -led när hjulet rullar med konstant hastighet? Ange speciellt i vilka lägen P 's hastighet är parallell med x - eller y -axeln. I vilka lägen är P 's fart maximal och i vilka lägen är den minimal? Jämför med den hastighet som medelpunkten M rör sig med.

Rapporten

Rapporten ska innehålla

1. En snygg titelsida med titel, datum och namn på författarna.
2. Presentation av frågeställningarna (t ex i form av uppgiftsbladet).
3. Svar på de frågor som ställs i uppgifterna samt de grafer som efterfrågas.
4. En kort sammanfattning av resultaten.